
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00468390 0





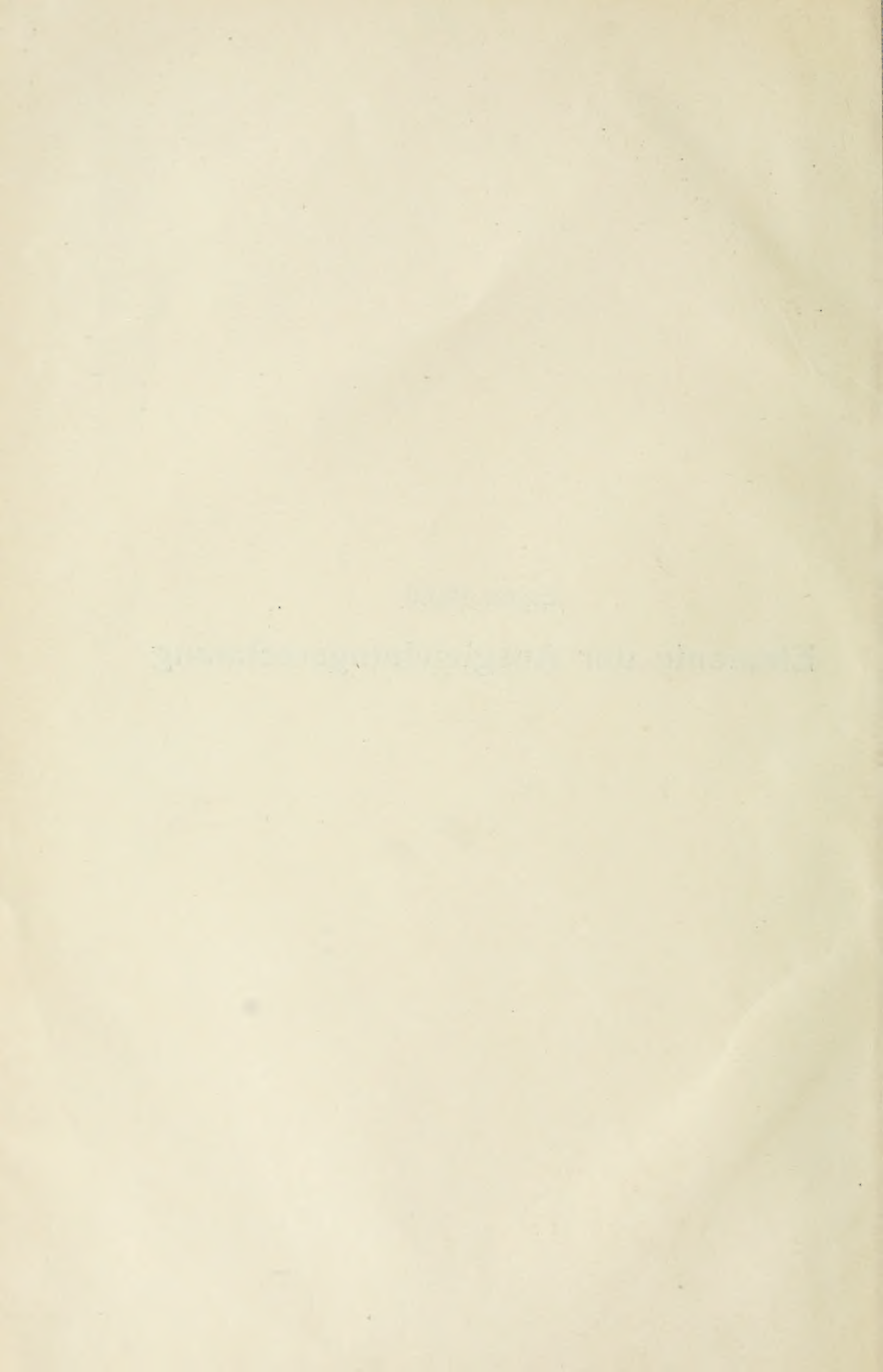




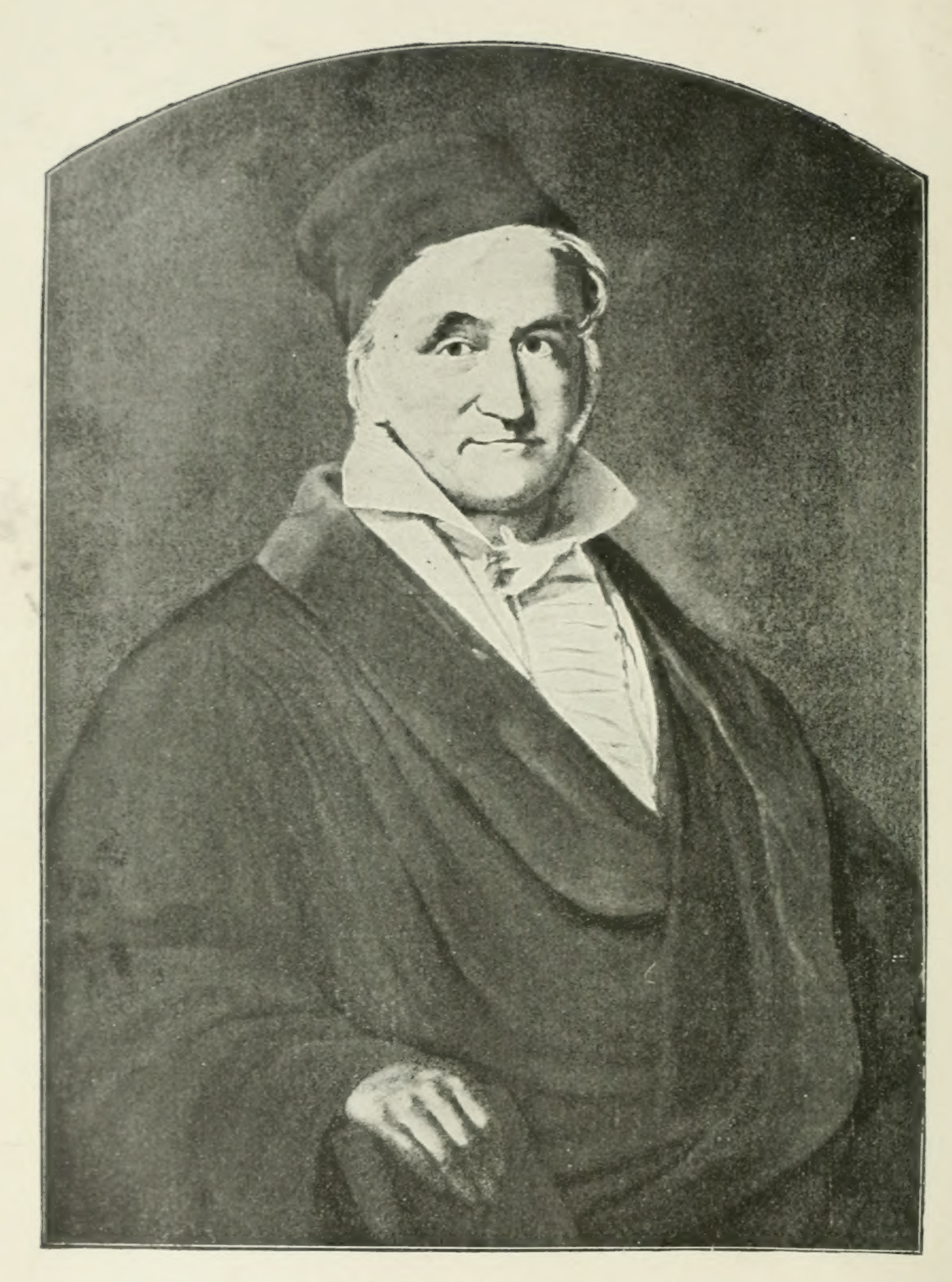


Erster Band

Elemente der Ausgleichungsrechnung







Karl Friedrich Gauß.

Geboren am 30. April 1777 in Braunschweig,
gestorben am 23. Februar 1855 in Göttingen.

Theoria motus corporum coelestium, 1809.

Theorie und Praxis

der

Ausgleichungsrechnung

Von

Ing. Siegmund Wellisch

Bauinspektor der Stadt Wien

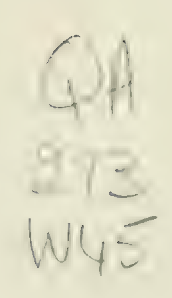
Erster Band

Elemente der Ausgleichungsrechnung

Mit einem Bildnisse von K. F. Gauß.



WIEN und LEIPZIG 1909. Kaiserl. und königl. Hof-Buchdruckerei und Hof-Verlags-Buchhandlung CARL FROMME



Verlags-Archiv Nr. 1172.

Vorwort.

Seit Karl Friedrich Gauß vor hundert Jahren in seiner „Theoria motus“ die „Methode der kleinsten Quadrate“ zum ersten Male der Öffentlichkeit übergeben hat, erfreut sich die hierüber neu entstandene Literatur einer ganz besonderen Pflege. Wohl an tausend Abhandlungen sind seither erschienen, und nicht gering ist die Zahl der Lehrbücher, die sich ausschließlich mit der methodischen Ausgleichungsrechnung befassen. Erst in jüngster Zeit sind über diesen Gegenstand einige hervorragende Werke entstanden, welche die Fehlertheorie und ihre Anwendung in einer Vollständigkeit behandeln, die wohl kaum den Wunsch nach einer Ergänzung übrig zu lassen scheinen.

Wenn ich mich dennoch anschicke, mit dieser anspruchslosen Arbeit hervorzutreten, so glaube ich einen Anlaß hiezu darin erblicken zu können, daß hier einige Punkte der Theorie eine wesentliche Ausbildung erfahren haben und auch die Rechnungsmethoden in mancher Richtung vereinfacht und ausgestaltet erscheinen, wodurch zu hoffen steht, daß diese Darstellungen, indem sie ein helleres Licht über den großen Reichtum der Theorie der Beobachtungsfehler zu verbreiten versprechen, einer gewissen Beachtung nicht unwert befunden werden. Obwohl manche Anwendungsfälle anzuführen wären, die im Unterrichte wie in der Praxis mir förderlich scheinen, wie auch einige von der Schablone heraustretende Entwicklungen, Ableitungen und Erklärungen, so sei dennoch von der Aufzählung aller dieser Neuerungen Umgang genommen, da Auszüge hierüber zu bringen hier gewiß nicht der Ort sein kann.

Nur andeutungsweise sei erwähnt, daß hier der mittlere Fehler zu einem Fehlermaß erhoben erscheint, welchem unter allen möglichen Fehlerwerten die größte mathematische Erwartung zukommt, und daß für den wahrscheinlichen Fehler eine Formel abgeleitet wird, welche dieses bisher nur auf Grund von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen definierbare Fehlermaß direkt aus den Beobachtungs-

fehlern mit großer Annäherung zu berechnen gestattet. Das Fehlerübertragungsgesetz, der wichtigste Satz der methodischen Ausgleichungsrechnung, wird in eingehender Weise theoretisch durchleuchtet; die Darstellung der charakteristischen Fehlermaße als Funktionen der scheinbaren Beobachtungsfehler und der Beobachtungsdifferenzen erfährt — der Bedeutung des Problems entsprechend — eine ausführliche Behandlung; neu ist auch die Einführung des maximalen mittleren Fehlers und der neutralen, widerspruchsfreien Fehlermaße. Dem Abschnitt über die Beobachtungen ungleicher Genauigkeiten, worin auch der Begriff des „Gesamtgewichtes" aufgenommen erscheint, wurde eine größere Aufmerksamkeit gewidmet und demgemäß auch ein breiterer Raum zur Verfügung gestellt, als dies sonst üblich ist. Hier dürfte der Beweis für die Reduktion der ungleich genauen Beobachtungen auf gleich genaue Beobachtungen durch Multiplikation mit den Gewichtswurzeln, sowie das neu aufgestellte Kriterium zur Ausscheidung zweifelhafter Beobachtungen von besonderem Interesse sein. In dem Abschnitte, der sich mit den kleinsten Fehlerquadratsummen beschäftigt, war ich besonders bestrebt, meine in der langjährigen Praxis gewonnenen Erfahrungen in leicht verständlichem Vortrage niederzulegen. Praktische Neuerungen und leicht faßliche Begründungen, z. B. die bequeme Formel für den mittleren Fehler der ausgeglichenen Beobachtungen, der kurze Beweis für die Verminderung des mittleren Fehlers der ursprünglichen Beobachtungen durch den Ausgleichungsprozeß usw., lassen hoffen, daß der Studierende wie der Praktiker, vielleicht auch der Forscher, aus diesem Buche einigen Nutzen ziehen dürften.

Was die formale Seite dieser Vorlesungen betrifft, so sei in bezug auf die, wie ich glaube, praktische und übersichtliche Einteilung des Stoffes auf das Inhaltsverzeichnis hingewiesen, wonach der vorliegende, die „Elemente der Ausgleichungsrechnung" behandelnde erste Band die Grundprobleme der Fehlertheorie und die darauf gegründete Methode der kleinsten Quadrate mit Berücksichtigung aller Wissenszweige der messenden Disziplinen umfaßt. Dieser Band bildet für sich ein abgeschlossenes Ganzes und kann daher von der Verlagsbuchhandlung auch ohne den zweiten Band, welcher die hauptsächlich für den ausübenden Vermessungstechniker bestimmten höheren „Probleme der Ausgleichungsrechnung" behandelt, abgegeben werden.

Im Texte erscheint den Literaturnachweisungen durch die Anführung der Autorennamen nebst den Jahreszahlen des Erscheinens der bezüglichen Schriften Rechnung getragen, welche Angaben wohl

in den meisten Fällen hinreichen dürften, um die ausführlichen Titel der zitierten Druckschriften mit Hilfe der von E. Czuber im Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung, VII. Band, 2. Heft, Leipzig 1899 gebrachten Übersicht der reichhaltigen Literatur auffinden zu können. Jüngere Schriften oder solche, von denen nähere Angaben erwünscht sind, erscheinen besonders angeführt.

Meinen Freunden, den Herren Oberst im Technischen Militärkomitee J. Kozák und Professor A. Cappilleri, die mich bei der Durchsicht der Druckbogen freundlichst unterstützten, sei auch an dieser Stelle der beste Dank zum Ausdruck gebracht.

Desgleichen bin ich auch der k. u. k. Hof-Buchdruckerei und Hof-Verlags-Buchhandlung Carl Fromme in Wien für die Beistellung des nach einem Ölgemälde im Welfenmuseum zu Hannover hergestellten Bildnisses von Gauß und für die ausnehmende Zuvorkommenheit, mit welcher sie allen die Drucklegung und Ausstattung dieses Werkes betreffenden Wünschen entgegenkam, zu Dank verpflichtet.

Wien, im Frühjahr 1909.

Der Verfasser.



Inhalt des ersten Bandes.

Elemente der Ausgleichungsrechnung.

II. Abschnitt.

Theorie der scheinbaren Beobachtungsfehler.

A. Die empirischen Fehlermaße.

B. Ungleiche Genauigkeiten.

III. Abschnitt.

Theorie der kleinsten Fehlerquadratsummen.

A. Vermittelnde Beobachtungen.

B. Bedingte Beobachtungen.

Anhang.



Einleitung.

§ 1. Der Beobachtungsfehler.

Die Bestimmung einer Größe durch Beobachtung oder Messung kann selbst bei Anwendung der größten Sorgfalt und Umsicht niemals mit absoluter Gewißheit den wahren Wert der zu suchenden Größe liefern, weil den Beobachtungen immer Fehler anhaften, die von der Unvollkommenheit der menschlichen Sinne, der Mangelhaftigkeit der zur Anwendung gelangenden Beobachtungswerkzeuge und dem Einflusse anderer, äußerer Ursachen herrühren, als welche die bei der Messung herrschenden Nebenumstände zu bezeichnen sind. Der in dem Messungsresultate verbleibende Fehler kann bei dem heutigen Stande der Vermessungspraxis aber stets auf ein so geringes Maß herabgedrückt werden, daß das Messungsresultat für bestimmte Zwecke immerhin brauchbar bleibt.

Die Beschränktheit der menschlichen Sinneswahrnehmungen liegt in der unvollkommenen Beschaffenheit unserer Sinnesorgane begründet: Das Auge, von den besten Mitteln der Optik unterstützt, kann das absolute Zusammenfallen zweier zur Deckung zu bringender Punkte, deren Bilder innerhalb eines Netzhautstäbchens zu liegen kommen, nur bis zu einer gewissen Grenze verbürgen, während es die innerhalb dieser Grenze sich erstreckenden Maßunterschiede nicht mehr zu erkennen imstande ist; auch das Ohr vermag die Koinzidenz zweier Töne, z. B. zweier Uhrschläge mit voller Sicherheit nicht zu beurteilen, wie auch die Hand nicht fähig ist, bei Registrierungen zweier Ereignisse mit absoluter Gleichzeitigkeit zu funktionieren. Die zu den feinsten Messungen und schärfsten Beobachtungen dienenden Meßinstrumente zeigen, als ein Werk aus Menschenhand, ebenfalls einzelne, wenn auch nicht deutlich in die Augen fallende Mängel, die ganz zu beseitigen der Mechaniker wie der Beobachter nicht imstande ist. Auch wird eine gewisse Mangelhaftigkeit in der Handhabung der Meßgeräte, obwohl sie durch Übung

und Erfahrung auf ein Minimum herabgesetzt werden kann, immer vorhanden bleiben. So wird beispielsweise die Unsicherheit beim Anlegen der Meßlatten oder beim Aufstellen des Theodolits, oder das Mitschleppen der Limbusscheibe beim Drehen der Alhidade selbst bei der größten Fertigkeit des Geometers und bei seiner noch so großen Vertrautheit mit den Eigenheiten seiner Meßrequisiten sich niemals ganz vermeiden lassen. Äußere Ursachen, welche die Güte einer Messung beeinträchtigen, sind das Einwirken der Witterung auf den Beobachter und dessen Instrumente, die Temperaturschwankungen der Atmosphäre, die Vibration, Refraktion und Trübung der Luft, die Beleuchtungsverhältnisse, Terrain- und Visurhindernisse usw.

Alle diese und andere Fehlerquellen wirken zusammen auf das Messungsergebnis ungünstig ein und erzeugen den sogenannten Beobachtungsfehler, der seiner heterogenen Zusammensetzung wegen in verschiedenem Maße und verschiedenem Sinne das Meßergebnis beeinflußt. Je nachdem diese Einflußnahme in regelmäßiger oder in unregelmäßiger Weise erfolgt, unterscheidet man regelmäßige und unregelmäßige Beobachtungsfehler; je nachdem dieselben der Ermittlung auf mechanischem oder rechnerischem Wege zugänglich oder unzugänglich erscheinen, teilt man sie in vermeidliche und unvermeidliche Beobachtungsfehler ein.

Die vermeidlichen Fehler können regelmäßig und unregelmäßig auftreten, die unvermeidlichen Fehler aber tragen immer den Charakter der Unregelmäßigkeit an sich.

Jene Gattung von vermeidlichen Fehlern, welche unregelmäßig auftreten, indem sie jeden beliebigen Betrag und beliebig jedes der beiden Vorzeichen plus und minus annehmen können, sind die sogenannten groben Fehler oder Irrungen. Sie entstehen durch Verschauen bei Ablesungen an Teilungen, durch Verzählen um ganze Einheiten, überhaupt durch Unachtsamkeit, Fahrlässigkeit, Vergeßlichkeit oder Nachlässigkeit in der Handhabung der Hilfsmittel. Gewöhnlich treten sie in solcher Größe auf, daß sie leicht zu erkennen und durch Nachmessung zu berichtigen sind. Hat man z. B. bei einer wiederholten Längenmessung mit 4 *m* langen Latten die Resultate 232·16 *m* und 236·16 *m* erhalten, so obwaltet gar kein Zweifel, daß ein grober Fehler um eine ganze Lattenlänge vorgekommen ist; oder mißt man mit einem Winkelmeßinstrumente, welches die Angabe der Winkel bis auf 10 Bogensekunden verbürgt, alle drei Winkel eines ebenen Dreieckes, und ergeben die drei Resultate die Summe $179^0\ 59'$ anstatt der theoretischen Winkelsumme von $180^0\ 00'$, so ist ganz bestimmt ein grober Irrtum um $1'$ unterlaufen, der durch Wiederholung

der Messung unschwer behoben werden kann. Die Rangierung eines begangenen Fehlers in die Kategorie der groben Fehler hängt von der Präzision des zur Anwendung gebrachten Instrumentes ab und demgemäß ist der Begriff des groben Fehlers nur relativ aufzufassen, denn was z. B. bei Anwendung eines Mikroskoptheodolits noch als ein grober Fehler zu bezeichnen ist, wird bei Benutzung eines Nonientheodolits im allgemeinen nicht mehr als ein solcher zu behandeln sein. Ein grober Fehler muß daher nicht notwendig auch ein großer Fehler sein, er kann auch in einer solchen Kleinheit auftreten, daß er durch die vorgesehenen Kontrollarbeiten, welche in einer wiederholten Messung oder in einer Vergleichung mit dem theoretischen Sollbetrage besteht, gar nicht aufgedeckt und als solcher erkannt werden kann. Eine Gefahr für die Entstellung eines Beobachtungsresultates birgt sohin nur ein kleiner grober Fehler, weil er in seiner Unauffälligkeit unentdeckt in dem Resultate verborgen bleibt. Ist er aber größer, als bei einer besonderen Messungsoperation zu erwarten steht, so kann er durch entsprechende Kontrollen leicht erkannt und beseitigt werden. Im allgemeinen lassen sich also grobe Fehler bei gehöriger Sorgfalt und Aufmerksamkeit vermeiden.

Jene Gattung von vermeidlichen Fehlern, welche durch die besonderen Eigenheiten des zur Beobachtung gebrauchten Instrumentes, durch individuelle Eigenarten und Gewohnheiten des Beobachters oder auch durch gesetzmäßig wirkende äußere Zustände (Temperatur, Luftdruck usw.) hervorgerufen werden und demgemäß unter denselben mathematisch feststellbaren Umständen in regelmäßiger Weise zur Wirkung kommen, heißen k o n s t a n t e oder s y s t e m a t i s c h e Fehler. Sie treten in einer Reihe von Beobachtungen unter denselben theoretisch angebbaren Umständen immer in gleicher Größe und in gleichem Sinne auf und sind daher einer bestimmten, der mechanischen oder rechnerischen Ermittlung zugänglichen Gesetzmäßigkeit unterworfen. Durch V e r g l e i c h u n g der einzelnen Messungen oder Beobachtungen können sie aber nicht aufgedeckt werden, so daß Messungen, welche mit konstanten Fehlern behaftet sind, oft eine sehr große Übereinstimmung zeigen, welche einen hohen Grad von Genauigkeit vorzutäuschen imstande ist.

Zu diesen Fehlern gehören vor allem die Instrumentalfehler wie solche z. B. bei einem ungeeichten Maßstabe oder bei einem nicht rektifizierten Theodolite vorkommen. In der Instrumentenkunde und Geodäsie wird gezeigt, wie die konstanten oder systematischen Fehler durch fehlereliminierende Verfahrungsweisen unschädlich gemacht oder wie sie direkt ermittelt und in Rechnung gestellt werden

können. So werden beispielsweise bei der Messung von Horizontalwinkeln in einem Satze durch das Durchschlagen des Fernrohres und Ablesen in beiden Kreislagen, sowie an diametralen Ablesevorrichtungen der Kollimationsfehler, der Fernrohrachsenfehler und der Exzentrizitätsfehler beseitigt. — Wurde eine Strecke, deren wahre Länge L_0 ist, mit einem bei einer bestimmten Temperatur von t^0 per Längeneinheit um ΔL zu langen Maßstabe gemessen und hiebei L als Resultat erhalten, so beträgt der systematische Fehler der Längenmessung $= L . \Delta L$ und die richtige Länge der Strecke ist $L_0 = L(1 + \Delta L)$. Wurde die Messung ein andermal bei einer Temperatur von T^0 vorgenommen und hiebei als Messungsresultat L_1 gefunden, so beträgt, wenn α den Ausdehnungskoeffizienten des Maßstabmateriales und $\Delta T = T - t$ bedeutet, die richtige Länge: $L_0 = L_1 (1 + \Delta L)(1 + \alpha . \Delta T)$. Der systematische Fehler ist sohin wie in diesem Beispiele so auch im allgemeinen der Größe und dem Sinne nach unzweifelhaft bestimmbar.

Die unvermeidlichen Beobachtungsfehler, für deren Entstehungsursachen nur Vermutungen, aber keine apodiktischen Erklärungen in mathematischer Sprache abgegeben werden können, treten bei den einzelnen Beobachtungen sowohl ihrer Größe als auch ihrem Vorzeichen nach unter gleichen oder verschiedenen Umständen unregelmäßig auf. Der einzelne Fehler scheint keinem Gesetze zu gehorchen, er läßt sich nicht durch Rechnung finden und darum auch nicht auf mechanischem Wege eliminieren. Dagegen sind die unter denselben Umständen wiederholt gefundenen Beobachtungsfehler der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der sogenannten Theorie des Zufalls, unterworfen und werden daher auch zufällige Fehler genannt.

Zu den Ursachen der zufälligen Fehler zählen die aus der Unvollkommenheit der menschlichen Sinne entstehenden Abweichungen, die Visierfehler des Fernrohres und die Ablesefehler an den Kreisteilungen, soweit sie nicht in die Kategorie der groben Fehler fallen, sondern nur in der Unsicherheit im Einstellen und Absehen begründet sind. Es werden ferner hinzugezählt die nach erfolgter Rektifikation in den Instrumenten etwa noch zurückbleibenden unvermeidlichen Reste der Instrumentalfehler, die durch Windstöße, Bodenbewegungen oder sonstige Erschütterungen aus Mangel an absoluter Festigkeit der Stative bewirkten Verrückungen, die durch das Zittern der Luft verursachte Unruhe der Bilder, die Folgen der elastischen Nachwirkung beim Gebrauche elastischer Federn, die Ungleichmäßigkeit in der Ausdehnung einzelner Instrumentenbestandteile durch einseitige Sonnenbestrahlung, der Einfluß ungleicher Beleuchtung der anzuvisierenden Objekte, die veränderliche Aufmerksamkeit des Beobachters usw.

Das charakteristische Merkmal der zufälligen Fehler ist die Eigenschaft, daß sie bei wiederholt angestellten, unter gleichen Umständen ausgeführten Beobachtungen in verschiedener Größe und gleich wahrscheinlich mit dem einen oder dem anderen Vorzeichen versehen auftreten.

Es ist die erste Aufgabe eines Beobachters, nicht nur die groben Fehler zu vermeiden, was bei gehöriger Sorgfalt und Übung immer leicht möglich sein wird, sondern auch das Entstehen systematischer Fehler durch zweckmäßige Anstellung der Beobachtungen zu verhindern oder, wo dies nicht von vornherein angeht, deren besonderen Einfluß auf die einzelnen Beobachtungsergebnisse durch theoretische Untersuchungen festzustellen und in Rechnung zu ziehen oder durch geeignete Meßmethoden zu eliminieren, um auf diese Weise nachträglich ein Ergebnis zu erzielen, welches auch von systematischen Fehlern völlig befreit erscheint. Wird es daher einerseits immer erreichbar sein, die Beobachtungsdaten so verbessernd umzugestalten, daß man sich berechtigt halten kann, sie mit vermeidlichen Fehlern überhaupt nicht mehr behaftet anzusehen, so wird es anderseits niemals gelingen können, die Beobachtungen — wie schon der Name sagt — von den unvermeidlichen Fehlern zu befreien, sondern man wird vielmehr diese Gattung von Fehlern, welchen durch besondere Untersuchungen nicht beizukommen ist, in den Beobachtungen zu dulden genötigt sein, so weit diese eben trotz entsprechender Wahl der Instrumente, trotz Abwarten der günstigsten Beobachtungsumstände und Anwendung der peinlichsten Sorgfalt in den Beobachtungen immer noch zurückbleiben.

Die störenden Einflüsse der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf die Beobachtung selbst oder auf das aus den Beobachtungen abgeleitete Resultat durch Anbringung kleiner Änderungen an den Originalbeobachtungsdaten auf ein geringstes Maß herabzumindern, wird das „Ausgleichen" der Beobachtungen genannt. Der Inbegriff aller hiebei anzuwendenden Rechnungsoperationen heißt die „Ausgleichungsrechnung". Den Gegenstand der der Ausgleichungsrechnung zugrunde liegenden Fehlertheorie bilden nur die unvermeidlichen oder zufälligen Beobachtungsfehler, so daß alle Beobachtungsdaten, welche einer Ausgleichung unterzogen werden sollen, vorerst von den vermeidlichen Fehlern befreit sein müssen. Es wird daher in der Folge angenommen, daß alle Messungsdaten, welche einer Ausgleichung unterworfen werden, von allen groben und konstanten Fehlern bereits befreit worden sind.

§ 2. Der wahre Wert einer Beobachtung.

Eine Beobachtung wird für gut gehalten, wenn deren Fehler innerhalb der bei jeder Beobachtungsart bestehenden Grenze des noch deutlich Unterscheidbaren gelegen ist, weshalb auch alle Fehler, welche innerhalb des kleinsten noch konstatierbaren Intervalls fallen, praktisch als gleich groß angenommen werden. Wird z. B. mit einem in ganzen Millimetern eingeteilten Maßstabe eine Strecke doppelt gemessen, wobei die Zehntelmillimeter noch durch Schätzung erhalten werden, und lauten beide Messungsresultate $l_1 = l_2 = 4{\cdot}0005\, m$, so hält man beide Messungen mit gleich großen Messungsfehlern behaftet, also für gleich gut, obgleich zugegeben werden muß, daß sich beide Resultate, daher auch beide Fehler um Bruchteile von Zehntelmillimetern hätten voneinander verschieden ergeben können, wenn man die Ablesungsgenauigkeit gesteigert hätte. Diese Differenz kann aber nicht konstatiert werden, weil sie eben kleiner ist als das letzte noch deutlich wahrnehmbare Intervall eines Zehntelmillimeters. Bezeichnet man die Messungsgrenze mit α, wobei im vorliegenden Beispiele $\alpha = 0{\cdot}0001\, m$ ist, so ist es einleuchtend, daß die Messungsresultate um $\frac{\alpha}{2}$ zu groß oder zu klein angegeben sein können. Bei jeder Gattung von Beobachtungen werden daher nur Fehler im konstatierbaren Betrage von einem Vielfachen des letzten, durch Schätzung bestimmbaren Maßstabintervalls α aufzuweisen sein. Handelt es sich um Winkelmessungen mit einem die einzelnen Sekunden noch angebbaren Instrumente, so werden die konstatierbaren Fehlerbeträge eine Reihe von ganzen Sekunden (ohne die Zwischenwerte) bilden, weil Winkelabweichungen unter einer Sekunde nicht mehr wahrgenommen werden. Ließe das Winkelmeßinstrument deutlich noch die Hundertel einer Sekunde unterscheiden, so würden alle möglichen Beobachtungsfehler eine Wertereihe von Hundertelsekunden ergeben, nämlich

$$0''00,\ \pm 0''01,\ \pm 0''02,\ \pm 0''03,\ \pm 0''04\ \ldots \text{ usw.},$$

während alle denkbaren Zwischenwerte nicht vorkommen werden, indem alle Beobachtungsresultate unbewußt auf die kleinste, deutlich noch erhaltbare Dezimalstelle abgerundet werden. So wird man im Falle der obigen Wertereihe alle Fehlerbeträge zwischen den Grenzen 0·0350 und 0·0449, da sie voneinander nicht unterschieden und daher einander gleich gehalten werden, durch den abgerundeten Wert 0·04 auszudrücken haben. Faßt man aber den Beobachtungsvorgang in seiner idealen Vollkommenheit auf, so wird der unbestimmte Beob-

achtungsfehler als eine stetig veränderliche Größe zu betrachten sein, welche alle möglichen, zwischen bestimmten Grenzen liegenden Werte annehmen kann, während die Messungsgrenze α in das Differentiale der Fehlergröße übergeht.

Ist aber eine Beobachtung noch so genau, den wahren Wert der zu suchenden Größe gibt sie doch nicht an. Der Natur der Sache nach kann die Angabe des wahren Wertes nur innerhalb der Grenzen des Wahrnehmungsvermögens erfolgen, absolut genommen erscheint aber die wahre Größe einer Unbekannten bei der beschränkten Schärfe unserer Sinnesorgane und unserer Beobachtungsmittel niemals bestimmbar. Bezeichnet man den nach einer bestimmten Methode aus einer Reihe von Beobachtungen abgeleiteten plausibelsten Wert einer unbekannten Größe als ihren „Mittelwert", so kann nach Pizzetti (1892) der wahre Wert der Unbekannten als die Grenze definiert werden, welcher sich der aus einer beständig wachsenden Zahl von Beobachtungen gezogene Mittelwert allmählich nähert, vorausgesetzt, daß die Beobachtungen keinen konstanten, einseitig wirkenden Fehlerursachen ausgesetzt sind.

Da der wahre Wert einer Größe wie ein in der Unendlichkeit zu suchendes Vorbild niemals erlangt werden kann, wird man als Ersatz hiefür den wahrscheinlichsten Wert der Größe zu ermitteln bestrebt sein, welcher mit Hinweis auf die Definition des wahren Wertes die Eigenschaft besitzen muß, daß er sich um so mehr dem wahren Werte als Grenze nähere, in je größerer Anzahl die zu seiner Bestimmung dienenden Beobachtungen ausgeführt werden, oder der analytische Ausdruck für den wahrscheinlichsten Wert muß so konstruiert sein, daß seine Abweichung vom wahren Werte oder sein Fehler bei beständig wachsender Anzahl von Beobachtungen der Null als Grenze sich nähere. Der wahrscheinlichste Wert einer durch Beobachtung zu bestimmenden Größe kann aber dahin definiert werden, daß er derjenige Wert ist, welcher den Beobachtungen Korrektionen auferlegt, für deren Berechtigung die größte Wahrscheinlichkeit besteht. Dieser zuerst von Daniel Bernoulli (1778) mitgeteilte Gedanke, welchen Karl Friedrich Gauß (1809) zum Prinzip erhob, bildet die erste Grundlage der methodischen Ausgleichungsrechnung.

§ 3. Zweck der Ausgleichungsrechnung.

Wenn zur Ermittlung einer Unbekannten oder zur Lösung einer Aufgabe mit mehreren Unbekannten nur die unumgänglich notwen-

digen Beobachtungen oder Messungen angestellt werden; wenn z. B. zur Bestimmung der Länge einer Strecke nur die einzige unentbehrliche Längenmessung gemacht wird, oder zur Flächenbestimmung eines Kreises nur der Radius allein gemessen wird, oder wenn zur Auflösung eines Dreieckes nur eine Seite und zwei Winkel gemessen werden, so wird man niemals auf etwa begangene Fehler stoßen, weder auf vermeidliche noch auf unvermeidliche, weil diese Messungsergebnisse allein kein Mittel darbieten, um über die Richtigkeit der Messungsdaten einen Aufschluß zu geben. Wenn aber mehr Beobachtungen angestellt werden, als zur Lösung einer bestimmten Aufgabe unumgänglich notwendig sind, so wird die Möglichkeit geboten sein, durch Vergleichungen das Vorhandensein von Widersprüchen oder Fehlern, deren Ursachen in den Beobachtungsfehlern zu suchen sind, wahrzunehmen und hiebei nicht nur die vermeidlichen Fehler in gewissem Grade zu beseitigen, sondern auch die Sicherheit der erzielten Resultate zu beurteilen.

Fügt man nämlich den unbedingt erforderlichen Beobachtungen überzählige oder überschüssige Beobachtungen hinzu, so werden infolge der zufälligen Beobachtungsfehler in den überschüssigen Messungen selbst oder, falls sie einer direkten Vergleichung nicht zugänglich sind, in den daraus abgeleiteten Größen Widersprüche auftreten, welche die Erlangung eines eindeutigen oder einziglautenden Resultates unmöglich machen. Hat man in dem ersten der obigen Beispiele für eine und dieselbe Größe durch direkte wiederholte Messungen mehrere voneinander verschiedene, also einander widersprechende Ergebnisse erhalten, die nur noch mit zufälligen Fehlern behaftet erscheinen, so werden sie — dem Begriffe des zufälligen Beobachtungsfehlers entsprechend — ihren wahren Wert in der Regel einschließen müssen, ohne daß man jemals mit apodiktischer Gewißheit wird angeben können, wie weit das eine oder das andere Meßergebnis der unerreichbaren Wahrheit nahekommt. Bei der Unmöglichkeit, den absolut fehlerfreien, wahren Wert der Unbekannten zu ermitteln, wird man sich daher begnügen müssen, aus den fehlerhaften aber überschüssigen Messungen den wahrscheinlichsten oder vorteilhaftesten Wert der Unbekannten abzuleiten. Damit aber jede einzelne Messung dasselbe wahrscheinlichste Resultat ergebe, ist es nötig, daß an den Messungen „Korrekturen" oder „Verbesserungen" vorgenommen werden, welche es bewirken, daß die ursprünglich vorhandenen Widersprüche zu bestehen aufhören. „Diese Notwendigkeit," sagt Gerling (1843), „wird uns nicht etwa von der Mathematik, sondern von der allgemeinen Logik auferlegt, welche uns nicht gestattet, irgend

etwas für wahr anzunehmen, was Widersprüche enthält oder auf Widersprüche führt."

Hat man in dem zweiten Beispiele außer dem Radius r auch den Kreisumfang u gemessen, so wird man die Kreisfläche f entweder aus dem Radius nach der Formel $f_1 = r^2\pi$ oder aus dem Umfange nach der Formel $f_2 = \frac{u^2}{4\pi}$ berechnen können; aber wenn die Messungen r und u fehlerhaft sind, so werden beide Resultate f_1 und f_2 sich nicht gleichlautend ergeben und es wird ohne Anbringung von Korrekturen die notwendig bestehende Erfüllungsgleichung $u = 2r\pi$ keine Befriedigung finden.

Wurde, um auch noch das dritte Beispiel in Betracht zu ziehen, zur Auflösung eines schiefwinkeligen, ebenen Dreieckes nicht nur eine Seite und zwei Winkel, sondern auch der dritte Winkel und noch eine zweite Seite überschüssig gemessen, so wird die Berechnung der dritten Seite auf verschiedenen Wegen möglich sein; es würde sich aber das gesuchte Element nur dann auf jedem möglichen Wege völlig gleichlautend ergeben, wenn die einzelnen Messungsdaten oder Beobachtungselemente absolut fehlerfrei wären; die Übereinstimmung des berechneten Wertes der Unbekannten würde dann für die Richtigkeit des Resultates eine Bestätigung in sich begreifen. Absolut fehlerlose Messungen lassen sich aber bei aller Sorgfalt und Umsicht nicht erlangen. Würde man daher zur Bestimmung der unbekannten Größe aus den überzähligen Daten gerade nur so viele Elemente auswählen, als hiezu unbedingt erforderlich sind, so würden sich ebenso viele einander widersprechende, von den Beobachtungsfehlern entstellte Resultate ergeben, als Berechnungswege durch geeignete Zusammenstellungen der überschüssigen Messungen eingeschlagen werden können. Wollte man aber die Bestimmung des Resultates nur auf einen der vielen möglichen Berechnungswege stützen, alle übrigen hingegen unbeachtet lassen, so würde nur eine Übereinstimmung des Resultates mit den hiezu ausgewählten Messungen stattfinden, ein Zusammenstimmen mit den übrigen Messungsdaten würde aber nicht zu erreichen sein.

Der Zweck der Ausgleichungsrechnung ist nun ein doppelter: 1. Die Beobachtungen durch Anbringung von kleinen Zuschlägen oder Korrektionen derart zu verändern, daß die daraus abzuleitenden Resultate auf jedem möglichen Wege widerspruchsfrei erhalten werden. 2. den störenden Einfluß der zufälligen Fehler auf ein geringstes Maß einzuschränken, so daß die Fehler in ihrer Gesamtheit am wenigsten ungünstig auf das Endresultat einwirken.

Die erste Hauptaufgabe der Ausgleichungsrechnung besteht sohin darin, alle in überschüssiger Anzahl vorhandenen Beobachtungen so zu kombinieren, daß eindeutige Resultate erhalten werden, welche an den Beobachtungen die Anbringung der geringsten Änderungen erfordern. Eine wichtige Aufgabe der Ausgleichungsrechnung besteht aber auch darin, ein Urteil über die Genauigkeit der Beobachtungen und der aus ihnen abgeleiteten Endresultate bilden zu können.

Daß durch das Zusammenwirken der nur mit zufälligen Beobachtungsfehlern behafteten Beobachtungen ein dem wahren Werte möglichst nahe kommendes, fehlerfreies Ergebnis erzielt werden kann, wird durch die der Ausgleichungsrechnung zugrunde liegende Fehlertheorie nachgewiesen, der wir uns nunmehr zuwenden wollen.

I. Abschnitt.

Theorie der wahren Beobachtungsfehler.

A. Das Fehlergesetz.

§ 4. Der Elementarfehler.

Jeder zufällige Beobachtungsfehler kann bei näherer Betrachtung der bei der Anstellung einer Beobachtung obwaltenden Vorgänge als die algebraische Summe mehrerer aus verschiedenen Quellen entspringender Einzelfehler angesehen werden, welche, zur Entstellung des Beobachtungsresultates zusammenwirkend, sich gegenseitig verstärken oder abschwächen und ausnahmsweise auch ganz aufheben können. Der zufällige Beobachtungsfehler ist demnach als das Resultat der Kombination einer sehr großen Anzahl von unabhängigen Elementarfehlern aufzufassen, von denen jedem einzelnen im Vergleiche zu dem gesamten Beobachtungsfehler nur eine untergeordnete Bedeutung beizumessen ist. Bessel (1838) hat diese Auffassung in einer als Muster dienenden Art mit folgenden Worten zum Ausdruck gebracht:

„Fälle, in welchen nicht viele voneinander unabhängige Ursachen zusammenwirken, um einen Beobachtungsfehler zu erzeugen, sind wahrscheinlich sehr selten: selbst bei sehr einfach erscheinenden Beobachtungsarten können oft zahlreiche Ursachen ihrer Fehler nachgewiesen werden. Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, werde ich annehmen, daß eine Reihe von Entfernungen eines Fixsternes von dem Scheitelpunkte oder Pole mit einem nach Reichenbachscher Art eingerichteten Meridiankreise beobachtet sei und versuchen, die Ursachen der Fehler aufzuzählen, welche sich in der Zusammenstellung ihrer Resultate verraten. Das Instrument muß zuerst auf den Stern eingestellt werden, und diese Einstellung kann aus verschiedenen Ursachen fehlerhaft werden, nämlich 1. weil eine Grenze der Kraft des Fernrohres vorhanden ist, innerhalb welcher seine Richtung will-

kürlich bleibt; 2. weil der Punkt des Bildes des Sternes, den man in die Absehenslinie zu bringen beabsichtigt, innerhalb gewisser Grenzen willkürlich sein kann, welche bei großen und hellen Sternen ohne Zweifel weiter auseinander liegen, als bei kleineren weniger hellen, und woraus hervorgehen kann, daß bei Nacht und bei Tage, oder bei hellerem oder weniger hellem Himmel, verschiedene Punkte gewählt werden; 3. weil der Stern sich selten oder nie ruhig, sondern in zitternder, von dem Mangel des Gleichgewichtes der Luft herrührender Bewegung zeigt, und also eine zwischen den äußersten Grenzen dieser Bewegung liegende Wahl getroffen werden muß. Hiezu gesellen sich Fehlerursachen, welche von der Einstellung des Instrumentes ganz unabhängig sind, z. B. 4. ein Einfluß der Elastizität seines Metalles, welcher, zufälligen äußeren Umständen zufolge, bald diesen, bald jenen Wert erhalten, auch zur Folge haben kann, daß die Richtung des Fernrohres, in dem Augenblicke des Ablesens der Beobachtung, nicht mehr dieselbe ist, welche sie bei seiner Anstellung war; 5. eine Unsicherheit der Angabe des Kreises, welche aus kleinen Ungleichheiten der Entfernungen seiner eigenen Teilstriche und der Teilstriche der Nonien hervorgeht, und welcher sich als veränderlicher Fehler äußert, da gewöhnlich, bei jeder Wiederholung der Beobachtung andere Teilstriche zur Koinzidenz gelangen; 6. die aus der begrenzten Schärfe des optischen Hilfsmittels, wodurch die Ablesungen erlangt werden, hervorgehende Unsicherheit; 7. die aus dem Umstande hervorgehenden Fehler, daß die Schätzung der Angaben der Nonien nur z. B. bis auf die Hälfte des kleinsten Zwischenraumes von 2″, welchen sie angeben, getrieben werden kann, wodurch alle an den vier Nonien dieser Instrumente abgelesenen Beobachtungen sich immer mit einer vollen, einer viertel, halben oder dreiviertel Sekunde, nie aber mit anderen Teilen derselben schließen. Ferner kommen dazu äußere Umstände, z. B. 8. der Einfluß der Körperwärme des Beobachters auf den Kreis oder andere Teile des Apparates; 9. der Einfluß einer im allgemeinen vorhandenen Verschiedenheit der Wärme zwischen dem unteren und dem oberen Rande des Kreises, welcher Spannungen in seinem Metalle und Veränderungen seiner Figur erzeugt. Auch veranlaßt 10. die Voraussetzung, daß die Wasserwage der Alhidade bei jeder Ablesung sich im nicht beeinträchtigten Zustande des Gleichgewichtes befinde, einen zufälligen Fehler; 11. geht ein solcher aus der Annahme hervor, daß das Instrument zwischen zwei miteinander zu vergleichenden Beobachtungen in vollkommen gleichem Zustande geblieben sei, während doch die Bemerkung von Änderungen, welche es in kürzerer oder längerer Zeit erfährt, nicht

selten ist. Mit dem sogenannten Beobachtungsfehler vermischt sich auch 12. der Einfluß, welcher die fehlerhafte Annahme hat, daß der Zustand der Atmosphäre, so wie Barometer und Thermometer ihn angeben, genau der sei, wonach die Größe der jedesmaligen Strahlenbrechung sich richtet, und 13. der Einfluß kleiner Unvollkommenheiten der Reduktionselemente der Beobachtungen. Ich werde vermutlich in dieser Aufzählung von Ursachen, welche zur Erzeugung eines scheinbaren Beobachtungsfehlers zusammenwirken, mehrere übersehen haben, so wie ich der zufälligen Unachtsamkeit in der Ausführung einzelner Momente der Beobachtungen, nicht vorteilhafter oder unruhiger Beleuchtung der Fäden und der Teilstriche, der Einflüsse der Kälte auf das Instrument usw. nicht habe erwähnen wollen. Immer aber wird durch diese Aufzählung von Fehlerursachen der Zweck erreicht, bemerklich zu machen, daß selbst diese einfache Beobachtungsart einen Gesamtfehler zeigen muß, welcher aus zahlreichen Ursachen entsteht, deren jede von den übrigen unabhängig wirkt."

In welcher Weise die Elementarfehler zur Hervorbringung eines zufälligen Beobachtungsfehlers zusammenwirken, läßt sich bei der Unmöglichkeit, diesen mit der unbekannten Natur der Elementarfehler im Zusammenhange stehenden Vorgang in Rechnung zu stellen, ohne Einführung einer Hypothese nicht angeben. Eine mit der Erfahrung in bester Übereinstimmung stehende Annahme ist nun die, daß die den Beobachtungsfehler bildenden Elementarfehler in einer sehr großen Anzahl und in gleicher Größe auftreten und daß ihre Vorzeichen mit gleicher Wahrscheinlichkeit positiv oder negativ ausfallen, also gleich oft vorkommen, denn nur dadurch kann die wichtigste Eigenschaft der zufälligen Beobachtungsfehler — ebensoleicht positiv als negativ zu sein — eine Erklärung finden. Hagen (1837) hat dieser Hypothese folgenden Wortlaut gegeben: „Der Beobachtungsfehler ist die algebraische Summe einer unendlich großen Anzahl elementarer Fehler, die alle gleichen Wert haben und ebenso leicht positiv, wie negativ sein können."

Wird diese Voraussetzung gemacht, so läßt sich auch leicht einsehen, daß die Beobachtungsfehler selbst, welche zwar nicht aus einer unendlichen Anzahl, immerhin aber aus einer großen Reihe von Elementarfehlern zusammengesetzt sind, im allgemeinen verschiedene Größe aufweisen und gleichwahrscheinlich positiv oder negativ vorkommen, denn eine Beobachtung wird sich von dem wahren Resultate um so mehr entfernen, je mehr die einzelnen Fehlerquellen im gleichen Vorzeichensinne zur Wirkung gelangen. Treten die positiven und negativen Elementarfehler in gleicher Anzahl auf, so wird der

Beobachtungsfehler den Wert Null annehmen; je nachdem aber die positiven oder negativen Elementarfehler bei der Bildung des Gesamtfehlers überwiegen, wird derselbe mit einem mehr oder weniger großen numerischen Betrage positiv oder negativ ausfallen.

Ein einfaches Beispiel wird dies deutlicher machen. Angenommen, es seien 6 Elementarfehler von der gleichen absoluten Größe ε vorhanden, so können dieselben je nach der Wahl ihres Vorzeichens folgende sieben Gruppen bilden:

$$\begin{aligned}
+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon &= +6\,\varepsilon \\
+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon-\varepsilon &= +4\,\varepsilon \\
+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon-\varepsilon-\varepsilon &= +2\,\varepsilon \\
+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon-\varepsilon-\varepsilon-\varepsilon &= 0 \\
+\varepsilon+\varepsilon-\varepsilon-\varepsilon-\varepsilon-\varepsilon &= -2\,\varepsilon \\
+\varepsilon-\varepsilon-\varepsilon-\varepsilon-\varepsilon-\varepsilon &= -4\,\varepsilon \\
-\varepsilon-\varepsilon-\varepsilon-\varepsilon-\varepsilon-\varepsilon &= -6\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Hiebei kann die erste und siebente Gruppe nur 1mal, die zweite und sechste Gruppe — entsprechend der allgemeinen Formel für die Anzahl z der Kombinationen in einer Reihe von n Elementen zur r-ten Klasse ohne Wiederholung

$$z = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!},$$

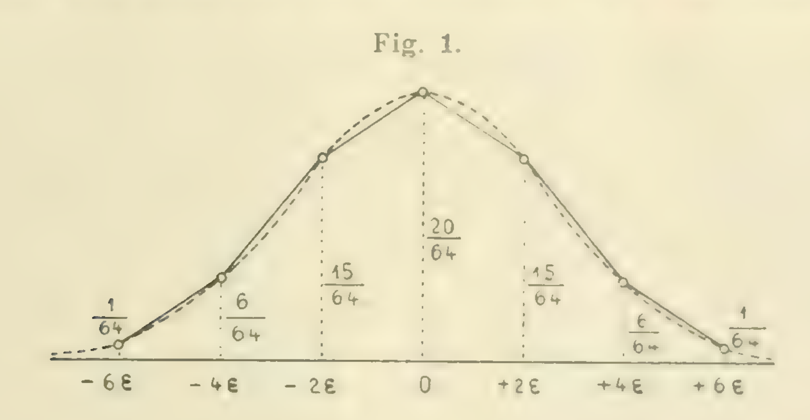
je $\binom{6}{1} = \binom{6}{5} = 6$mal, die dritte und fünfte Gruppe je $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$mal und die vierte Gruppe $\binom{6}{3} = 20$mal eintreten, so daß es im ganzen $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$ mögliche Fälle in der Kombination der 6 Elemente gibt. Da die Wahrscheinlichkeit irgend eines Ereignisses mathematisch ausgedrückt wird durch das Verhältnis der Anzahl der Fälle, die das Ereignis herbeiführen können (günstige Fälle), zu der Anzahl aller möglichen Fälle, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der aus 6 Elementarfehlern gebildete Gesamtfehler der Reihe nach $\pm 6\,\varepsilon$, $\pm 4\,\varepsilon$, $\pm 2\,\varepsilon$ und 0 beträgt, beziehungsweise gleich $\frac{1}{64}$, $\frac{6}{64}$, $\frac{15}{64}$ und $\frac{20}{64}$.

Es ist daraus deutlich zu ersehen, daß gleich große positive und negative Fehler die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen und daß die Wahrscheinlichkeit mit der Zunahme des numerischen Fehlerbetrages abnimmt. In der Fig. 1, worin die Fehlerbeträge als Abszissen und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten als Ordinaten aufgetragen sind, erscheint dieses Ergebnis in anschaulicher Weise zur Darstellung gebracht. Je größer die Anzahl der Elementarfehler angenommen wird,

desto mehr nähert sich der gebrochene Linienzug einer kontinuierlich verlaufenden Kurve, der sogenannten Wahrscheinlichkeitskurve, aus der zu ersehen ist, daß die Wahrscheinlichkeit für den Fehler Null ein Maximum ist und daß mit wachsenden Fehlern die Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergiert, indem die Abszissenachse eine Asymptote der Kurve bildet.

Wird nun eine sehr große Anzahl von Beobachtungen unter gleichen Umständen und mit gleicher Sorgfalt angestellt, so kann man die Behauptung aufstellen, daß hiebei die positiven und negativen Beobachtungsfehler von derselben Größe in der gleichen Anzahl, also gleich häufig oder gleich wahrscheinlich vorkommen werden. Denn wäre dies nicht der Fall, so müßte eine regelmäßig wirkende Ursache, eine systematisch oder konstant wirkende Fehlerquelle vorhanden sein, was jedoch bei Beobachtungen, die einer Ausgleichungs-

Fig. 1.



behandlung unterzogen werden, von vornherein als ausgeschlossen erklärt wurde. Aus der Gruppierung der Einzelfehler zu einem Gesamtfehler ergibt sich ferner, daß durch die verschiedenen Kombinationen der positiven und negativen Elementarfehler numerisch kleinere Beobachtungsfehler häufiger entstehen können als größere, daß demnach die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers mit der Größe seines absoluten Betrages abnimmt. Daraus geht aber auch weiters hervor, daß die Fehlerbeträge theoretisch genommen jeden beliebig großen Wert annehmen können, obwohl sie in der Praxis stets innerhalb gewisser, wenn auch nicht streng angebbarer Grenzen werden bleiben müssen.

Wird beispielsweise eine Linie von 10 *m* Länge mit einem in Millimetern eingeteilten Metermaßstab wiederholt gemessen, so wird man bei gehöriger Aufmerksamkeit und Übung im Messen wohl schwerlich einen Fehler von 1 *dm* begehen, aber es werden um so häufiger Abweichungen von einigen Millimetern vorkommen, ebenso wie bei der

wiederholten Messung eines Winkels Sekundenfehler häufiger als Minutenfehler, und diese wieder häufiger als Abweichungen in den Graden sich einstellen werden. Ist es demnach wahrscheinlicher, einen kleineren als einen größeren Fehler zu begehen, so wird bei jeder besonderen Beobachtungsgattung zwischen der Größe des Fehlers und der Wahrscheinlichkeit seines Vorkommens eine gewisse Beziehung stattfinden müssen, worüber, zusammenfassend, bereits folgendes gesagt werden kann:

1. Gleich große positive und negative Fehler sind gleich wahrscheinlich.

2. Ein kleiner Fehler ist wahrscheinlicher als ein großer.

3. Es ist am wahrscheinlichsten den Fehler Null zu begehen.

4. Einen Fehler außerhalb der praktischen Fehlergrenzen zu begehen ist ausgeschlossen und nur theoretisch möglich.

§ 5. Die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler.

Jedem Fehler von einem bestimmten Betrage kommt eine gewisse Wahrscheinlichkeit zu, denn schon bei der bloßen Betrachtung eines sehr großen und eines sehr kleinen Fehlers erkennt man ohne weitere Untersuchung, daß dem kleineren Fehler eine größere Wahrscheinlichkeit innewohnt als dem größeren, weil ja kleine Fehler, welche der Wahrheit näher liegen, häufiger gemacht werden als größere, und weil Abweichungen von der Wahrheit, die eine gewisse Fehlergrenze überschreiten, überhaupt praktisch nicht eintreten werden.

Es erhebt sich nun die Frage nach der Beziehung, welche zwischen der Größe des Fehlers und der Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers besteht, oder nach welchem Gesetze die Fehlerwahrscheinlichkeit mit dem Fehlerbetrage sich ändert. Um ein Gesetz für die Wahrscheinlichkeit oder für die Häufigkeit des Vorkommens eines gewissen Fehlers aufzustellen, hat man zunächst zu beachten, daß die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers ε jedenfalls von dessen Größe abhängig ist und daher, abgesehen von den auf die besondere Beobachtungsart sich beziehenden Konstanten, als eine Funktion der Fehlergröße selbst zu betrachten sein wird. Man kann dieses Erkenntnis auch so ausdrücken, daß die Wahrscheinlichkeit, bei Anstellung einer Beobachtung einen Fehler zwischen den Grenzen Null und ε zu begehen, als eine Funktion von ε anzusehen ist, welche Funktion durch $v(\varepsilon)$ bezeichnet werden soll. Wird die obere Grenze ε um $\Delta\varepsilon$ erweitert, so hat die Wahrscheinlichkeit, daß der Beobachtungsfehler zwischen 0 und $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ enthalten sei, den Wert $v(\varepsilon + \Delta\varepsilon)$, woraus

hervorgeht, daß die Wahrscheinlichkeit, einen zwischen den sehr engen Grenzen ε und $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ eingeschlossenen Beobachtungsfehler begangen zu haben, durch die Differenz $\psi(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - \psi(\varepsilon)$ ausgedrückt erscheint. Diese Differenz und mit ihr auch die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Fehler ε zu begehen, wird um so kleiner ausfallen, je kleiner $\Delta\varepsilon$ angenommen wird, d. h. je enger die Grenzen ε und $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ zusammengezogen werden. Geht $\Delta\varepsilon$ in das Differentiale $d\varepsilon$ über, faßt man also ε als eine stetige Variable und demgemäß $\psi(\varepsilon)$ als eine stetige Funktion von ε auf, so kann nach den Grundlehren der Differentialrechnung der erste Differentialquotient dieser Funktion $\psi'(\varepsilon)$ als das Maß der Wahrscheinlichkeitsänderung beim Übergang von ε in $\varepsilon + d\varepsilon$ definiert werden, und man kann daher setzen:

$$\frac{\psi(\varepsilon + d\varepsilon) - \psi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \psi'(\varepsilon)$$

oder wenn man $\varphi(\varepsilon)$ anstatt $\psi'(\varepsilon)$ schreibt:

$$\psi(\varepsilon + d\varepsilon) - \psi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon .$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß der begangene Fehler zwischen den Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liege, oder in das Intervall von ε bis $\varepsilon + d\varepsilon$ falle, ist also, da $d\varepsilon$ unendlich klein gedacht ist, selbst unendlich klein und durch $\varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon$ ausgedrückt. Man kann daher auch sagen, $\varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fehler ε begangen wird, mit welcher Definition eigentlich stillschweigend die Vorstellung verknüpft wird, daß alle Fehler innerhalb des Intervalls von ε bis $\varepsilon + d\varepsilon$ als gleich groß angenommen werden, wogegen im Sinne der einleitenden Worte (§ 2) vom Standpunkte des Praktikers gewiß nichts einzuwenden ist. Das Vorkommen des unendlich kleinen Faktors $d\varepsilon$ in dem Wahrscheinlichkeitsausdrucke $\varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon$ findet darin seine Erklärung, daß bei der unendlich großen Anzahl aller möglichen Fehler die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen bestimmten Fehlers unendlich klein sein muß. Wird aber der Beobachtungsfehler zwischen zwei bestimmten Grenzen von endlicher Differenz eingeschlossen, so nimmt auch die entsprechende Wahrscheinlichkeit einen endlichen Wert an. Dieser Wert wird durch Summation der unendlich kleinen Wahrscheinlichkeiten zwischen den gegebenen Grenzen erhalten. Werden diese durch ε_1 und ε_2 bezeichnet, so ist die endliche Wahrscheinlichkeit, daß ein bestimmter Beobachtungsfehler zwischen den Grenzen ε_1 und ε_2 zu liegen komme, im Geiste der Integralrechnung ausgedrückt durch das bestimmte Integral:

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler innerhalb der Grenzen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ falle, oder daß er absolut genommen den Wert ε nicht überschreite, ist demnach analytisch durch das bestimmte Integral

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon$$

dargestellt. Da unter der Voraussetzung, daß keine konstanten Fehlerursachen vorkommen, gleich große positive oder negative Fehler gleich wahrscheinlich sind, so muß die Beziehung bestehen:

$$\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon),$$

d. h. $\varphi(\varepsilon)$ muß eine gerade Funktion von ε sein. Da aber unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeiten von $-\varepsilon$ bis 0 einerseits und von 0 bis $+\varepsilon$ anderseits einander gleich sind, so ist auch:

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon = \int_{-\varepsilon}^{0} \varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon + \int_{0}^{+\varepsilon} \varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon = \int_{0}^{-\varepsilon} \varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon + \int_{0}^{+\varepsilon} \varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon =$$

$$= 2 \int_{0}^{\varepsilon} \varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon.$$

Bezeichnet α den absoluten Betrag des größtmöglichen Fehlers ε oder $\pm\alpha$ die Fehlergrenzen, so muß $\varphi(\pm\alpha)$ ein Minimum sein, während $\varphi(0)$ ein Maximum ist. Da ferner die Wahrscheinlichkeit mit zunehmendem ε abnimmt und mit abnehmendem ε wächst, bis sie für $\varepsilon = 0$ ihr Maximum erreicht, so besteht für $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ die Ungleichung:

$$\varphi(\varepsilon_1) > \varphi(\varepsilon_2).$$

Stellt man daher die Gleichung $\eta = \varphi(\varepsilon)$ als Kurve dar, indem die Fehler ε als Abszissen und die zugehörigen Funktionswerte $\eta = \varphi(\varepsilon)$ als Ordinaten in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem aufgetragen werden, so wird diese Kurve für $\varepsilon = 0$ einen höchsten Punkt aufweisen und zur η-Achse symmetrisch verlaufen, und es wird die Wahrscheinlichkeit $\varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon$ eines Fehlers im Intervall von ε bis $\varepsilon + d\varepsilon$ als ein Flächenelement $PP'QQ'$ von der Höhe $PQ = \varphi(\varepsilon)$ und der Breite $PP' = d\varepsilon$ erscheinen. Man nennt daher diese in Fig. 2 dargestellte Kurve die **allgemeine Fehlerwahrscheinlichkeitskurve**. Die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ aber wird die **Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion** oder das **Fehlergesetz** genannt.

Da in Fig. 2 der Abszissenabschnitt $OP = \varepsilon$ ist, so repräsentiert die Fläche $OPQR$ die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen 0 und ε falle, d. i.

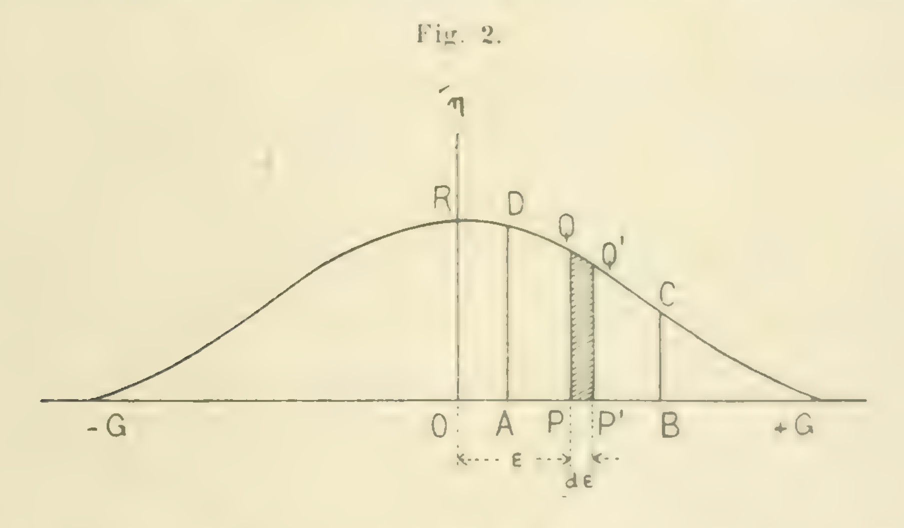
$$v(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon,$$

was auch durch Integration der Gleichung $v'(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)$ hervorgeht. Macht man $OA = a$ und $OB = b$, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen den um ein endliches Intervall getrennten Grenzen a, b gekennzeichnet durch den Inhalt der Fläche

$$ABCD = \int_a^b \varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon.$$

Schneidet die allgemeine Fehlerwahrscheinlichkeitskurve die Abszissenachse in zwei Punkten $-G$ und $+G$, so ist damit graphisch zum Ausdruck gebracht, daß alle möglicherweise auftretenden Fehler

Fig. 2.



zwischen den Grenzen von $-G$ bis $+G$ oder innerhalb des Bereiches von $-G$ bis $+G$ liegen. Da es aber dann gewiß ist, daß der einer Beobachtung zukommende Fehler innerhalb dieser Fehlergrenzen bleiben muß, so kommt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers innerhalb der äußersten Grenzen der Gewißheit gleich, welche durch die Einheit ausgedrückt wird. Die ganze von der Kurve und der Abzissenachse eingeschlossene Fläche entspricht daher ebenfalls der Einheit, welche sohin bei der Versinnlichung der Wahrscheinlichkeit durch Flächen als Flächeneinheit zu dienen hat.

Nun gibt es jedenfalls für alle Beobachtungsarten gewisse Fehlergrenzen, welche von den Fehlern nicht überschritten werden, aber diese Grenzen lassen sich niemals scharf bestimmen. Um daher eine für alle Arten von Beobachtungen geltende Formel für die Gewißheit oder die Wahrscheinlichkeitseinheit aufstellen zu können, wählt man die denkbar äußersten Grenzen, die sich von $-\infty$ bis

$+\infty$ erstrecken, und erhält so die für alle möglichen Fälle passende, unter allen Umständen erfüllbare Beziehung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon = 1.$$

Hat man es mit einer besonderen Beobachtungsart zu tun, deren Fehler den endlichen Betrag von $\pm G$ nicht überschreiten können, so daß die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler außerhalb dieser Grenzen von $-G$ bis $+G$ zu begehen, gleich Null ist, so hat die Ausdehnung der Integrationsgrenzen von $\pm G$ bis $\pm\infty$ auf die Wahrscheinlichkeitsbestimmungen ohnehin keinen Einfluß. Überschreiten aber einzelne Fehler ausnahmsweise die Grenzen $\pm G$, so kann deren Wahrscheinlichkeit nur einen so geringen Wert besitzen, daß er gegenüber der Wahrscheinlichkeit Null als verschwindend zu betrachten ist, weshalb auch vom praktischen Standpunkte gegen die obige Formel für die Gewißheit nichts einzuwenden ist.

§ 6. Der konstante Teil des Fehlers.

Liegt eine endliche Anzahl wahrer Beobachtungsfehler vor, etwa $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen irgend eines solchen Fehlers gleich $\frac{1}{n}$, nämlich dem Verhältnisse des einzigen für das Zustandekommen dieses Fehlers günstigen Falles zu der Anzahl n der überhaupt möglichen Fälle. Die Summe der Produkte eines jeden Fehlers mit seiner Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\varepsilon_1 \frac{1}{n} + \varepsilon_2 \frac{1}{n} + \cdots + \varepsilon_n \frac{1}{n} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n}{n}$$

ist der Durchschnittswert der Fehler oder ihr arithmetisches Mittel. Wächst die Anzahl der Fehler ins Unendliche, so ist das Mittel aller möglichen Fehler gleich dem zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ genommenen Integral aus dem Produkte des Fehlers ε mit seiner Wahrscheinlichkeit $\varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon$, und wenn kein Anlaß vorhanden ist, zwei gleich großen, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen behafteten Fehlern eine verschiedene Häufigkeit beizulegen, so wird entsprechend der Bedingung für zufällige Fehler

$$\varphi(+\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) = 0$$

für diesen Durchschnittswert die Gleichung bestehen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon \, . \, \varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon = 0.$$

Ist aber die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen irgend eines Fehlers $+x$ verschieden von der Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen eines gleich großen, aber entgegengesetzt bezeichneten Fehlers $-x$, also

$$\varphi(+x) - \varphi(-x) = k,$$

so wird die Gleichung bestehen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \,.\, \varphi(x) \,.\, dx = k,$$

wobei k das arithmetische Mittel aller x darstellt. Die Existenz eines von Null verschiedenen k ist als ein Beweis für das Vorhandensein einer **einseitig** wirkenden Fehlerursache anzusehen. Die Größe k, welche eine Asymmetrie in der Verteilung der Fehler hervorruft, wird daher von Gauß (Theoria comb. Art. 5) der **konstante Teil des Fehlers** genannt.

Denkt man sich die Größe k von jeder der Beobachtungen, welchen die Fehler x_1, x_2, x_3, . . . zukommen, subtrahiert, so daß die Beobachtungen nur mehr mit den Fehlern

$$x - k = \varepsilon$$

behaftet erscheinen, so besteht, da die Wahrscheinlichkeit hiedurch keine Änderung erleidet, daher

$$\varphi(x) \,.\, dx = \varphi(\varepsilon) \,.\, d\varepsilon$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \,.\, dx = 1$$

ist, die Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \,.\, \varphi(x) \,.\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} k \,.\, \varphi(x) \,.\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon \,.\, \varphi(\varepsilon) \,.\, d\varepsilon$$

oder

$$k - k = 0,$$

d. h. die Fehler der um den konstanten Anteil verbesserten Beobachtungen tragen den Charakter von rein zufälligen Fehlern an sich.

Weiß man also, daß gewisse Beobachtungsfehler einen konstanten Teil an sich haben, wie dies z. B. bei astronomischen Beobachtungen mit dem sogenannten „persönlichen Fehler" der Fall ist, so wird man eine größere Annäherung an die Wahrheit zu erwarten haben, wenn der konstante Fehlerteil vor der Bestimmung des vorteilhaftesten Mittelwertes von den Beobachtungsfehlern zur Abtrennung gebracht wird.

§ 7. Die Form des Fehlergesetzes.

Von der Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion $\varphi(\varepsilon)$ haben wir bisher die folgenden aus dem Begriffe des zufälligen Fehlers geschlossenen allgemeinen Eigenschaften kennen gelernt:

$$\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$$
$$\varphi(\varepsilon) > \varphi(\varepsilon + d\varepsilon)$$
$$\varphi(0) = max\, \varphi(\varepsilon)$$
$$\varphi(\infty) = 0 = min\, \varphi(\varepsilon).$$

Diese charakteristischen Eigenschaften besitzen aber unendlich viele Funktionen. Um die zweckmäßigste Form der Fehlerfunktion ausfindig zu machen, hätte man zu untersuchen, welche von den vielen Formen mit der Wirklichkeit am besten in Übereinstimmung gebracht werden kann. Zur Erreichung dieses Zieles könnte man den empirischen Weg einschlagen und etwa so verfahren, daß man irgend welche erfahrungsmäßig passende Formen für $\varphi(\varepsilon)$ hypothetisch aufstellt, die aus diesen Funktionsformen abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von Fehlern innerhalb gewisser Grenzen mit den entsprechenden, aus direkt ausgeführten Beobachtungsreihen sich ergebenden Zahlenwerten vergleicht und derjenigen Funktionsform den Vorzug gibt, welche der Erfahrung am vollkommensten zusagt. Hiebei müßten streng genommen unendlich viele Beobachtungen zur Anwendung kommen, aber es würde auch schon bei einer endlichen Anzahl von Beobachtungen eine gute Annäherung an das wahre Fehlerwahrscheinlichkeitsgesetz erreicht werden, die eine um so bessere sein würde, je größer diese Anzahl genommen wird*).

Da man aber auf diese Weise für jede andere Beobachtungsart und Beobachtungsgröße, ja für jeden mit verschiedenen persönlichen Eigenarten ausgestatteten Beobachter und für jedes von ihm verwendete Instrument immer eine andere, den besonderen Bedingungen sich anschmiegende Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion erhalten würde, so hat schon Gauß in der Theoria motus (1809) einen mehr auf wissenschaftlicher Grundlage aufgebauten Weg betreten, ohne auf die großen Vorteile der Erfahrung ganz zu verzichten. Seine erste Begründung des nach ihm benannten Fehlergesetzes stützt sich auf das arithmetische Mittel, dessen Bedeutung schon von Simpson (1755) und Lambert (1760) erkannt und das von Gauß wie ein

*) Über empirische Fehlergesetze siehe: Kozák, Grundprobleme der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Wien. 1908; 2. Band. VII. Abschnitt.

Axiom behandelt wurde, indem er es ohne Beweisführung als den wahrscheinlichsten Wert zwischen allen beobachteten Werten bezeichnet hat. Es schien ihm am natürlichsten, die Funktion, welche die Wahrscheinlichkeit der Fehler darstellt, so anzunehmen, daß für den einfachsten Fall mehrerer unmittelbar erlangter Beobachtungen die Regel von dem arithmetischen Mittel daraus hervorgehe*).

Nun tritt der einfachste Fall für die Bestimmung einer unbekannten Größe durch überschüssige Beobachtungen ein, wenn dieselben durch unmittelbares Messen mit denselben Mitteln, unter denselben Umständen und mit gleicher Sorgfalt wiederholt bestimmt wird, wenn also, wie man sich auszudrücken pflegt, direkte Beobachtungen gleicher Genauigkeit vorliegen.

Hat man zur Bestimmung der unbekannten Größe X überhaupt nur eine Messung angestellt und hiefür l_1 erhalten, so bleibt gar keine Wahl übrig, als den wahrscheinlichsten Wert von X, den wir mit x bezeichnen wollen, da er ja doch mit dem wahren Werte X nicht identisch sein kann, $x = l_1$ zu setzen, denn man hat keine Ursache, an dieser Messung irgend welche Verbesserung anzubringen. Hat man zwei Messungen l_1 und l_2 gemacht und liegt kein Grund vor, einer vor der anderen den Vorzug zu geben, so wird man den wahrscheinlichsten Wert x so ermitteln, daß die Abweichungen desselben von den Beobachtungen einander gleich werden, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen erscheinen, daß also $x - l_1 = l_2 - x$ ist, woraus $x = \frac{l_1 + l_2}{2}$ erhalten wird. Dieses Ergebnis, welches unter den gegebenen Voraussetzungen unbedingt als das vorteilhafteste und zweckmäßigste erklärt werden muß, kann bei dem Umstande, daß eine positive und gleich große negative Abweichung gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen, auch als das wahrscheinlichste angesprochen werden. „Diese Voraussetzung", sagt Encke (1834), „scheint, wenn überhaupt ein Grundsatz nötig ist, unter allen die einfachste zu sein. Sie beruht auf dem Bewußtsein, die möglichste Sorgfalt angewandt zu haben, so daß kein Grund vorhanden ist, anzunehmen, man habe entweder im positiven oder im negativen Sinne gefehlt. Gesetzt aber auch, es komme in einem Sinne ein Fehler vorzugsweise häufig vor, so wird, so lange wir nicht wissen, in welchem Sinne es geschieht, der Wert $\frac{1}{2}(l_1 + l_2)$ der einzige sein, der, bei dieser Ungewißheit, den Fehler

*) Vergl. des Verfassers Schrift: „Theoretische und historische Betrachtungen über die Ausgleichungsrechnung" in der österr. Zeitschr. für Vermessungswesen. Wien, 1907.

des Resultates am kleinsten machen, oder wenigstens wo die Gefahr einer Vergrößerung des Fehlers am sichersten vermieden werden wird."

Hat man für die zu suchende Größe X durch direktes Messen n Werte $l_1, l_2, \ldots l_n$ mit gleicher Genauigkeit erhalten, so daß jede einzelne Messung das gleiche Vertrauen verdient und keiner ein Vorzug vor der anderen eingeräumt werden kann, so bildet das arithmetische Mittel, d. i. die durch die Anzahl der Beobachtungen dividierte Summe derselben:

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n}$$

die vorteilhafteste Verbindung aller Messungen und es wird daher der aus dieser Verbindung hervorgehende Wert als der wahrscheinlichste Mittelwert der Beobachtungsergebnisse erklärt, obwohl ein strenger Beweis hiefür nicht erbracht werden kann. Es lassen sich nur plausible Gründe anführen, welche für die Wahl dieses Mittelwertes sprechen. Sie lauten:

1. Werden alle Beobachtungen um eine beliebige, aber konstante Größe vermehrt oder vermindert, so ändert sich auch das arithmetische Mittel additiv oder subtraktiv um dieselbe Größe, d. h. man kann den Nullpunkt der Messung beliebig verschieben.

2. Werden alle Beobachtungen mit irgend einer konstanten Zahl multipliziert oder dividiert, so erscheint auch das arithmetische Mittel um dieselbe Zahl vervielfältigt beziehungsweise geteilt, d. h. das arithmetische Mittel ist unabhängig von der Maßeinheit, in welcher die Beobachtungen ausgedrückt sind.

3. Die dem arithmetischen Mittel zugrunde liegende Rechenregel liefert immer nur einen einzigen, eindeutig bestimmten Wert.

4. Das arithmetische Mittel liegt zwischen dem kleinsten und größten Beobachtungswert, d. h. es fällt niemals außerhalb des Bereiches der Beobachtungsergebnisse.

Läßt man nun die Annahme gelten, daß das arithmetische Mittel der Beobachtungen der wahrscheinlichste Wert der zu suchenden Unbekannten sei, weil eben kein vorteilhafterer Wert an dessen Stelle gesetzt werden kann, so erfährt das Gaußsche Fehlergesetz folgende Ableitung.

Bezeichnet man die Abweichungen der einzelnen Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots l_n$ von dem arithmetischen Mittel mit $v_1, v_2, \ldots v_n$, so stellen dieselben näherungsweise die Unterschiede zwischen den Beobachtungen und dem wahren Werte der Unbekannten, also die Ver-

besserungen oder die mit umgekehrten Vorzeichen genommenen Beobachtungsfehler*) dar, für welche die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x - l_1 &= v_1 \\
x - l_2 &= v_2 \\
\cdot \quad \cdot \quad &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
x - l_n &= v_n
\end{aligned}
$$

bestehen, welche nach Gauß und Helmert „Fehlergleichungen' oder nach Vogler und Hammer „Verbesserungsgleichungen" genannt werden.

Addiert man diese Gleichungen, so folgt:

$$n x - (l_1 + l_2 + \cdots + l_n) = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

und wenn durch n dividiert wird:

$$x - \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n} = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{n}.$$

Berücksichtigt man, daß $\frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n} = x$ ist, so resultiert die wichtige Beziehung:

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0, \tag{1}$$

d. h. die Summe aller Abweichungen der Beobachtungen vom arithmetischen Mittel ist gleich Null.

Fügt man zu diesen sogenannten übrigbleibenden Fehlern $v_1, v_2, v_3, \ldots$ die man sich in sehr großer Anzahl vorhanden denken mag, das unendlich kleine und konstante Fehlerintervall dv hinzu, welches praktisch als das letzte deutlich noch wahrnehmbare Maßstabintervall (z. B. 0·0001 m) angesehen werden kann, so ist die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit w_1, daß der erste Fehler v_1 in das Intervall von v_1 bis $v_1 + dv$ falle, ausgedrückt durch das Produkt

$$w_1 = \varphi(v_1) \,.\, dv$$

und analog die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der übrigen Fehler.

*) Die „Verbesserung" ist stets gleich dem „Sollbetrag weniger der Beobachtungsgröße", während der „Fehler" der Verbesserung an Größe gleich und nur durch das Vorzeichen davon verschieden ist. Nachdem also über das Vorzeichen der „Fehler" und „Verbesserungen" kein Zweifel obwaltet und, wie schon Gerling (1843) bemerkt, „es wohl ganz gleichgültig ist, ob von Fehlern oder von Verbesserungen die Rede ist, daß aber das erste nun einmal allgemein üblich sei", so möge nach einem Vorschlage Helmerts (1907) auch hier für v und ε die Bezeichnung „Fehler" beibehalten bleiben. (Vergl. F. R. Helmert: Ausgleichungsrechnung, 2. Aufl. Fußnote S. 39 und des Verf. „Theor. u. histor. Betrachtungen über die Ausgleichungsrechnung.)

$$w_2 = \varphi(v_2) \, . \, dv$$
$$w_3 = \varphi(v_3) \, . \, dv$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$w_n = \varphi(v_n) \, . \, dv.$$

Nach den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Wahrscheinlichkeit W, mit welcher alle voneinander unabhängigen Fehler v_1 bis v_n zugleich zu erwarten sind, durch das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten gegeben. Die Gleichung

$$W = \varphi(v_1) \, . \, \varphi(v_2) \, . \, \varphi(v_3) \; . \; . \; . \; \varphi(v_n) \, . \, (dv)^n \tag{2}$$

liefert sohin die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Vorkommen aller Fehler $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ oder die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen aller Abweichungen der n Beobachtungen von dem angenommenen Mittelwerte x.

Bestimmt man diesen Mittelwert nicht nach der Regel des arithmetischen Mittels, sondern wählt man ihn zunächst ganz willkürlich, so wird das Wahrscheinlichkeitsprodukt W entsprechend der Ungleichung

$$\varphi(v) > \varphi(v + dv) \tag{3}$$

einen um so größeren Wert annehmen, je kleiner die Abweichungen v in ihrer Gesamtheit ausfallen. Der wahrscheinlichste Mittelwert wird daher derjenige sein, welchem das Maximum von W entspricht, weil dann dieser Mittelwert die wahrscheinlichste Kombination der Abweichungen v erzeugt und sich daher der Wahrheit am meisten nähert. Nun hat man für die Bedingung des Maximums von W die Gleichung

$$\frac{dW}{dx} = 0,$$

also, da der Faktor $(dv)^n$ konstant ist,

$$\frac{d\varphi(v_1)}{dx} \left\{\varphi(v_2) \, . \, \varphi(v_3) \, . \, . \, . \, \varphi(v_n)\right\} + \frac{d\varphi(v_2)}{dx} \left\{\varphi(v_1) \, . \, \varphi(v_3) \, . \, . \, . \, \varphi(v_n)\right\} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{d\varphi(v_n)}{dx} \left\{\varphi(v_1) \, . \, \varphi(v_2) \ldots \varphi(v_{n-1})\right\} = 0$$

oder mit Rücksicht auf (2):

$$\frac{d\varphi(v_1)}{dx} \, . \, \frac{W}{\varphi(v_1)} + \frac{d\varphi(v_2)}{dx} \, . \, \frac{W}{\varphi(v_2)} + \ldots + \frac{d\varphi(v_n)}{dx} \, . \, \frac{W}{\varphi(v_n)} = 0.$$

Wird durch $\frac{W}{dx}$ gekürzt und durch dv dividiert, so kann man auch schreiben:

$$\frac{d\varphi(v_1)}{dv.\varphi(v_1)} + \frac{d\varphi(v_2)}{dv.\varphi(v_2)} + \ldots + \frac{d\varphi(v_n)}{dv.\varphi(v_n)} = 0,$$

$$\frac{\varphi'(v_1)}{\varphi(v_1)} + \frac{\varphi'(v_2)}{\varphi(v_2)} + \ldots + \frac{\varphi'(v_n)}{\varphi(v_n)} = 0$$

oder auch:

$$\frac{\varphi'(v_1)}{v_1\,\varphi(v_1)}\,v_1 + \frac{\varphi'(v_2)}{v_2\,\varphi(v_2)}\,v_2 + \ldots + \frac{\varphi'(v_n)}{v_n\,\varphi(v_n)}\,v_n = 0 \qquad (4)$$

Wird nun das arithmetische Mittel als Mittelwert gewählt, so haben die v die Bedingung (1) zu erfüllen, und soll das arithmetische Mittel der wahrscheinlichste Mittelwert sein, so muß die Gleichung (4) mit der Bedingungsgleichung (1) übereinstimmen. Es kann aber die Koexistenz dieser beiden Gleichungen nur dann bestehen, wenn die mit einem konstanten Faktor k multiplizierten Glieder der Gleichung (1) identisch sind mit den korrespondierenden Gliedern der Gleichung (4); man hat daher die Relationen:

$$\frac{\varphi'(v_1)}{v_1\,\varphi(v_1)} = \frac{\varphi'(v_2)}{v_2\,\varphi(v_2)} = \ldots = \frac{\varphi'(v_n)}{v_n\,\varphi(v_n)} = k,$$

und allgemein ohne Index:

$$\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} = k\,v,$$

oder, da $\varphi'(v) = \frac{d\varphi(v)}{dv}$ ist,

$$\frac{d\varphi(v)}{\varphi(v)} = k\,v\,.\,dv.$$

Hieraus ergibt sich durch Integration:

$$lg\,\varphi(v) = \frac{1}{2}\,k\,v^2 + lg\,c$$

oder

$$\varphi(v) = c\,e^{\frac{1}{2}k v^2},$$

worin c die Integrationskonstante und $e = 2{,}718281\ldots$ die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Ändert man v um den positiven Zuwachs dv, so besteht mit Rücksicht auf (3) die Ungleichung:

$$c\,e^{\frac{1}{2}k(v+dv)^2} < c\,e^{\frac{1}{2}k v^2},$$

woraus geschlossen werden kann, daß k eine n e g a t i v e Zahl sein muß, denn die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers muß sich mit der Vergrößerung des Fehlerwertes vermindern. Setzt man daher

$$\frac{1}{2} k = -h^2,$$

so erhält man für das Fehlergesetz die Form:

$$\varphi(v) = c\, e^{-h^2 v^2} \qquad (5)$$

Da, wie bereits hervorgehoben wurde, die Widersprüche v nur annähernd die wahren Beobachtungsfehler darstellen, so drückt diese Funktion (5) eigentlich nicht in aller Strenge das Gesetz der Abweichungen der einzelnen Beobachtungen von dem wahren Werte der unbekannten Größe aus, sondern das Gesetz der Abweichungen der einzelnen Beobachtungen von dem arithmetischen Mittel derselben. Diese Funktion stellt also streng genommen nicht das Gesetz der wahren Beobachtungsfehler ε, sondern das Gesetz der scheinbaren Beobachtungsfehler v dar; nichtsdestoweniger betrachtet man es der Form nach dennoch als das wahre Fehlergesetz, weil man zur Kenntnis der wahren Fehler in der Regel doch niemals gelangen kann und an deren Stelle keine der Wahrheit näheren Werte als die scheinbaren Fehler gesetzt werden können. Indessen erscheint diese Annäherung, die schon Gauß in seinem ersten Werke über diesen Gegenstand, in der „Theoria motus corporum coelestium," 1809, sich erlaubt hat, eine um so bessere, je größer die Anzahl der zur Mittelbildung benutzten überschüssigen Beobachtungen genommen wird, und sie wird im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie zur Wirklichkeit, wenn die Anzahl der Beobachtungen außerordentlich groß, geradezu unendlich wird.

Die Praxis kennt aber keine unendliche Anzahl von Beobachtungen, weshalb das Gaußsche Fehlergesetz immer nur als eine den natürlichen Verhältnissen entsprechende Näherungsformel anzusprechen ist. Mit Bezug auf das Gaußsche Fehlergesetz sagt daher Henke (1868): „Diese Art und Weise, zu der allgemein angenommenen Form der Wahrscheinlichkeitstranszendente zu gelangen, ist eine rein empirische Konstruktion. Sie gibt daher nicht etwa einen notwendigen Zusammenhang zwischen den Größen der Fehler und ihren Wahrscheinlichkeiten; ein solcher ist uns vielmehr, wenn er überhaupt existiert, wegen mangelnder Einsicht in die innere Natur der Fehler und den Mechanismus der Beobachtungen noch verborgen, und wenn man auch voraussetzen darf, daß die angenommene Funktionsform mit der idealen Form des Zusammenhanges, wenigstens in den bis jetzt erkannten und beobachteten Eigenschaften, in einer für die Praxis genügenden Übereinstimmung steht, so ist doch das Gesetz, welches sie repräsentiert, nur als ein Erfahrungsgesetz zu betrachten."

Dem Gaußschen Fehlergesetze wohnt daher nur so viele Strenge inne, als der zu seiner Ableitung beigezogenen Hypothese des arithmetischen Mittels zukommt. Welche Beweiskraft aber die Regel vom arithmetischen Mittel besitzt, mag in dem Werke von E. Czuber: „Theorie der Beobachtungsfehler," 1891, S. 16 bis 47, wo eine eingehende Darstellung dieses Gegenstandes gegeben wird, nachgesehen werden.

§ 8. Die Bestimmung der Integrationskonstanten.

Aus dem Gaußschen Fehlergesetze

$$\varphi(\varepsilon) = c\, e^{-h^2 \varepsilon^2},$$

worin jetzt statt v wieder ε geschrieben erscheint, ergibt sich die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, daß ein bestimmter Beobachtungsfehler zwischen den Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ zu liegen komme, aus der Formel:

$$\varphi(\varepsilon) \,.\, d\varepsilon = c\, e^{-h^2 \varepsilon^2} \,.\, d\varepsilon.$$

Wird das Gebiet der möglichen Fehlerwerte von $-\infty$ bis $+\infty$ ausgedehnt, so geht bei Anstellung einer Beobachtung die Wahrscheinlichkeit für das Begehen eines Fehlers in die Gewißheit, d. i. in die Wahrscheinlichkeitseinheit über, weil es gewiß ist, daß ein begangener Fehler innerhalb des Bereiches $(-\infty, +\infty)$ falle. Durch Integration der unendlich kleinen Wahrscheinlichkeit ergibt sich daher die Einheit der Wahrscheinlichkeit aus dem Ansatze:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon) \,.\, d\varepsilon = c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} \,.\, d\varepsilon = 1.$$

Setzt man hierin $h\varepsilon = t$, also $\varepsilon = \frac{t}{h}$, so ist, da h eine Konstante bedeutet, $d\varepsilon = \frac{dt}{h}$ und es wird:

$$\frac{c}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \,.\, dt = 1 \qquad (1)$$

Um die darin vorkommende Integrationskonstante c zu bestimmen, ist es zunächst erforderlich, das sogenannte Laplacesche Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \,.\, dt = 2 \int_{0}^{\infty} e^{-t^2} \,.\, dt = 2J$$

aufzulösen. Beachtet man, daß der Wert eines bestimmten Integrals bei gleichbleibenden Grenzen von der Bezeichnung der Variablen unhängig ist, so kann man auch setzen:

$$J^2 = \int_0^\infty e^{-t^2} . dt \int_0^\infty e^{-x^2} . dx = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-(t^2 + x^2)} . dx$$

oder unter Einführung der neuen Unbekannten $y = \frac{x}{t}$ und Substitution der daraus abgeleiteten Werte*)

$$x = t\, y, \quad dx = t\, .\, dy:$$

$$J^2 = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-(1+y^2)t^2} . t\, dy = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-(1+y^2)t^2}\, t\, .\, dt.$$

Setzt man der Einfachheit halber:

$$z = (1 + y^2)\, t^2, \quad dz = 2t\, dt\, (1 + y^2), \quad t\, dt = \frac{dz}{2(1 + y^2)},$$

so kann man auch schreiben:

$$J^2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{1 + y^2} \int_0^\infty e^{-z} . dz.$$

Nun ist aber

$$\int_0^\infty e^{-z} dz = \Big| - e^{-z} \Big|_0^\infty = 1,$$

somit

$$J^2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{1 + y^2} = \Big| \frac{1}{2}\, arc\, tg\, y \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{und} \quad 2J = \sqrt{\pi},$$

folglich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} . dt = \sqrt{\pi}. \tag{2}$$

Mit diesem Werte geht die Gleichung (1) über in

$$\frac{c}{h} \sqrt{\pi} = 1,$$

woraus

*) Vergl. Czuber: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, 1898. II. Bd. Art. 271.

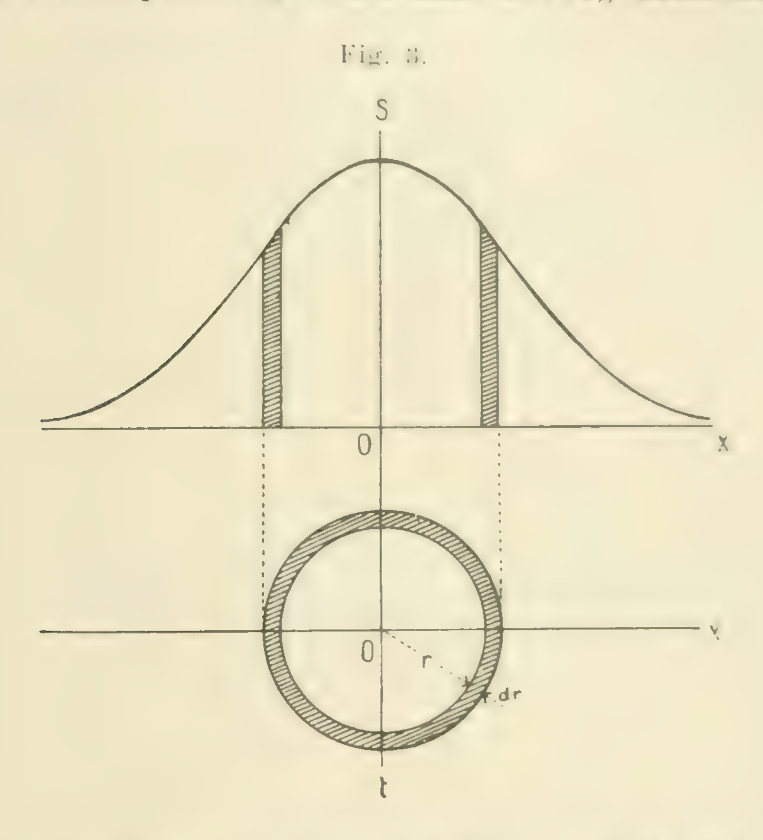
$$c = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

resultiert. Damit erscheint das Gaußsche Fehlergesetz in der Form:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \tag{3}$$

Bei der Auswertung des Laplaceschen Integrals, dessen erste Auflösung von Euler herrührt (Gaußsche Bemerkung in v. Zachs „Monatlicher Korrespondenz," Band XXI, S. 280), kann man sich auch

Fig. 3.



einer geometrischen Betrachtung bedienen (Fig. 3). Die Gleichung

$$s = e^{-t^2 - x^2} = e^{-r^2}$$

stellt eine Umdrehungsfläche dar, die — bezogen auf das rechtwinkelige Koordinatensystem x, t, s — durch Rotation der Wahrscheinlichkeitskurve um ihre Symmetrieachse s entsteht. Das von dieser Fläche und der tx-Ebene eingeschlossene Volumen läßt sich einerseits dadurch bestimmen, daß man es in unendlich kleine Prismen von der Grundfläche $dt \,.\, dx$ und der Höhe s zerlegt und dann integriert, so daß man erhält:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s \, dt \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 - x^2} dt \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Da ein bestimmtes Integral unverändert bleibt, wenn man die Variable durch eine andere Bezeichnung ersetzt, so daß die Beziehung besteht:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx,$$

so ist

$$V = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \right)^2.$$

Anderseits läßt sich V auch durch Zerlegung des Rotationskörpers in unendlich dünne Hohlzylinder vom Halbmesser r, der Wandstärke dr und der Höhe s berechnen. Die in der tx-Ebene liegenden kreisringförmigen Basisflächen sind $2\, r\, \pi \,.\, dr$, somit hat ein Zylinderelement das Differentialvolumen $d\,V = 2\, s\, r\, \pi \,.\, dr$ und es ist das ganze Volumen von $r = 0$ bis $r = \infty$:

$$V = \int_0^{\infty} 2\, s\, r\, \pi \,.\, dr = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2}\, dr = 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{\infty} =$$

$$= 2\pi \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \pi.$$

Durch Gegenüberhaltung der beiden Resultate für V ergibt sich:

$$V = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \right)^2 = \pi$$

somit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

§ 9. Die Gaußsche Fehlerwahrscheinlichkeitskurve.

Trägt man auf der Abszissenachse eines rechtwinkeligen Koordinatensystems die Fehler ε von Null nach beiden Seiten hin bis $-\infty$ und $+\infty$ als Abszissen und die zugehörigen Funktionswerte

$$\varphi\,(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 \varepsilon^2}$$

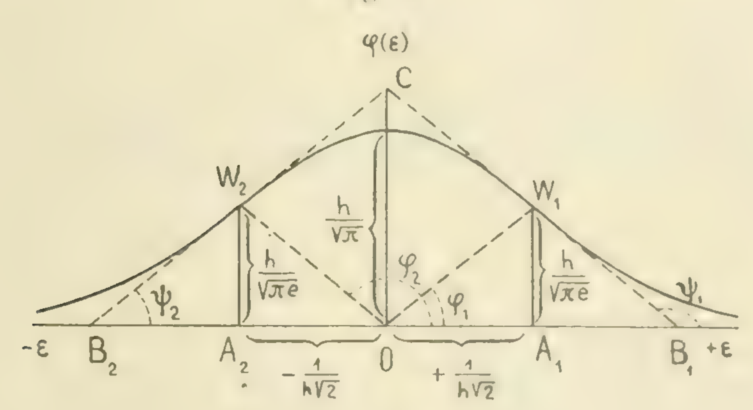
als Ordinaten auf, so erhält man die in Fig. 4 dargestellte Gaußsche Fehlerwahrscheinlichkeitskurve, welche sich von der allgemeinen Fehlerwahrscheinlichkeitskurve dadurch unterscheidet, daß diese die

Abszissenachse in zwei Punkten schneidet, jene aber die Abszissenachse zur Asymptote hat, da die Ordinaten mit unendlich wachsenden Abszissen gegen Null konvergieren. Die stets positiv bleibenden Ordinaten sind nicht nur eine Funktion von ε, sondern erfordern neben der logarithmischen Basis $e = 2{,}718\,2818$ und der Ludolphschen Zahl $\pi = 3{,}141\,5927$ auch die Kenntnis der Konstanten h, deren Bestimmung im § 11 erfolgen wird.

Für $\varepsilon = 0$ ist $\varphi(\varepsilon)$ ein Maximum und hat den Wert $\varphi(0) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, für $\varepsilon = \pm\infty$ ist $\varphi(\varepsilon) = 0$. Die Kurve besitzt zwei Wendepunkte W_1 und W_2, deren Koordinaten wie folgt erhalten werden. Es ergibt sich aus

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 \varepsilon^2}$$

Fig. 4.



durch zweimalige Differentiation nach ε:

$$\varphi'(\varepsilon) = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\, \varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2},$$

$$\varphi''(\varepsilon) = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\varepsilon^2} + \frac{4h^5}{\sqrt{\pi}}\, \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2} = \frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\varepsilon^2}(2h^2\varepsilon^2 - 1).$$

Für die Bedingung $\varphi''(\varepsilon) = 0$ wird, weil $e^{-h^2\varepsilon^2} = 0$, d. h. $\varepsilon = \infty$, offenbar keinen Wendepunkt liefern kann:

$$2h^2\varepsilon^2 - 1 = 0,$$

woraus die Abszissen der Wendepunkte zu

$$\varepsilon = \pm\frac{1}{h\sqrt{2}}$$

und die Ordinaten zu

$$\varphi\left(\frac{1}{h\sqrt{2}}\right) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}} = \frac{h}{\sqrt{\pi e}}$$

resultieren. Da der zweite Differentialquotient $\varphi''(\varepsilon)$ innerhalb der beiden Wendepunkte negativ, außerhalb derselben aber positiv ist, so verläuft die Kurve im Mittelstücke konkav (abwärts gebogen), in den Seitenästen konvex (aufwärts gebogen). Die Abnahme der Ordinate erfolgt daher von ihrem Maximum an bis zu den Wendepunkten immer rascher und von da bis Null immer langsamer. In den Wendepunkten geht also die Fehlerhäufigkeit von ihrem Maximum bis gegen die Null zu von der beschleunigten Abnahme in die verzögerte Abnahme über.

Legt man durch die Wendepunkte die geometrischen Tangenten, so findet man die trigonometrischen Tangenten ihres Neigungswinkels aus dem ersten Differentialquotienten $\varphi'(\varepsilon)$:

$$tg\,\psi_1 = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{h\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{h^2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi e}}$$

$$tg\,\psi_2 = +\frac{h^2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi e}}.$$

Da die Neigungswinkel der vom Koordinatenursprung nach den Wendepunkten gezogenen Radienvektoren bestimmt sind durch die Quotienten:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi e}} : \pm \frac{1}{h\sqrt{2}},$$

nämlich

$$tg\,\varphi_1 = +\frac{h^2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi e}} \quad \text{und} \quad tg\,\varphi_2 = -\frac{h^2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi e}},$$

so ergibt sich, daß

$$\psi_1 = \varphi_2 \text{ und } \psi_2 = \varphi_1,$$

d. h. es verläuft die Tangente des einen Wendepunktes mit jenem Radiusvektor parallel, welcher von dem Koordinatenursprung zu dem anderen Wendepunkte führt. Die Wendetangenten schneiden daher in der Abszissenachse Stücke ab von der Länge

$$O B_1 = 2 \,.\, O A_1 = \frac{\sqrt{2}}{h}.$$

Das auf der Ordinatenachse abgeschnittene Stück mißt:

$$O C = O B_1 \,.\, tg\,\psi_1 = \frac{\sqrt{2}}{h} \cdot \frac{h^2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi e}} = \frac{2h}{\sqrt{\pi e}} = 2 \,.\, A_1 W_1.$$

Die ganze von der Kurve und der Abszissenachse begrenzte Fläche, welche durch das Integral

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon) \, . \, d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} \, . \, d\varepsilon$$

ausgedrückt ist, stellt die Wahrscheinlichkeit dar, daß ein Fehler überhaupt vorhanden ist, also die Gewißheit oder die Einheit. Man kann daher mit Benutzung der Abkürzung $h\varepsilon = t$ beziehungsweise $d\varepsilon = \frac{dt}{h}$, sowie mit Rücksicht auf die zur Ordinatenachse vorhandene Symmetrie der Kurve auch setzen:

$$F = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, . \, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-t^2} \, . \, dt = 1 .$$

§ 10. Bedeutung des Parameters h.

Der auf die verschiedenen Beobachtungsumstände sich beziehende Parameter h steht mit der Natur der Beobachtungen insoferne im Zusammenhange, als er die verschieden rasche Änderung der Funktion $\varphi(\varepsilon)$ bedingt. Die Bedeutung dieses Parameters wird sofort klar, wenn man beachtet, daß das Fehlergesetz

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2},$$

welches in seiner Allgemeinheit für alle Gattungen von Beobachtungen Geltung hat, bei einem bestimmten Werte von h nur einer unter ganz bestimmten Umständen ausgeführten Beobachtungsreihe entsprechen kann. Vergleicht man zwei Beobachtungsreihen mit verschiedenen h in bezug auf ihre Wahrscheinlichkeit, indem man sie durch ihre Wahrscheinlichkeitskurven

$$\varphi_1(\varepsilon) = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 \varepsilon^2} = \varphi(\varepsilon, h_1)$$

$$\varphi_2(\varepsilon) = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 \varepsilon^2} = \varphi(\varepsilon, h_2)$$

zur Darstellung bringt, wobei z. B. h_2 doppelt so groß als h_1 sei, so wird sich die zweite Kurve mit ihrem Scheitel S_2 doppelt so hoch erheben als die erste. Da aber die Flächenräume zwischen jeder Kurve und der Abszissenachse gleich der Einheit, also auch untereinander gleich sein müssen, so schneiden sich beide Kurven notwendig in zwei zur Ordinatenachse symmetrisch liegenden Punkten P und Q (Fig. 5). Diese Schnittpunkte entsprechen jenem Fehlerwerte ε_1, welchem

in beiden Beobachtungsreihen die gleiche Wahrscheinlichkeit zukommt, denn es besteht die Gleichung

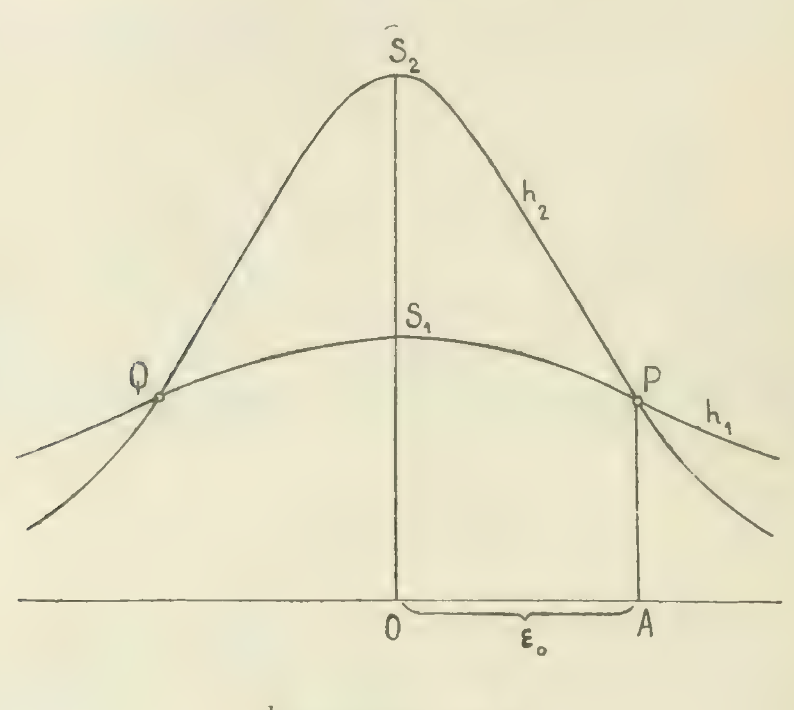
$$\varphi_1(\varepsilon_0) = \varphi_2(\varepsilon_0)$$

oder

$$\frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 \varepsilon_0^2} = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 \varepsilon_0^2}.$$

Daraus läßt sich der Fehler ε_0 in folgender Weise berechnen. Es ist

Fig. 5.



$$\frac{h_1}{h_2} = e^{-(h_1^2 - h_2^2)\varepsilon_0^2}$$

$$lg\, h_1 - lg\, h_2 = (h_1^2 - h_2^2)\,\varepsilon_0^2$$

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{lg\, h_1 - lg\, h_2}{h_1^2 - h_2^2}}.$$

Alle Fehler, welche kleiner als dieses ε_0 sind, haben in der zweiten Beobachtungsreihe eine größere Wahrscheinlichkeit als in der ersten Reihe, und umgekehrt besitzen alle Fehler, welche größer sind als der in beiden Reihen gleichwahrscheinliche Fehler ε_0, in der zweiten Beobachtungreihe eine geringere Wahrscheinlichkeit. Da sohin in der zweiten Reihe die kleineren, von Null bis zu einer gewissen Größe angeordneten Fehler häufiger, die über diese Größe hinausreichenden Fehler aber minder häufig vorkommen, als dies bei der ersten Reihe der Fall ist, so wird der bei einer bestimmten Beobachtungsgattung konstante Parameter h, welcher die Verschiedenheit der Fehlerhäufig-

keit oder die Fehlerwahrscheinlichkeit zum Ausdrucke bringt, als ein Maß für die Präzision der Beobachtungsreihe oder nach Gauß als das Genauigkeitsmaß bezeichnet. Je größer h ist, desto rascher nähert sich die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve der Abszissenachse, desto kleiner wird auch die Wahrscheinlichkeit, einen größeren Fehler zu begehen und desto genauer muß die Beobachtungsreihe genannt werden, denn man hält eine Beobachtungsreihe für genauer als eine andere, wenn in ihr größere Fehler seltener auftreten als bei der anderen. Die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, einen zufälligen Fehler von der Größe ε zu begehen, welche durch den Ansatz

$$\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$$

ausgedrückt erscheint, ist daher nicht allein von der Größe des Fehlers ε, sondern auch von h, der Genauigkeit der Beobachtungen, abhängig.

Geht man über auf die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler einer einzelnen Beobachtung zwischen den beliebigen Grenzen a und b liege, so hat man den Ausdruck für die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ innerhalb dieser Grenzen zu integrieren und erhält unter Einführung der Gaußschen Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion:

$$\int_a^b \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler die Grenzen $-a$ und $+a$ nicht überschreite, oder ohne Rücksicht auf das Vorzeichen zwischen 0 und a liege, bestimmt durch

$$\int_{-a}^{+a} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Weil die Fehlerwahrscheinlichkeiten zwischen $-a$ und 0 und zwischen 0 und $+a$ des symmetrischen Verlaufes der Wahrscheinlichkeitskurve wegen einander gleich sind, so kann man auch schreiben:

$$\int_{-a}^{+a} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Führt man hier wieder die neue Variable t mittels der Gleichung $t = h\varepsilon$, also $dt = h \cdot d\varepsilon$ ein, so erhält man diesen Ausdruck in der von Gauß (1816) gegebenen Form:

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t=ha} e^{-t^2} . dt.$$

Da für $\varepsilon = 0$ auch $t_0 = 0$ und für $\varepsilon = a$ die obere Grenze $t_a = a\,h$ ist, so kann man auch setzen:

$$\int_{-a}^{+a} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a h} e^{-t^2}\, dt = \Theta(a\,h).$$

Die Ausmittlung des Integrals $\int_0^{a h} e^{-t^2}\, dt$, welches in endlicher Form nicht dargestellt werden kann, geschieht am einfachsten mittels Reihenentwicklung nach der Exponentialreihe:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \cdots$$

Für $x = -t^2$ gibt dies:

$$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1\,!} + \frac{t^4}{2\,!} - \frac{t^6}{3\,!} + \frac{t^8}{4\,!} - \cdots$$

Durch Integration zwischen den Grenzen 0 und $a\,h = t_a$ folgt:

$$\int_0^{t_a} e^{-t^2}\, dt = t_a - \frac{t_a^3}{3\,.\,1\,!} + \frac{t_a^5}{5\,.\,2\,!} - \frac{t_a^7}{7\,.\,3\,!} + \frac{t_a^9}{9\,.\,4\,!} - \cdots$$

somit ist:

$$\Theta(a\,h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ a\,h - \frac{(a\,h)^3}{3} + \frac{(a\,h)^5}{10} - \frac{(a\,h)^7}{42} + \frac{(a\,h)^9}{216} - \cdots \right\}$$

So wird beispielsweise für $a\,h = 0{\cdot}1$:

$$\Theta(0{\cdot}1) = 1{\cdot}128\,38\,(0{\cdot}100\,000 - 0{\cdot}000\,333 + 0{\cdot}000\,001) = 0{\cdot}112\,463.$$

Wegen der großen Bedeutung und des häufigen Gebrauches, welche die Funktion $\Theta(a h)$ oder Ableitungen davon in der Fehlertheorie und verwandten Wissenszweigen spielen, hat man dieselbe für eine nach konstanten Differenzen fortschreitende Reihe von Argumenten $t = a h$ in Tabellen gebracht. Eine Tafel der Funktion

$$\Theta(a h) = \Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a h} e^{-t^2}\, dt$$

für $h = 1$ gibt Encke im „Berliner Astronomischen Jahrbuch" für das Jahr 1834 auf fünf Dezimalstellen, Herz (1900) in der „Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung" auf sechs Dezimalen und Czuber (1891) in der „Theorie der Beobachtungsfehler" auf sieben Dezimalen. Die Tabelle I des Anhanges entstammt der letztgenannten Quelle. Ein gedrängter Auszug hievon möge hier Platz finden.

$a h$	$\Theta(a h)$	$a h$	$\Theta(a h)$	$a h$	$\Theta(a h)$
0·0	0·000	0·8	0·742	1·6	0·976
0·1	0·112	0·9	0·797	1·7	0·984
0·2	0·223	1·0	0·843	1·8	0·989
0·3	0·329	1·1	0·880	1·9	0·993
0·4	0·428	1·2	0·910	2·0	0·995
0·5	0·520	1·3	0·934	2·1	0·997
0·6	0·604	1·4	0·952	2·2	0·998
0·7	0·678	1·5	0·966	2·3	0·999

Aus ihr ist z. B. zu entnehmen, daß die Wahrscheinlichkeit, daß der Beobachtungsfehler den Wert 0·2 nicht überschreite, 0·223 beträgt, daß man also unter je 1000 Fehlern 223 Fehler erwarten darf, die zwischen — 0·2 und + 0·2 oder absolut genommen zwischen 0 und 0·2 fallen. Deshalb kann man auch 223 gegen 777 wetten, daß der Fehler bei einer Genauigkeit von $h = 1$ kleiner als 0·2 sei. Mit Zuhilfenahme dieser Tabelle läßt sich also von n möglichen Fehlern die Anzahl z der zwischen den Grenzen $\pm a$ liegenden Fehler leicht berechnen. Denn da

$$\int_{-a}^{+a} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \Theta(a h)$$

die Wahrscheinlichkeit darstellt, daß ein Fehler in das Intervall von $-a$ bis $+a$ falle, diese Wahrscheinlichkeit aber durch das Verhältnis $\frac{z}{n}$ bestimmt ist, so hat man die Gleichung:

$$z = n \,.\, \Theta(a h).$$

Beispiel. Unter $n = 1000$ Beobachtungsfehlern, welche die Genauigkeit $h = 1$ besitzen, liegen

$z = 520$ Fehler zwischen den Grenzen 0 und 0·5,
843 „ „ „ „ 0 „ 1·0,
995 „ „ „ „ 0 „ 2·0,
oder es liegen 520 Fehler zwischen 0 „ 0·5,
843 — 520 = 323 „ „ 0·5 „ 1·0,
995 — 843 = 152 „ „ 1·0 „ 2·0,
während 1000 — 995 = 5 „ größer als 2·0 ausfallen.

Haben die Beobachtungsfehler nicht das Genauigkeitsmaß $h = 1$, so sind in der Tabelle statt der Argumente 0·1, 0·2, 0·3 . . . zu setzen: $\frac{0·1}{h}, \frac{0·2}{h}, \frac{0·3}{h}, \ldots$ beziehungsweise bei gegebenen Funktionswerten

aus der Tabelle die mit h multiplizierten Argumente $0{\cdot}1\,h$, $0{\cdot}2\,h$, $0{\cdot}3\,h$ . . . zu entnehmen.

Um den Begriff der Genauigkeit näher zu präzisieren, sei angenommen, daß bei der Messung einer Strecke mit einem bestimmten Längenmesser ein Fehler zwischen a und $a+1$ Millimetern ebenso häufig zu erwarten ist als bei der Messung derselben Strecke mit einem anderen Instrumente zwischen a und $a+1$ Zentimetern. So wie man in diesem Falle entsprechend dem üblichen Sprachgebrauche nicht zögern wird, der ersten Messung eine zehnmal größere Genauigkeit einzuräumen als der zweiten, ebenso wird man allgemein eine Beobachtungsreihe für k-mal genauer als eine andere halten, wenn bei der ersten die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers zwischen den Grenzen ε und $\varepsilon + d\,\varepsilon$ ebenso groß ist wie die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen den Grenzen $k\,\varepsilon$ und $k\,(\varepsilon + d\,\varepsilon)$ bei der zweiten.

Ist bei einer Beobachtung von der Genauigkeit h die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen den Grenzen ε und $\varepsilon + d\,\varepsilon$ gleich

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 \varepsilon^2}\, d\,\varepsilon,$$

so entspricht einer Beobachtung, welche das Gesetz

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\varepsilon^2}\, d\,\varepsilon$$

befolgt, die Einheit der Genauigkeit, und es ist die Fehlerwahrscheinlichkeit einer k-mal genaueren Beobachtung derselben Art

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}}\, e^{-k^2 \varepsilon^2}\, d\,\varepsilon.$$

Je enger also die Fehlergrenzen gezogen werden müssen, damit dem von ihnen eingeschlossenen Beobachtungsfehler eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zukomme, desto genauer wird die betreffende Beobachtungsreihe gehalten werden können, so daß man auch sagen kann, daß die Genauigkeiten zweier Beobachtungsreihen sich umgekehrt verhalten wie die Intervalle gleichwahrscheinlicher Fehlergrenzen.

§ 11. Die Bestimmung des Genauigkeitsmaßes.

Der von der Genauigkeit der Beobachtungen abhängige Parameter h besitzt im allgemeinen für jede Beobachtungsgattung einen anderen, die Fehlerwahrscheinlichkeit zum Ausdrucke bringenden Wert. Um ihn näher zu bestimmen, wird man daher die Beobachtungsfehler selbst zum Ausgang nehmen müssen.

Wird die Reihe der bei n wirklich angestellten Beobachtungen begangenen wahren Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$, welche das Gaußsche Fehlergesetz

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$$

befolgen, als bekannt, der Parameter h jedoch als unbekannt vorausgesetzt, so wird das Genauigkeitsmaß h wie folgt gefunden. Die Wahrscheinlichkeiten, daß die Fehler ε einzeln entstehen, sind der Reihe nach:

$$\omega_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_1^2} . d\varepsilon,$$

$$\omega_2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_2^2} . d\varepsilon,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\omega_n = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_n^2} . d\varepsilon,$$

somit ist die Wahrscheinlichkeit, mit welcher sich das Zusammentreffen aller Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$ erwarten läßt, gleich dem Produkte:

$$\Omega = \omega_1\, \omega_2\, \omega_3 \ldots \omega_n = \frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-h^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2)} (d\varepsilon)^n = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} d\varepsilon\right)^n e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]},$$

worin der bequemeren Schreibung wegen für die Summe der Fehlerquadrate $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2$ das von Gauß eingeführte Symbol $[\varepsilon\varepsilon]$ gebraucht ist*). Bei der Kenntnis der wahren Fehler wird man in dem Ausdrucke für Ω das Genauigkeitsmaß h beliebig annehmen können. Wird nun h so gewählt, daß Ω das Maximum erreicht, so wird dieses Genauigkeitsmaß, weil es die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen aller Fehler einer Beobachtungsreihe zu einem Maximum macht, als der wahrscheinlichste Wert von h bezeichnet werden können. Um die Bedingung des Maximums für das Wahrscheinlichkeitsprodukt zu erfüllen, hat man unter Beachtung, daß der Faktor $\left(\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right)^n$ eine konstante Größe ist, den Differentialquotienten von Ω nach h gleich Null zu setzen und erhält:

$$n h^{n-1} . e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]} - h^n . 2h[\varepsilon\varepsilon] e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]} = 0$$

oder nach vorgenommener Kürzung:

$$n - 2h^2[\varepsilon\varepsilon] = 0,$$

woraus

*) Siehe die S. 23 zitierte Schrift des Verfassers.

$$\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} = \frac{1}{2h^2}$$

und als Ausdruck für den wahrscheinlichsten Wert des Genauigkeitsmaßes:

$$h = \sqrt{\frac{n}{2[\varepsilon\varepsilon]}} \qquad (1)$$

erhalten wird, eine Gleichung, worin das Genauigkeitsmaß als eine Funktion der Summe der Quadrate der wahren Beobachtungsfehler $[\varepsilon\varepsilon]$ ausgedrückt erscheint. Man kann das Genauigkeitsmaß *h* aber auch durch beliebig andere Fehlerverbindungen zum Ausdruck bringen, deren vorteilhafteste der durchschnittliche, der mittlere und der wahrscheinliche Fehler genannt werden.

Bezeichnet man den absoluten Betrag eines Fehlers (ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen Plus oder Minus) mit ε, so ist aus einer vorliegenden Fehlerreihe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ der durchschnittliche Fehler ϑ gleich dem arithmetischen Mittel der ersten Fehlerpotenzen, das Quadrat des mittleren Fehlers μ ist das arithmetische Mittel aller Fehlerquadrate und die Quadratwurzel des wahrscheinlichen Fehlers ϱ ist das arithmetische Mittel aller Fehlerquadratwurzeln, so daß man hat:

$$\vartheta = \frac{[\varepsilon]}{n},$$

$$\mu^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n}, \qquad \mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}},$$

$$\sqrt{\varrho} = \frac{[\sqrt{\varepsilon}]}{n}, \qquad \varrho = \left(\frac{[\sqrt{\varepsilon}]}{n}\right)^2.$$

Der mittlere Fehler ist also dasjenige Fehlermittel, welches der Gleichung (1) zufolge dem wahrscheinlichsten Werte des Genauigkeitsmaßes entspricht.

B. Die theoretischen Fehlermaße.

§ 12. Der durchschnittliche Fehler.

Der Empiriker wählt zur Beurteilung der Genauigkeit einer Beobachtungsreihe immer den einfachsten, naheliegendsten und bequemsten Weg: er bildet einen Durchschnittswert der wahren Beobachtungsfehler ohne Rücksicht auf die Vorzeichen nach der bewährten Regel des arithmetischen Mittels und schließt aus der Größe dieses Durchschnittswertes (durchschnittlicher Fehler ϑ genannt) auf die Güte oder die Genauigkeit der Beobachtungsreihe. Sind allgemein

$$l_1, l_2, \ldots l_n$$

die aus n gleichartigen Beobachtungen erhaltenen Werte einer bestimmten Größe X, so stellen die Unterschiede

$$X - l_1 = \varepsilon_1,$$
$$X - l_2 = \varepsilon_2,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$X - l_n = \varepsilon_n$$

die mit entgegengesetzten Vorzeichen genommenen wahren Fehler dar, welche als zufällige Beobachtungsfehler positiv oder negativ sein können. Das arithmetische Mittel der absoluten Fehlerwerte

$$\vartheta = \frac{|\varepsilon|}{n}$$

wird der durchschnittliche Fehler genannt. Da die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen eines Fehlers $\frac{1}{n}$ ist, weil unter den n vorhandenen Fehlern dem Zustandekommen eines bestimmten Fehlers derselben eben nur ein einziger günstig ist, so erscheint der durchschnittliche Fehler seiner ersten Definition entsprechend auch als die Summe der Produkte aus den ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen genommenen Fehlern ε mit ihren Wahrscheinlichkeiten definiert, nämlich

$$\vartheta = \frac{\varepsilon_1}{n} + \frac{\varepsilon_2}{n} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{n} = \frac{|\varepsilon|}{n}.$$

Je größer die Anzahl der Fehler ist, desto schärfer wird ϑ berechnet werden können, denn sein theoretisch strenger Wert entspricht einer unendlichen Anzahl von Fehlern. Bei unendlich vielen Beobachtungen werden von deren Fehlern ε um so mehr in das Intervall $d\varepsilon$ fallen, je näher dieses Intervall der Null zu liegen kommt, denn dies entspricht dem Verlauf der Gaußschen Fehlerwahrscheinlichkeitskurve oder dem Fehlergesetze:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\varepsilon^2}.$$

Da der Ausdruck

$$\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon$$

die Wahrscheinlichkeit darstellt, daß ein begangener Fehler in das Intervall von ε bis $\varepsilon + d\varepsilon$ falle, so ist der zweiten Definition des durchschnittlichen Fehlers entsprechend ϑ gleich der Summe der Produkte $|\varepsilon| \cdot \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ oder

$$\vartheta = \varepsilon_1 \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_1^2} d\varepsilon + \varepsilon_2 \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_2^2} d\varepsilon + \cdots + \varepsilon_\sigma \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_\sigma^2} d\varepsilon =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon \, e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Bezeichnet man im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie das Produkt des Fehlers mit der Wahrscheinlichkeit, ihn zu begehen, als den „Hoffnungswert" des Fehlers, so kann der durchschnittliche Fehler auch drittens als die Summe der Hoffnungswerte der absoluten Fehlerbeträge definiert werden, wobei aber ausdrücklich hervorgehoben werden muß, daß ε den absoluten Wert des Fehlers bedeutet, zum Unterschiede von dem mit dem speziellen Vorzeichen versehenen Fehlerwerte ε. Diese Unterscheidung ist deshalb notwendig, weil bei einer unendlich großen Anzahl von zufälligen Beobachtungsfehlern die Summe aller positiven und die Summe aller negativen Fehler dem absoluten Betrage nach einander gleich sind und daher die Summe aller Fehler mit Rücksicht auf ihr Vorzeichen gleich Null sein muß. Die Summe aller Fehler ohne Rücksicht auf das Vorzeichen ist daher doppelt so groß als die Summe der positiven oder negativen Fehler allein, so daß man hat:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon \, e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon| \, e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = 2 \int_0^{\infty} \varepsilon \, e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Man kann daher auch schreiben:

$$\vartheta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon \, e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Macht man hier unter Einführung der neuen Veränderlichen $h\varepsilon = t$ die Substitutionen:

$$\varepsilon = \frac{t}{h}, \quad d\varepsilon = \frac{dt}{h},$$

so wird:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon \, e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{h^2} \int_0^{\infty} t \, e^{-t^2} dt.$$

Nun ist das allgemeine Integral

$$\int t \, e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int d\left(e^{-t^2}\right) = -\frac{1}{2} e^{-t^2} + C,$$

und daher das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty t\, e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2},$$

folglich

$$\vartheta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \frac{0{\cdot}56419}{h}$$

und

$$h = \frac{0{\cdot}56419}{\vartheta}.$$

§ 13. Der mittlere Fehler.

Der mittlere zu befürchtende Fehler oder einfach der mittlere Fehler der Beobachtungen wird als die Quadratwurzel aus der durch die Fehleranzahl geteilten Summe der wahren Fehlerquadrate definiert, was Gauß als Prinzip hingestellt hat. Er ist derjenige Fehler, welcher, wenn er bei allen Beobachtungen begangen worden wäre, dieselbe Summe der Fehlerquadrate geben würde, wie die tatsächlich gemachten Fehler. Sein mathematischer Ausdruck lautet:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}.$$

Je größer die Anzahl der Fehler ist, desto mehr nähert sich μ jener Grenze, welche theoretisch für $n = \infty$ erreicht wird. Stellt man für μ^2 eine ähnliche Betrachtung an wie für ϑ, so erhält man:

$$\mu^2 = \varepsilon_1^2 \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_1^2}\, d\varepsilon + \varepsilon_2^2 \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_2^2}\, d\varepsilon + \cdots + \varepsilon_\infty^2 \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_\infty^2}\, d\varepsilon =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon$$

oder

$$\mu^2 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon.$$

Demgemäß kann der mittlere Fehler auch als die Quadratwurzel aus der Summe der Hoffnungswerte aller Fehlerquadrate definiert werden. Wird wieder die neue Veränderliche t mittels der Beziehung $h\varepsilon = t$ eingeführt, so hat man:

$$\int_0^\infty \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon = \frac{1}{h^3} \int_0^\infty t^2 e^{-t^2}\, dt.$$

Um dieses Integral aufzulösen, setze man

$$u = -\frac{t}{2} \qquad v = e^{-t^2}$$

$$du = -\frac{dt}{2} \qquad dv = -2\,t\,e^{-t^2}\,dt$$

und erhält so nach der Formel $\int u\,dv = uv - \int v\,du$:

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t^2}\,dt = \left| -\frac{t}{2}\,e^{-t^2} \right|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt.$$

Somit ist, da $e^{t^2} = 1 + \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \cdots$ und daher

$$t\,e^{-t^2} = 1 : \left(t^{-1} + t + \frac{1}{2}t^3 + \cdots\right)$$

für die Grenzen 0 und ∞ verschwindet,

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \text{ und}$$

$$\mu^2 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{h^3} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{1}{2\,h^2},$$

folglich

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{0{\cdot}70711}{h}$$

und

$$h = \frac{0{\cdot}70711}{\mu},$$

eine Beziehung, die auch schon aus der im § 11 abgeleiteten Gleichung

$$h = \sqrt{\frac{n}{2\,[\varepsilon\,\varepsilon]}} = \frac{1}{\mu\sqrt{2}}$$

resultiert. In der Gaußschen Fehlerwahrscheinlichkeitskurve (§ 9) erscheint der mittlere Fehler durch die Abszissen der Wendepunkte zur Darstellung gebracht.

§ 14. Der wahrscheinliche Fehler.

Für die Wahrscheinlichkeit, daß in einer Beobachtungsreihe von bestimmter Genauigkeit ein Fehler vorkommt, der zwischen den Grenzen a und b enthalten ist, besteht der Ausdruck:

$$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2 \varepsilon^2}\,d\varepsilon.$$

Engt man die Grenzen so weit ein, daß die obere Grenze gleich der unteren wird, so ist $W = 0$, d. h. es ist so viel wie ausgeschlossen, daß bei einer beliebigen Beobachtung kein anderer als gerade ein im vorhinein festgesetzter Fehler begangen werde; dehnt man die Grenzen von $-\infty$ bis $+\infty$ aus, so wird die Wahrscheinlichkeit $W = 1$, weil es gewiß ist, daß irgend ein Fehler begangen werde. Es besteht also die Gleichung:

$$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 1,$$

welche auch schon aus dem Laplaceschen Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

hervorgeht. Zwischen $W = 0$ und $W = 1$ ist $W = \frac{1}{2}$ eine charakteristische Wahrscheinlichkeit, weil sie aussagt, daß es ebenso wahrscheinlich als nicht wahrscheinlich ist, einen Fehler von bestimmter Größe zu begehen. Man nennt daher jenen Wert von a, welcher $W = \frac{1}{2}$ macht, nach Bessel (1815) den wahrscheinlichen Fehler. Bezeichnet man ihn mit ϱ, so besteht die transzendente Gleichung:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\varrho}^{+\varrho} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho h} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}.$$

Dieser Gleichung entsprechend gibt der wahrscheinliche Fehler ϱ jene Fehlergrenze an, von der es ebenso wahrscheinlich ist, daß sie überschritten, als daß sie nicht erreicht wird, so daß ein Fehler innerhalb dieser Grenze gleich wahrscheinlich ist mit einem Fehler außerhalb derselben. Da sohin in einer hinlänglich großen Beobachtungsreihe eben so viele kleinere Fehler unter dem wahrscheinlichen Fehler als größere über ihm sich befinden, so kann man bei einer einzelnen Beobachtung 1 gegen 1 wetten, daß der Beobachtungsfehler nicht größer und nicht kleiner sei als ϱ. Ordnet man sämtliche Beobachtungsfehler nach ihrer absoluten Größe, so ist der mittelste (wenn ihre Anzahl ungerade ist) oder das arithmetische Mittel der beiden mittelsten (bei gerader Anzahl) ein Näherungswert des wahrscheinlichen Fehlers. Man kann ihn daher auch als den „zentralen Fehler" einer vorliegenden Fehlerreihe definieren.

Die Berechnung des Zahlenwertes von ϱ geschieht mit Hilfe der bekannten Gleichung (§ 10, S. 38):

$$\Theta(a\,h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{a\,h - \frac{(a\,h)^3}{2} + \frac{(a\,h)^5}{10} - \frac{(a\,h)^7}{42} + \frac{(a\,h)^9}{216} - \ldots\right\},$$

wenn hierin $\Theta(a\,h) = \frac{1}{2}$ und $a = \varrho$ gesetzt wird. Man erhält:

$$log\,(\varrho\,h) = 9{\cdot}678\,4604\ ^{1)}$$

$$\varrho = \frac{0{\cdot}47694}{h}$$

und

$$h = \frac{0{\cdot}47694}{\varrho}.$$

Der Zahlenwert von $\varkappa = \varrho\,h$ ergibt sich auch annähernd aus der nach der obigen Formel gerechneten Tafel I für $\Theta(a\,h)$, aus der man für den Funktionswert $\Theta(a\,h) = \Theta(t) = 0{\cdot}5$ durch Interpolation den Argumentenwert $t = a\,h$ direkt entnimmt.

Trägt man in der Fehlerwahrscheinlichkeitskurve vom Koordinatenursprung die wahrscheinlichen Fehler $+\varrho$ und $-\varrho$ auf, so liegt entsprechend der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zwischen den beiden zugehörigen Ordinaten die Hälfte der von der ganzen Kurve und der Abszissenachse eingeschlossenen Fläche, welche die Wahrscheinlichkeitseinheit repräsentiert, denn es bestehen die Gleichungen:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varrho h} e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\varrho h}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varrho h} e^{-t^2}\,dt + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\varrho h}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 1$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\int_0^{\varrho h} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

§ 15. Beziehungen zwischen den charakteristischen Fehlern.

Aus der Gegenüberstellung der Formeln für den streng theoretischen durchschnittlichen Fehler $\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \frac{0{\cdot}56419}{h}$

$$\text{mittleren Fehler } \mu = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{0{\cdot}70711}{h}$$

$$\text{wahrscheinlichen Fehler } \varrho = \frac{\varkappa}{h} = \frac{0{\cdot}47694}{h}$$

[1]) Einer freundlichen Mitteilung des Herrn Professor Dr. N. Herz verdanke ich den auf 13 Dezimalen gerechneten und in der 11. Stelle absolut sicheren Wert

$$\varkappa = 0{\cdot}476\,936\,276\,20_{4}$$

$$log\,\varkappa = 9{\cdot}678\,460\,356\,49_{3}.$$

ergeben sich die Relationen:

$$\vartheta = \frac{1}{\varkappa\sqrt{\pi}}\,\varrho = 1\cdot18295\,\varrho \doteq \frac{6}{5}\,\varrho$$

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu = 0\cdot79788\,\mu \doteq \frac{4}{5}\,\mu$$

$$\mu = \frac{1}{\varkappa\sqrt{2}}\,\varrho = 1\cdot48260\,\varrho \doteq \frac{3}{2}\,\varrho$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\vartheta = 1\cdot25331\,\vartheta \doteq \frac{5}{4}\,\vartheta$$

$$\varrho = \varkappa\sqrt{\pi}\,\vartheta = 0\cdot84535\,\vartheta \doteq \frac{5}{6}\,\vartheta$$

$$\varrho = \varkappa\sqrt{2}\,\mu = 0\cdot67449\,\mu \doteq \frac{2}{3}\,\mu$$

Die Berechnung des Genauigkeitsmaßes kann daher auf dreierlei Wegen erfolgen. Es ist

$$h = \frac{1}{\vartheta\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} = \frac{\varkappa}{\varrho} \quad \text{oder}$$

$$h = \frac{0\cdot56419}{\vartheta} = \frac{0\cdot70711}{\mu} = \frac{0\cdot47694}{\varrho}.$$

Eine interessante Beziehung liefert auch die Doppelgleichung

$$2\,\frac{\mu^2}{\vartheta^2} = \left(\frac{\varrho}{\varkappa\,\vartheta}\right)^2 = \pi = 3\cdot14159,$$

worüber im § 33 näheres mitgeteilt ist.

Von den drei charakteristischen Fehlern ist der mittlere Fehler stets der größte und der wahrscheinliche Fehler der kleinste. Auf die Frage, welcher von den charakteristischen Fehlern als Fehler- oder Genauigkeitsmaß am meisten vorzuziehen sei, wäre folgendes zu bemerken.

Der durchschnittliche Fehler ist derjenige, unter dem man sich noch am ehesten eine Vorstellung machen kann. Denn er gibt an, wie groß ein jeder Einzelfehler absolut genommen sein müßte, wenn alle gleich wären und dennoch dieselbe Fehlersumme ergäben. Er wird daher als der anschaulichste sowie auch seiner Einfachheit wegen vom Empiriker zumeist zur Beurteilung der Genauigkeit gewählt.

Der mittlere Fehler hat unter allen möglichen Fehlerwerten den größten Hoffnungswert oder das Maximum der mathematischen Erwartung, so daß man, wenn eine Beobachtung wiederholt angestellt wird, am ehesten erwarten darf, daß der Fehler einer neu hinzu-

tretenden Beobachtung die Größe des mittleren Fehlers der ursprünglichen Beobachtungen haben werde. Dies läßt sich folgendermaßen beweisen: Der mathematische Hoffnungswert des Fehlers ε ist bestimmt durch das Produkt des Fehlerbetrages mit der Wahrscheinlichkeit, ihn zu begehen. Nun ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler ε begangen werde, gegeben durch den Ausdruck

$$\omega = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon,$$

somit ist der Hoffnungswert:

$$H = \varepsilon \omega = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \varepsilon e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Um jenen Fehlerwert zu berechnen, welcher dem Maximum von H entspricht, hat man den der mathematischen Hoffnung proportionalen Ausdruck:

$$f(\varepsilon) = \varepsilon e^{-h^2 \varepsilon^2}$$

nach ε zu differenzieren und aus dem gleich Null gesetzten ersten Differentialquotienten die Unbekannte ε zu ermitteln. Man hat also:

$$f'(\varepsilon) = e^{-h^2 \varepsilon^2} - 2 h^2 \varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} = 0$$

oder nach erfolgter Reduktion:

$$1 - 2 h^2 \varepsilon^2 = 0$$

und hieraus

$$\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \mu.$$

Der zweite Differentialquotient wird aber für diesen Wert von ε wirklich negativ, wie es bei einem Maximum sein muß, nämlich

$$-\frac{2\sqrt{2}\,h}{\sqrt{e}}.$$

Der mittlere Fehler, von Gauß (1821) als der geeignetste und zweckmäßigste Maßstab zur Messung der Unsicherheit der Beobachtungen aus rein praktischen Gründen eingeführt, erscheint sohin als das Genauigkeitsmaß des Praktikers auch in theoretischer Hinsicht genügend begründet. Seine Bezeichnung als „mittlerer" Fehler ist jedoch nicht glücklich gewählt, denn einerseits wird von hervorragenden Mathematikern, wie Laplace (1812), mit diesem Namen der durchschnittliche Fehler bezeichnet, anderseits ist in Wirklichkeit der wahrscheinliche Fehler nach seiner Lage unter allen Fehlern der mittelste. Dem mittleren Fehler hat man daher in manchen Schriften der

Deutlichkeit wegen die Bezeichnung „mittlerer quadratischer Fehler" zum Unterschiede von dem „mittleren linearen" oder durchschnittlichen Fehler gegeben; man könnte ihn aber mit Hinweis auf seinen größten Hoffnungswert passend den „mutmaßlichen Fehler" benennen.

Dem wahrscheinlichen Fehler gebührt vom Standpunkte des Theoretikers die größte Berechtigung, da er der einzige ist, welcher auf Grund von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen abgeleitet erscheint, indem er im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung jene Fehlergrenze angibt, für deren Überschreitung wie Nichtüberschreitung die gleiche Wahrscheinlichkeit besteht. Er findet aber weder bei dem Empiriker noch bei dem Praktiker große Beliebtheit*) und selbst Gauß wünschte ihn, als von einer Hypothese abhängig, eigentlich ganz proskribiert, und zwar aus dem Grunde, weil er nur indirekt aus dem von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen unabhängigen durchschnittlichen oder aus dem mittleren Fehler, aber nicht direkt aus den Beobachtungsfehlern berechnet werden kann. Dies mag auch die Ursache sein, warum Hansen (1867), Henke (1894), Bauschinger (1900) u. a. den wahrscheinlichen Fehler als entbehrlich erklärt haben und Bruns (1906) ihn in die Sammlung der „historischen Altertümer" verwiesen hat. Seine direkte Aufsuchung durch Abzählen der nach ihrer Größe geordneten absoluten Fehlerbeträge, wobei der mittelste als der wahrscheinliche anzusehen ist, gewährt aber nicht die nötige Sicherheit, da hiebei nicht sämtliche Fehler eine gleichmäßige Berücksichtigung finden, sondern der mittelste oder die beiden mittelsten bevorzugt erscheinen. Nachfolgend wird gezeigt werden, daß der wahrscheinliche Fehler auch ohne Zuhilfenahme des durchschnittlichen oder mittleren Fehlers direkt aus den Beobachtungsfehlern mit sehr großer Annäherung berechnet werden kann.

§ 16. Höhere Fehlerpotenzen.

In ähnlicher Weise, wie man den durchschnittlichen Fehler als den Durchschnitt der ersten Potenzen der absolut genommenen Fehler und das Quadrat des mittleren Fehlers als den Durchschnitt der zweiten Potenzen der Fehler festgestellt hat, kann man auch weitere Fehlermittel als Durchschnitt der höheren Fehlerpotenzen bilden. Analog den bekannten Ansätzen:

---

*) In den meisten exakten Wissenschaften, wie in der Astronomie, Geodäsie, Physik usw. ist der mittlere Fehler das übliche Genauigkeitsmaß; in der Schießtheorie wird neben dem mittleren Fehler auch der wahrscheinliche Fehler häufig angewendet.

$$S_1 = \vartheta = \frac{[\varepsilon]}{n}$$

$$S_2 = \mu^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n}$$

kann man, wenn m eine beliebige gerade oder ungerade Zahl bedeutet, allgemein setzen:

$$S_m = M_m^m = \frac{[\varepsilon^m]}{n}.$$

Da die Wahrscheinlichkeit für den Fehler ε ausgedrückt ist durch die Funktion

$$\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon,$$

so hat man entsprechend der Definition der höheren Potenzfehler als die Summe der Produkte der einzelnen Fehlerpotenzen $\varepsilon_1^m, \varepsilon_2^m, \ldots \varepsilon_n^m$ mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{n}$ bei dem Übergange von der endlichen auf die unendliche Anzahl von Fehlern für S_m die Entwicklung:

$$S_m = \varepsilon_1^m \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\varepsilon_1^2}\, d\varepsilon + \varepsilon_2^m \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\varepsilon_2^2}\, d\varepsilon + \cdots +$$

$$+ \varepsilon_\infty^m \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\varepsilon_\infty^2}\, d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^m \cdot e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon$$

oder

$$S_m = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^m\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon.$$

Man versteht daher allgemein unter dem mittleren Fehler der m-ten Ordnung M_m die m-te Wurzel aus der Summe der Hoffnungswerte der m-ten Potenzen aller Fehler. Setzt man wieder $h\varepsilon = t$, so folgt

$$S_m = \frac{2}{h^m \sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^m\, e^{-t^2}\, dt = \frac{2}{h^m \sqrt{\pi}} \cdot J_m$$

Um das Integral

$$J_m = \int_0^\infty t^m\, e^{-t^2}\, dt$$

aufzulösen, setze man

$$u = e^{-t^2} \qquad dv = t^m\, dt$$

$$du = -2t\, e^{-t^2} \qquad v = \frac{t^{m+1}}{m+1}$$

und bilde zunächst nach der Methode der partiellen Integration mit Hilfe der Formel $\int u\,dv = uv - \int v\,du$:

$$J_{(m)} = e^{-t^2} \cdot \frac{t^{m+1}}{m+1} \Big|_0^{\infty} + \frac{2}{m+1} \int_0^{\infty} t^{m+2} \cdot e^{-t^2}\,dt$$

oder, da das erste Glied rechter Hand für $t = o$ und $t = \infty$ verschwindet,

$$J_{(m)} = \frac{2}{m+1} \int_0^{\infty} t^{m+2} e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{m+1} \cdot J_{(m+2)}.$$

Dies gibt durch Umkehrung die Reduktionsformel:

$$J_{(m+2)} = \frac{m+1}{2} \cdot J_{(m)},$$

mittels welcher aus dem Integral mit t^m das Integral mit t^{m+2} berechnet werden kann.

Nun sind die Integrale für $m = 0$, $m = 1$ und $m = 2$ bereits bekannt, nämlich:

$$J_{(0)} = \int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$J_{(1)} = \int_0^{\infty} t \cdot e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}$$

$$J_{(2)} = \int_0^{\infty} t^2 \cdot e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

wobei die Kontrolle $J_{(2)} = \frac{1}{2} J_{(0)}$ besteht. Man kann daher sukzessive alle höheren Integrale ermitteln. Hiebei hat man aber zu unterscheiden, ob m gerade oder ungerade ist.

Für m gerade ist:

$$J_{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2^2} \sqrt{\pi}$$

$$J_{(4)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2^3} \sqrt{\pi}$$

. . . .

$$J_{(m)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (m-1)}{2^{\frac{m}{2}+1}} \sqrt{\pi}.$$

Für m ungerade ist:

$$J_{(3)} = J_{(1)} = \frac{1}{2}$$

$$J_{(5)} = 2\,J_{(3)} = 1$$

$$\cdots\cdots$$

$$J_{(m)} = \frac{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\,(m-1)}{2^{\frac{m-1}{2}}} = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,\frac{m-1}{2}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{m-1}{2}\right)!$$

Daher nimmt $S_{(m)}$ folgende Werte an:
Für m gerade:

$$S_{(m)} = \frac{1}{h^m}\cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,\ldots\,(m-1)}{2^{\frac{m}{2}}},$$

für m ungerade:

$$S_{(m)} = \frac{1}{h^m}\cdot\frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}}.$$

Da der Faktor neben $\frac{1}{h^m}$ eine für jedes m spezielle Konstante bedeutet, so kann man auch allgemein schreiben:

$$S_{(m)} = \frac{1}{h^m}\,K_{(m)}.$$

Die speziellen Formeln lauten:

$$S_{(1)} = \frac{[\varepsilon]}{n} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \vartheta \qquad S_{(2)} = \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{1}{2\,h^2} = \mu^2$$

$$S_{(3)} = \frac{[\varepsilon^3]}{n} = \frac{1}{h^3\sqrt{\pi}} \qquad S_{(4)} = \frac{[\varepsilon^4]}{n} = \frac{3}{4\,h^4}$$

$$S_{(5)} = \frac{[\varepsilon^5]}{n} = \frac{2}{h^5\sqrt{\pi}} \qquad S_{(6)} = \frac{[\varepsilon^6]}{n} = \frac{15}{8\,h^6}$$

$$S_{(7)} = \frac{[\varepsilon^7]}{n} = \frac{6}{h^7\sqrt{\pi}} \qquad S_{(8)} = \frac{[\varepsilon^8]}{n} = \frac{105}{16\,h^8}$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

Die Werte $S_{(1)}, S_{(2)}, \ldots S_{(m)}$ haben die Bedeutung von Durchschnittswerten der ersten, zweiten, . . . m-ten Potenz. Zieht man allgemein aus dem Durchschnittswerte der m-ten Fehlerpotenzen die m-te Wurzel, so erhält man die mittleren Fehler höherer Ordnung:

$$M_1 = \frac{[\varepsilon]}{n} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \vartheta \quad = 0{\cdot}56419 : h$$

$$M_2 = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \mu = 0{\cdot}70711 : h$$

$$M_3 = \sqrt[3]{\frac{[\varepsilon^3]}{n}} = \frac{1}{h}\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} = 0{\cdot}82641 : h$$

$$M_4 = \sqrt[4]{\frac{[\varepsilon^4]}{n}} = \frac{1}{h}\sqrt[4]{\frac{3}{4}} \quad = 0{\cdot}93060 : h$$

$$M_5 = \sqrt[5]{\frac{[\varepsilon^5]}{n}} = \frac{1}{h}\sqrt[5]{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} = 1{\cdot}02445 : h$$

$$M_6 = \sqrt[6]{\frac{[\varepsilon^6]}{n}} = \frac{1}{h}\sqrt[6]{\frac{15}{8}} \quad = 1{\cdot}11045 : h$$

usw.

Von diesen Formeln haben zwei besondere Bedeutung erlangt, nämlich der **durchschnittliche** Fehler ϑ für $m = 1$:

$$\vartheta = \frac{[\varepsilon]}{n} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t\,.\,e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \frac{0{\cdot}56419}{h}$$

und der mittlere Fehler μ für $m = 2$:

$$\mu^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon = \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^2\,.\,e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2h^2}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{0{\cdot}70711}{h}.$$

Setzt man $m = \frac{1}{2}$, so geht annähernd der wahrscheinliche Fehler ϱ oder der quasi-wahrscheinliche Fehler ϱ hervor, so daß analog geschrieben werden darf:

$$\sqrt{\varrho} = \frac{[\varepsilon^{\frac{1}{2}}]}{n} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varepsilon^{\frac{1}{2}}\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{h\pi}}\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}}\,.\,e^{-t^2}\, dt$$

$$\varrho = \left(\frac{[\sqrt{\varepsilon}]}{n}\right)^2 = \frac{\varkappa}{h}$$

Um zur Kenntnis der Zahl $\varkappa$ zu gelangen, ist die Bestimmung des Integrals

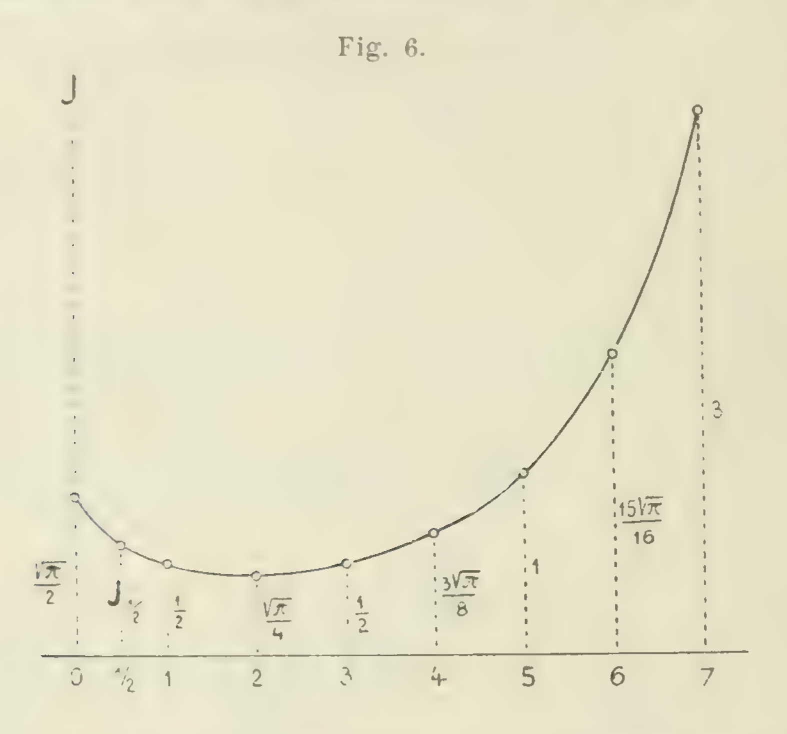
$$J_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \int_0^\infty \sqrt{t}\, e^{-t^2}\, dt$$

erforderlich, denn man hat alsdann:

$$\varkappa = \frac{4}{\pi} J^2_{\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Diese Bestimmung kann annähernd auf verschiedene Weise erfolgen. Denkt man sich die Exponenten $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ als Ab-

Fig. 6.



szissen und die zugehörigen Integrale $J_{(m)}$ als Ordinaten aufgetragen (Fig. 6), so erhält man eine Reihe von Punkten, die durch eine Kurve von der allgemeinen Gleichung $J_{(m)} = f(m)$ verbunden werden können. Durch graphische Interpolation kann man den der Abszisse $m = \frac{1}{2}$ entsprechenden Wert des Integrals $J_{\left(\frac{1}{2}\right)}$ maßstäblich entnehmen.

Die numerische Interpolation kann nach der Newtonschen Interpolationsformel erfolgen, welche allgemein

$$u_n = u_0 + n\, a_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} b_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} c_0 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} d_0 + \ldots$$

und für $u_n = J_{\left(\frac{1}{2}\right)}$, $u_0 = J_0$, $n = \frac{1}{2}$ speziell

$$J_{\left(\frac{1}{2}\right)} = J_{(0)} + \frac{1}{2} a_0 - \frac{1}{8} b_0 + \frac{1}{16} c_0 - \frac{5}{128} d_0 + \frac{7}{256} e_0 - \frac{21}{1024} f_0 + \dots$$

lautet, worin

$$a_0 = J_1 - J_0 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\pi}) = -0{\cdot}38623$$

$$b_0 = J_2 - 2J_1 + J_0 = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} - 1 = 0{\cdot}32934$$

$$c_0 = J_3 - 3J_2 + 3J_1 - J_0 = 2 - \frac{5}{4}\sqrt{\pi} = -0{\cdot}21556$$

usw. bedeutet und die einzelnen Integrale folgende Werte besitzen:

$$J_{(0)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0{\cdot}88623$$

$$J_1 = \frac{1}{2} = 0{\cdot}5$$

$$J_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4} = 0{\cdot}44311$$

$$J_{(3)} = \frac{1}{2} = 0{\cdot}5$$

$$J_4 = \frac{3}{8}\sqrt{\pi} = 0{\cdot}66467$$

$$J_5 = 1$$

$$J_6 = \frac{15}{16}\sqrt{\pi} = 1{\cdot}66168$$

$$J_{(7)} = 3$$

$$J_8 = \frac{105}{32}\sqrt{\pi} = 5{\cdot}81586$$

$$J_9 = 12$$

$$J_{10} = \frac{945}{64}\sqrt{\pi} = 26{\cdot}17139 \text{ usw.}$$

Sie kann aber auch dadurch geschehen, daß man den Zusammenhang zwischen den Funktionswerten J_m und den Argumenten m empirisch durch die Potenzreihe

$$J_m = k_0 + m k_1 + m^2 k_2 + m^3 k_3 + \dots$$

darzustellen versucht. Für $m = 0$ ist $J_m = J_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0{\cdot}88623$, folg-

lich ist das absolute Glied $k_0 = 0{\cdot}88623$. Für $m = \frac{1}{2}$ geht daher die Reihe über in

$$J_{\left(\frac{1}{2}\right)} = 0{\cdot}88623 + \frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{4} k_2 + \frac{1}{8} k_3 + \frac{1}{16} k_4 + \ldots + \frac{1}{2^n} k^n.$$

Je mehr Glieder zu dieser Reihe genommen werden, desto genauer wird offenbar $J_{\left(\frac{1}{2}\right)}$ bestimmt werden können. In dieser Reihe sind aber die n Parameter $k_1, k_2, \ldots k_n$ noch unbekannt. Um dieselben eindeutig zu berechnen, hat man zu beachten, daß jeder Punkt der Kurve $J_{(m)} = f(m)$ eine derartige Gleichung liefert, worin aber sowohl die numerischen Werte, als auch die Anzahlen der Parameter noch unbestimmt sind. Entscheidet man sich mit Rücksicht auf die anzustrebende Rechenschärfe über die Anzahl der einzuführenden Unbekannten k, so hat man zu deren Berechnung die gleiche Anzahl von Gleichungen aufzustellen. Wählt man nur eine Unbekannte k_1, so hat man auch nur die eine Gleichung:

$$J_{(1)} = 0{\cdot}88623 - k_1,$$

deren Auflösung $k_1 = \frac{1}{2} - 0{\cdot}88623 = - 0{\cdot}38623$ ergibt, womit als erster Näherungswert

$$J_{\left(\frac{1}{2}\right)} = k_0 + \frac{1}{2} k_1 = 0{\cdot}69311$$

erhalten wird, welcher dem einfachen arithmetischen Mittel von $J_{(0)}$ und $J_{(1)}$ entspricht. Entscheidet man sich für zwei Unbekannte k_1, k_2, so hat man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} J_{(1)} &= k_0 + k_1 + k_2 \\ J_{(2)} &= k_0 + 2\,k_1 + 4\,k_2 \\ \hline k_1 + k_2 &= - 0{\cdot}38623 \\ 2\,k_1 + 4\,k_2 &= - 0{\cdot}44312 \end{aligned}$$

woraus $k_1 = - 0{\cdot}55090$, $k_2 = + 0{\cdot}16467$ und als zweiter Näherungswert

$$J_{\left(\frac{1}{2}\right)} = 0{\cdot}88623 - \frac{1}{2} \cdot 0{\cdot}55090 + \frac{1}{4} \cdot 0{\cdot}16467 = 0{\cdot}65195$$

erhalten wird. Rechnet man mit drei Unbekannten, so wird:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= - 0{\cdot}38623 \\ 2\,k_1 + 4\,k_2 + 8\,k_3 &= - 0{\cdot}44312 \\ 3\,k_1 + 9\,k_2 + 27\,k_3 &= - 0{\cdot}38623 \\ \hline k_1 = - 0{\cdot}62275,\ k_2 = + 0{\cdot}27245,\ k_3 &= - 0{\cdot}03593 \end{aligned}$$

mit dem dritten Näherungswert: $J_{\left(\frac{1}{2}\right)} = 0{\cdot}63847$.

In der gleichen Weise erhält man für $m = 4$, $J_{\left(\frac{1}{2}\right)} = 0{\cdot}6305$,

für $m = 8$, $J_{\left(\frac{1}{2}\right)} = 0{\cdot}6194$, für $m = 12$, $J_{\left(\frac{1}{2}\right)} = 0{\cdot}6160$.

Der Grenzwert, nach der Newtonschen Interpolationsformel gerechnet, lautet $J_{\left(\frac{1}{2}\right)} = 0{\cdot}6127$ statt genau $J_{\left(\frac{1}{2}\right)} = 0{\cdot}6120$, womit

$$\varkappa' = \frac{1}{\pi} J^2_{\left(\frac{1}{2}\right)} = 0{\cdot}4779 \quad \text{statt} \quad \varkappa = \frac{1}{\pi} J^2_{\left(\frac{1}{2}\right)} = 0{\cdot}4769$$

erhalten wird. Entsprechend der Proportion

$$\frac{\varkappa}{\varkappa'} = \left(\frac{J}{J'_{\left(\frac{1}{2}\right)}}\right)^2 = 0{\cdot}998$$

besteht auch die Beziehung: $\varrho = 0{\cdot}998\, \varrho'$. Die auf Seite 42 angeführte Formel für den wahrscheinlichen Fehler ϱ ist daher nur eine Näherungsformel für ihren strengen Ausdruck

$$\varrho = 0{\cdot}998 \left(\frac{[\sqrt{\varepsilon}]}{n}\right)^2.$$

Für manche theoretische Untersuchungen, wie z. B. die im § 18, und in den meisten Fällen der Praxis, wie in den Beispielen der §§ 20, 29 und 32, wird sie aber unbedenklich auch ohne den Reduktionsfaktor 0·998 zur Anwendung kommen können.

§ 17. Prozentuelle Fehlergrenzen.

In dem Ausdrucke $W = \Theta(a\,h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a h} e^{-t^2} dt$ haben wir die Wahrscheinlichkeit kennen gelernt, daß ein Beobachtungsfehler zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ enthalten sei oder ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen in den Bereich $(0, a)$ falle, also die Fehlergrenze a nicht überschreite. Für den wahrscheinlichen Fehler ϱ besteht die Bestimmungsgleichung

$$W_\varrho = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho h} e^{-t^2} dt = 0{\cdot}50,$$

und aus der Tafel für die Funktion $\Theta(a\,h)$ ergibt sich das Argument:

$$\varrho\, h = 0{\cdot}47694 = \varkappa.$$

Umgekehrt erhält man entsprechend der Bestimmungsgleichung

$$W_\vartheta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\vartheta h} e^{-t^2} dt$$

aus derselben Tafel für das Argument $\vartheta h = 0{\cdot}56419$ den Funktionswert

$$W_\vartheta = 0{\cdot}57506 \text{ (rund } 0{\cdot}58\text{)},$$

welcher die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daß ein Fehler ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen zwischen den Grenzen 0 und ϑ zu liegen kommt; ebenso ergibt sich nach der Bestimmungsgleichung

$$W_\mu = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\mu h} e^{-t^2} dt$$

für den Argumentenwert $\mu h = 0{\cdot}70711$ der Funktionswert:

$$W_\mu = 0{\cdot}68268 \text{ (rund } 0{\cdot}68\text{)},$$

welcher die Wahrscheinlichkeit zum Ausdruck bringt, daß ein Fehler innerhalb der Grenzen 0 und μ fällt. Diese Betrachtung gibt Veranlassung zur Einführung von in Prozenten ausgedrückten Fehlergrenzen*).

Liegt beispielsweise eine Reihe von genau 100 Fehlern vor und ordnet man dieselben ihrer absoluten Größe nach, so gibt der wahrscheinliche Fehler entsprechend dem Funktionswerte $W_\varrho = 0{\cdot}50$ jene Fehlergrenze an, innerhalb welcher ebenso viele kleinere Fehler vorkommen, als größere außerhalb, d. h. es sind $100\, W_\varrho = 50$ Fehler kleiner und 50 Fehler größer als der wahrscheinliche Fehler ϱ. Man kann daher den wahrscheinlichen Fehler als die 50-prozentige Fehlergrenze bezeichnen und hiefür schreiben $\varrho = \alpha_{50}$. Wählt man ϑ als Fehlergrenze, so kommen theoretisch rund $100\, W_\vartheta = 58$ Fehler vor, welche kleiner und 42 Fehler, welche größer sind als ϑ; man nennt daher den durchschnittlichen Fehler die 58-prozentige Fehlergrenze und setzt $\vartheta = \alpha_{58}$. Analog bezeichnet man den mittleren Fehler als die $100\, W_\mu = 68$-prozentige Fehlergrenze $\mu = \alpha_{68}$, weil der Theorie nach von 100 Fehlern 68 vorkommen, welche kleiner als μ sind. Wuich (1877) definiert daher geradezu den mittleren Fehler dahin, „daß 0·68 Wahrscheinlichkeit oder 68% der Gewißheit vorliegt, daß der bei einer einzigen Beobachtung begangene Fehler kleiner als μ

*) Die prozentuellen Fehlergrenzen wurden zum ersten Male von Wuich („Theorie der Wahrscheinlichkeit und ihre Anwendungen im Gebiete des Schießwesens". Wien 1877) in die Ausgleichungsrechnung eingeführt. Übrigens war der österreichische Artilleriehauptmann Nikolaus Wuich (heute Se. Exzellenz der k. und k. Feldmarschalleutnant Freiherr von Wuich) einer der ersten, welcher die Theorie der Beobachtungsfehler in einer dem hehren Gegenstande würdigen und zugleich als Muster dienenden Art behandelt hat. Merkwürdigerweise findet sich aber sein Name häufiger in der ausländischen als in der deutschen Literatur mit gebührender Betonung erwähnt.

sei". In ähnlicher Weise können auch die übrigen Durchschnittsfehler definiert werden.

Enthält die Reihe nicht gerade 100 Fehler, so sind davon immerhin 50% kleiner als ϱ, 58% kleiner als ϑ und 68% kleiner als μ. Sind allgemein p% der vorhandenen Fehler kleiner als die Fehlergrenze a_p, so gibt dieser Wert jenen Fehler an, für welchen die Wahrscheinlichkeit, daß er nicht überschritten werde, gleich

$$\Theta(a_p h) = \frac{p}{100}$$

ist. So findet man für die mittleren Fehler höherer Ordnung mit Hilfe der Tafel der Funktion $\Theta(ah)$ die entsprechenden prozentuellen Fehlergrenzen:

$a h$	$\Theta(a h)$	%
$\varrho h = M_{(0 \cdot 5)} . h = 0·47694$	0·5	50
$\vartheta h = M_{(1)} . h = 0·56419$	0·57506	58
$\mu h = M_{(2)} . h = 0·70711$	0·68268	68
$M_{(3)} . h = 0·82631$	0·75741	76
$M_{(4)} . h = 0·93060$	0·81185	81
$M_{(5)} . h = 1·02445$	0·85259	85
$M_{(6)} . h = 1·11045$	0·88368	88
. . . .	.	

Als allgemeinen Ausdruck für den Durchschnittswert der Fehlerpotenzen m-ter Ordnung haben wir gefunden:

$$S_m = \frac{2}{h^m \sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^m e^{-t^2} dt.$$

und die Entwicklung dieser Formel hat gezeigt, daß der Faktor von $\frac{1}{h^m}$ eine Konstante bedeutet, so daß man setzen kann:

$$S_m h^m = K_m$$

$$h \sqrt[m]{S_m} = \sqrt[m]{K_m} = k_m$$

somit ist, da

$$\sqrt[m]{S_m} = M_m$$

gesetzt wurde:

$$h = \frac{k_m}{M_m}.$$

Substituiert man diesen Wert von h in die Formel für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler die Grenze a nicht überschreite:

$$\Theta(a h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a h} e^{-t^2} dt,$$

so erhält man allgemein:

$$\Theta\left(k_m \frac{a}{M_m}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{k_m \frac{a}{M_m}} e^{-t^2} dt$$

und speziell für $M_{0 \cdot 5} = \varrho' = \frac{\varrho}{0 \cdot 998}$, $M_1 = \vartheta$, $M_2 = \mu$,

$$k_{(0 \cdot 5)} = \varkappa' = \frac{\varkappa}{0 \cdot 998}, \quad k_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}:$$

$$\Theta\left(\varkappa \frac{a}{\varrho}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varkappa \frac{a}{\varrho}} e^{-t^2} dt$$

$$\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{a}{\vartheta}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{a}{\vartheta}} e^{-t^2} dt$$

$$\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\mu}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\mu}} e^{-t^2} dt.$$

Bezeichnet man die Verhältnisse zwischen dem gegebenen Fehler a und der 50-prozentigen, 68-prozentigen beziehungsweise 58-prozentigen Fehlergrenze mit k, nämlich:

$$k_{50} = \frac{a}{a_{50}} = \frac{a}{\varrho}$$

$$k_{68} = \frac{a}{a_{68}} = \frac{a}{\mu}$$

$$k_{58} = \frac{a}{a_{58}} = \frac{a}{\vartheta}$$

und allgemein mit k, so bestehen für die Wahrscheinlichkeiten, daß ein Fehler ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen zwischen Null und dem k-fachen wahrscheinlichen, mittleren beziehungsweise durchschnittlichen Fehler gelegen sei, die allgemein gehaltenen Formeln:

$$\Theta(\varkappa k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varkappa k} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varkappa \frac{a}{\varrho}} e^{-t^2} dt$$

$$\Theta\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{k}{\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{k\mu h} e^{-t^2}\,dt$$

$$\Theta\left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{k}{\sqrt{\pi}}} e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{k\vartheta h} e^{-t^2}\,dt$$

Die nachstehende kleine Tabelle enthält die Wahrscheinlichkeiten, daß ein Fehler den k-fachen wahrscheinlichen, mittleren und durchschnittlichen Fehler nicht überschreite. Wie diese Werte aus der Tafel I berechnet werden, zeigt folgendes Beispiel: Um die dem Argumente $k = 0·5$ entsprechenden Funktionswerte für alle drei Spalten zu erhalten, suche man in der Tafel I für die Argumente

$$\alpha h = \varkappa\, k = 0·47694 \,.\, 0·5 = 0·23847$$

$$\alpha h = \frac{1}{\sqrt{2}}\, k = 0·70711 \,.\, 0·5 = 0·35355$$

$$\alpha h = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, k = 0·56419 \,.\, 0·5 = 0·28210$$

durch Interpolation die Funktionswerte auf, welche der Reihe nach lauten:

$$\Theta(\varkappa k) \quad = \Theta(k\,\varrho\, h) = 0·2641$$

$$\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\, k\right) = \Theta(k\,\mu\, h) = 0·3829$$

$$\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\, k\right) = \Theta(k\,\vartheta\, h) = 0·3101.$$

k	$\Theta(k\varrho h)$	$\Theta(k\mu h)$	$\Theta(k\vartheta h)$
0·5	0·2641	0·3829	0·3101
1·0	0·5000	0·6827	0·5751
1·5	0·6883	0·8664	0·7686
2·0	0·8227	0·9545	0·8894
2·5	0·9082	0·9876	0·9539
3·0	0·9570	0·9973	[illegible]
3·5	0·9818	0·9995	0·9948
4·0	0·9930	0·9999	[illegible]

Im Anhange sind diese Wahrscheinlichkeiten in den Tafeln III, IV und V in größerer Ausführlichkeit gebracht, während die von Encke (1834) berechnete Tafel II noch ausführlicher als die Tafel III gehalten ist.

Beispiele. 1. Für einen Fehler a, welcher 1·5-mal so groß ist als der wahrscheinliche Fehler, gibt die Tafel III, da $k = \frac{a}{\varrho} = 1{\cdot}5$ zu setzen ist, den Funktionswert $\Theta(k \varrho h) = 0{\cdot}6883$, welcher die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daß ein Fehler zwischen die Grenzen Null und 1·5 fällt.

Unter 1000 Beobachtungen sollen daher gesetzlich 688 sich vorfinden, deren Fehler kleiner sind als der anderhalbfache wahrscheinliche Fehler. Ebenso findet man, daß unter 1000 Beobachtungsfehlern

500 vorkommen, die kleiner sind als 1 ϱ,
823 „ „ „ „ „ 2 ϱ,
957 „ „ „ „ „ 3 ϱ,
993 „ „ „ „ „ 4 ϱ,
999 „ „ „ „ „ 5 ϱ.

2. Für einen Fehler a, welcher doppelt so groß ist, als der durchschnittliche Fehler, liefert die Tafel V, da $k = \frac{a}{\vartheta} = 2$ zu setzen ist, den Funktionswert $\Theta(k \vartheta h) = 0{\cdot}8894$, welcher die Wahrscheinlichkeit zum Ausdruck bringt, daß der Fehler zwischen Null und $2\,\vartheta$ zu liegen kommt.

3. Für einen Fehler a, welcher dreimal so groß ist als der mittlere Fehler, gibt die Tafel IV, da jetzt $k = \frac{a}{\mu} = 3$ zu setzen ist, den Funktionswert $\Theta(k \mu h) = 0{\cdot}9973$, welcher die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers innerhalb der Grenzen Null und $3\,\mu$ ausdrückt.

Da diese Wahrscheinlichkeit nahezu 1 ist, weil unter 1000 Fehlern 997 diese Bedingung erfüllen, so ist es auch nahezu gewiß, denn es kann 997 gegen 3 gewettet werden, daß bei 1000 Beobachtungen ein begangener Beobachtungsfehler den dreifachen mittleren Fehler nicht überschreite.

Bezeichnet man mit $F = a$ diejenige Fehlergrenze, von der erwartet werden kann, daß sie unter 1000 Fällen nur ein einzigesmal überschritten werde, so daß man also 999 gegen 1 wetten kann, daß der Fehler F seiner Größe wegen unter 1000 Beobachtungen nur ein einzigesmal begangen werde, so hat man zunächst die Gleichung

$$\Theta(a\,h) = 0{\cdot}999$$

aufzulösen, denn es ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter 1000 Fällen der Fehler F nur einmal überschritten wird, gleich $\frac{1}{1000}$.

und die Wahrscheinlichkeit des Gegenteiles, daß die Fehler kleiner als F ausfallen, gleich $\frac{999}{1000}$. Die Θ-Tabelle liefert hiefür den Argumentenwert

$$xh = 2{\cdot}327.$$

Setzt man $2{\cdot}327 = 0{\cdot}707 \frac{a}{\mu} = 0{\cdot}564 \frac{a}{\vartheta} = 0{\cdot}477 \frac{a}{\varrho}$, so erhält man der Reihe nach die Verhältnisse:

$$\frac{a}{\mu} = 3{\cdot}3, \qquad \frac{a}{\vartheta} = 4{\cdot}1, \qquad \frac{a}{\varrho} = 4{\cdot}9,$$

d. h. der Fehler F ist das 3·3-fache des mittleren, das 4·1-fache des durchschnittlichen und das 4·9-fache des wahrscheinlichen Fehlers, und man kann daher, da nur selten mehr als 1000 Beobachtungen zur Lösung einer Aufgabe angestellt werden, annehmen (999 gegen 1 wetten), daß der zu erwartende Maximalfehler nicht größer als $3\,\mu$, oder $4\,\vartheta$, oder $5\,\varrho$ ausfallen werde

Für die Wahrscheinlichkeit W, daß ein Beobachtungsfehler vorkommt, der den s-fachen Betrag des mittleren Fehlers nicht überschreite, ergibt sich:

s	W
$s = 1$	$W = 0{\cdot}683$
2	0·9545
3	0·99728
3·5	0·999534
4	0·9999366
5	0·99999943.

Da die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich ist dem Verhältnisse der Anzahl der Fälle, die dasselbe herbeiführen, zu der Anzahl der überhaupt möglichen Fälle, so kann die Wahrscheinlichkeit W für das Vorkommen eines Fehlers innerhalb des s-fachen mittleren Fehlers durch das Verhältnis der Anzahl derjenigen Fehler ausgedrückt werden, welche den s-fachen mittleren Fehler nicht überschreiten, zu der Anzahl der vorliegenden Fehler. Unter 1000 Fehlern werden daher $n = 1000\,W$ Fehler vorkommen, welche den s-fachen mittleren Fehler nicht überschreiten. Man hat somit für

s	n
$s = 1$	$n = 683$
2	954·5
3	997·28
3·5	999·53
4	999·94
5	1000·00

setzt man fest, daß eine Beobachtung dann noch als brauchbar erklärt wird, wenn deren Fehler das Dreifache des mittleren Fehlers nicht übersteigt, so wird man unter 1000 Beobachtungen nur dreimal zu befürchten haben, daß die Beobachtungsfehler diese Grenze überschreiten, und wird man mit Berechtigung die betreffenden Beobachtungen ausscheiden dürfen. Zieht man die Grenze enger, indem man die Forderung stellt, daß bereits ein Fehler von der Größe des doppelten mittleren Fehlers nicht weiter verwendet werden darf, so wird zu erwarten stehen, daß schon unter 100 Beobachtungen 95 beibehalten und 5 verworfen werden müssen. Dehnt man die Fehlergrenze auf den vierfachen Betrag des mittleren Fehlers aus, so werden erst bei 100 000 Beobachtungen 6 unzulässige zu befürchten sein. Aber auch dann werden die übergroßen Beobachtungsfehler nicht dem groben Verschulden des Beobachters, sondern dem Spiel des Zufalles zuzuschreiben sein, der ausnahmsweise eine sehr große Anzahl gleichbezeichneter Einzelfehler hat anhäufen lassen.

§ 18. Die Zuverlässigkeit der Fehlermittel.

Zur Beurteilung der Genauigkeit einer Beobachtungsreihe kann irgend ein Fehlerdurchschnitt dienen, da aus jedem Durchschnittsfehler alle übrigen Fehlermaße abgeleitet werden können. So ergibt sich aus den im § 16 entwickelten Ausdrücken $S_1, S_2, S_3, \ldots\ldots$, welchen wir hier noch den Ausdruck für $S_{\left(\frac{1}{2}\right)}$ zugesellen, folgende Wertereihe für das Genauigkeitsmaß:

$$h_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\varkappa}{S^2_{\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

$$h_1 = \frac{1}{S_1\sqrt{\pi}} \qquad h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\,S_2}$$

$$h_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{S_3^3\sqrt{\pi}}} \qquad h_4 = \sqrt[4]{\frac{3}{4\,S_4^4}}$$

$$h_5 = \sqrt[5]{\frac{2}{S_5^5\sqrt{\pi}}} \qquad h_6 = \sqrt[6]{\frac{15}{8\,S_6^6}}$$

usw.

Wenn die Beobachtungen in unendlicher Anzahl vorhanden wären und daher die Voraussetzung gemacht werden könnte, daß die Beobachtungsfehler das Gaußsche Fehlergesetz vollkommen zum Ausdruck bringen, so würden alle diese Werte für h einander vollkommen

gleichen, denn sie würden alle fehlerlos erscheinen. Diese Voraussetzung trifft aber in Wirklichkeit aus dem Grunde nicht zu, weil unendlich viele Beobachtungen tatsächlich niemals zur Verfügung stehen, sondern nur eine endliche Anzahl, weshalb das Gaußsche Fehlergesetz nur näherungsweise zur Geltung kommen kann. Die aus einer endlichen Anzahl von Beobachtungsfehlern berechneten Werte für das Genauigkeitsmaß, nämlich:

$$h_{\frac{1}{2}} = \frac{n^2 \chi}{[\sqrt{\varepsilon}]^2}$$

$$h_1 = \frac{n}{[\varepsilon]\sqrt{\pi}} \qquad h_2 = \sqrt{\frac{n}{2[\varepsilon^2]}}$$

$$h_3 = \sqrt[3]{\frac{n}{[\varepsilon^3]\sqrt{\pi}}} \qquad h_4 = \sqrt[4]{\frac{3n}{4[\varepsilon^4]}}$$

$$h_5 = \sqrt[5]{\frac{2n}{[\varepsilon^5]\sqrt{\pi}}} \qquad h_6 = \sqrt[6]{\frac{15n}{8[\varepsilon^6]}}$$

usw.

können daher, weil jeder derselben mit einem anderen Fehler behaftet erscheint, nicht mehr gleich gesetzt werden. Derjenige von diesen auf so mannigfachen Wegen erhaltenen Werten von h, welcher mit dem kleinsten Fehler behaftet sein wird, muß als der zuverlässigste bezeichnet werden, und diejenige Formel, welche diesen Wert von h ergibt, wird als die vorteilhafteste zur Bestimmung der Genauigkeit einer Beobachtungsreihe betrachtet werden können.

Um diese wichtige Frage zu entscheiden, hat man allgemein zu untersuchen, wie groß überhaupt die Unsicherheit in der Bestimmung der verschiedenen Durchschnittswerte der Fehler ist. Bezeichnet man mit

$$S_m = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^m e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$$

den aus einer unendlichen Fehleranzahl abgeleiteten idealen oder „theoretischen" Durchschnittsfehler der m-ten Fehlerpotenzen und mit

$$S'_m = \frac{[\varepsilon^m]}{n}$$

den aus einer endlichen Anzahl von Fehlern erhaltenen empirischen oder „praktischen" Durchschnittswert, so stellt die Differenz

$$\Delta = S'_m - S_m,$$

d. i. der Unterschied zwischen dem theoretischen und dem praktischen Durchschnittswert der m-ten Fehlerpotenzen, den wahren Fehler von S_m dar. Da es unmöglich ist, diesen wahren Fehler jemals zu erhalten, so wird man sich begnügen, jenen Fehlerbetrag zu ermitteln, welcher die größte mathematische Erwartung für sich in Anspruch nehmen kann, und das ist der mittlere zu befürchtende oder mutmaßliche Fehler μ_m von S_m. Um denselben zu erhalten, bestimme man den Mittelwert μ_m^2 des Ausdruckes

$$\Delta^2 = \left(\frac{[\varepsilon^m]}{n} - S_{(m)}\right)^2$$

indem man in der unendlich oft wiederholt gedachten Reihe der in endlicher Anzahl vorkommenden Fehler ε die einzelnen ε alle mit Rücksicht auf ihre Wahrscheinlichkeit nur denkbaren Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen läßt und sodann den Durchschnitt davon bildet. Es ist

$$\Delta^2 = \frac{\varepsilon_1^{2m} + \varepsilon_2^{2m} + \cdots + \varepsilon_n^{2m}}{n^2} + 2\,\frac{\varepsilon_1^m \varepsilon_2^m + \varepsilon_1^m \varepsilon_3^m + \varepsilon_2^m \varepsilon_3^m + \cdots + \varepsilon_{n-1}^m \varepsilon_n^m}{n^2} -$$

$$- 2\,\frac{\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m + \cdots + \varepsilon_n^m}{n}\, S_{(m)} + S_{(m)}^2.$$

Um den Durchschnitt dieses Ausdruckes zu erhalten, beachte man, daß der Durchschnitt der Summe gleich ist der Summe der Durchschnitte der einzelnen Glieder. Nun ist der Durchschnittswert von ε_1^{2m}, nämlich der Durchschnitt der $2m$-ten Potenzen aller möglichen Werte des Fehlers ε_1 von Null bis Unendlich, bestimmt durch das Integral:

$$S_{(2m)} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^{2m} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon,$$

somit ist der Durchschnitt der Summe der n gleichartigen Glieder $\varepsilon_1^{2m}, \varepsilon_2^{2m}, \varepsilon_3^{2m}, \ldots \varepsilon_n^{2m}$ gleich $n\, S_{(2m)}$ und der Durchschnittswert des ersten Hauptgliedes $\frac{[\varepsilon^{2m}]}{n^2}$ ist daher:

$$\frac{n\, S_{(2m)}}{n^2} = \frac{S_{(2m)}}{n}.$$

Um den Durchschnittswert eines Produktes von der Form $\varepsilon_i^m \varepsilon_k^m$ zu ermitteln, lasse man ε_i und ε_k alle möglichen Werte durchlaufen und multipliziere sie miteinander. Nun ist der Durchschnitt der m-ten Potenzen aller möglichen Werte des Fehlers ε_i oder des Fehlers ε_k bestimmt durch:

$$S_{(m)} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^m e^{-h^2 \varepsilon^2} \, d\varepsilon ,$$

somit ist der Durchschnitt eines einzelnen Produktes: $S_{(m)} \cdot S_{(m)} = S^2_{(m)}$ und der Durchschnittswert des zweiten Hauptgliedes $2 \frac{[\varepsilon_i^m \varepsilon_k^m]}{n^2}$, welches aus $\frac{n(n-1)}{2}$ solcher Produkte besteht:

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{2}{n^2} \cdot S^2_{(m)} = \frac{n-1}{n} S^2_{(m)} .$$

Der Durchschnittswert des dritten Hauptgliedes $\frac{2[\varepsilon^m]}{n} S_{(m)}$ ist:

$$n \cdot \frac{2}{n} S_{(m)} \cdot S_{(m)} = 2 S^2_{(m)} .$$

Damit wird der Durchschnittswert von Δ^2:

$$\mu^2_m = \frac{S_{(2m)}}{n} + \frac{n-1}{n} S^2_{(m)} - 2 S^2_{(m)} + S^2_{(m)} = \frac{S_{(2m)} - S^2_{(m)}}{n} ,$$

und es ist der mittlere Fehler in der Bestimmung des Durchschnittswertes S_m der m-ten Potenzen einer endlichen Anzahl von Fehlern:

$$\mu_m = \pm \sqrt{\frac{S_{2m} - S^2_m}{n}} \text{ *)} .$$

Setzt man in diese Formel die speziellen Werte für $m = 1$, $m = 2$ und $m = \frac{1}{2}$ ein, so erhält man die den charakteristischen Fehlermaßen ϑ, μ und ϱ entsprechenden Spezialisierungen, und zwar:

1. Der mittlere Fehler μ_ϑ in der Bestimmung des durchschnittlichen Fehlers ϑ ist:

$$\mu_1 = \mu_\vartheta = \sqrt{\frac{S_2 - S^2_1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{2h^2} - \frac{1}{\pi h^2}} = \frac{1}{h\sqrt{n\pi}} \sqrt{\frac{\pi - 2}{2}}$$

$$= 0{\cdot}75551 \frac{\vartheta}{\sqrt{n}} .$$

Der durchschnittliche Fehler ist daher mit seinen mittleren Fehlergrenzen wie folgt zu schreiben:

$$\vartheta = \frac{[|\varepsilon|]}{n} \left(1 \pm \sqrt{\frac{\pi - 2}{2n}}\right) .$$

---

*) Im § 22 wird ein kürzerer Weg zur Ableitung dieser Formel angegeben werden.

2. Der mittlere Fehler μ_2 in der Bestimmung des mittleren Fehlerquadrates μ^2 ist:

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{S_4 - S_2^2}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{3}{4h^4} - \frac{1}{4h^4}} = \frac{1}{2h^2} \sqrt{\frac{2}{n}} =$$

$$= \mu^2 \sqrt{\frac{2}{n}} = 1{\cdot}41421 \frac{\mu^2}{\sqrt{n}}.$$

Um hieraus den mittleren Fehler μ_μ in der Bestimmung des mittleren Fehlers μ selbst zu erhalten, stelle man folgende Betrachtung an: Wenn μ um μ_μ fehlerhaft ist und daher richtig $\mu \pm \mu_\mu$ lauten soll, so ist für μ^2 richtig $\mu^2 \pm 2\mu\mu_\mu + \mu_\mu^2$, oder mit Rücksicht darauf, daß μ_μ um vieles kleiner ist als μ, mit hinreichender Annäherung $\mu^2 \pm 2\mu\mu_\mu$ zu setzen. Demnach ist der Fehler von μ^2, der mit μ_2 bezeichnet wurde, bei einer genügend großen Anzahl von Fehlern, ja selbst bei mäßig großem n, das 2μ-fache des Fehlers von μ und man kann den Ausdruck

$$\mu_\mu = \frac{\mu_2}{2\mu} = \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{\mu^2}{2\mu} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \mu = 0{\cdot}70711 \frac{\mu}{\sqrt{n}}$$

als den mittleren Fehler μ_μ des mittleren Fehlers μ gebrauchen.

Der mittlere Fehler ist daher mit seinen mittleren Fehlergrenzen wie folgt zu schreiben:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2n}}\right).$$

3. Der mittlere Fehler $\mu_{\frac{1}{2}}$ in der Bestimmung der Quadratwurzel des wahrscheinlichen Fehlers, also von $\sqrt{\varrho}$ ist:

$$\mu_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{S_1 - S_{(\frac{1}{2})}^2}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{h\sqrt{\pi}} - \frac{\varkappa}{h}} = \frac{1}{\sqrt{hn}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \varkappa} =$$

$$= \sqrt{\frac{\varkappa}{hn}} \sqrt{\frac{1}{\varkappa\sqrt{\pi}} - 1} = \sqrt{\frac{\varrho}{n}} \sqrt{\frac{1}{\varkappa\sqrt{\pi}} - 1},$$

folglich ist, wenn ϱ um μ_ϱ fehlerhaft ist und daher richtig $\varrho \pm \mu_\varrho$ lauten soll, im Sinne der ad 2. angestellten Betrachtung für $\sqrt{\varrho}$ richtig

$$\sqrt{\varrho \pm \mu_\varrho} = \sqrt{\varrho} \sqrt{1 \pm \frac{\mu_\varrho}{\varrho}}$$

oder mit hinreichender Annäherung

$$\sqrt{\varrho}\left(1 \pm \frac{1}{2}\frac{\mu_\varrho}{\varrho}\right) = \sqrt{\varrho} \pm \frac{1}{2}\frac{\mu_\varrho}{\sqrt{\varrho}}$$

zu setzen. Der mittlere Fehler von $\sqrt{\varrho}$ ist daher bestimmt durch:

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\frac{\mu_\varrho}{\sqrt{\varrho}}.$$

Daraus folgt der mittlere Fehler μ_ϱ des wahrscheinlichen Fehlers ϱ:

$$\mu_\varrho = 2\sqrt{\varrho}\,\mu_1 = \frac{2\varrho}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{\varkappa\sqrt{\pi}} - 1} = 0{\cdot}85544\,\frac{\varrho}{\sqrt{n}}.$$

Der wahrscheinliche Fehler ist daher mit seinen mittleren Fehlergrenzen wie folgt zu schreiben:

$$\varrho = \left(\frac{[\sqrt{|\varepsilon|}]}{n}\right)^2\left(1 \pm 2\sqrt{\frac{1-\varkappa\sqrt{\pi}}{n\varkappa\sqrt{\pi}}}\right).$$

Folgerungen:

a) Aus dem mittleren Fehler von ϑ, d. i.:

$$\mu_\vartheta = \sqrt{\frac{\pi-2}{2}}\,\frac{\vartheta}{\sqrt{n}} = 0{\cdot}75551\,\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}$$

erhält man den durchschnittlichen Fehler von ϑ:

$$\vartheta_\vartheta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu_\vartheta = \sqrt{\frac{\pi-2}{\pi}}\,\frac{\vartheta}{\sqrt{n}} = 0{\cdot}60281\,\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}$$

und den wahrscheinlichen Fehler von ϑ:

$$\varrho_\vartheta = \varkappa\sqrt{2}\,\mu_\vartheta = \varkappa\sqrt{\pi-2}\,\frac{\vartheta}{\sqrt{n}} = 0{\cdot}50958\,\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}.$$

b) Aus dem mittleren Fehler von μ, d. i.:

$$\mu_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\mu}{\sqrt{n}} = 0{\cdot}70711\,\frac{\mu}{\sqrt{n}}$$

erhält man den durchschnittlichen Fehler von μ:

$$\vartheta_\mu = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu_\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\mu}{\sqrt{n}} = 0{\cdot}56419\,\frac{\mu}{\sqrt{n}}$$

und den wahrscheinlichen Fehler von μ:

$$\varrho_\mu = \varkappa\sqrt{2}\,\mu_\mu = \varkappa\,\frac{\mu}{\sqrt{n}} = 0{\cdot}47694\,\frac{\mu}{\sqrt{n}}$$

c) Aus dem mittleren Fehler von ϱ, d. i.:

$$\mu_\varrho = 2\sqrt{\frac{1}{\varkappa\sqrt{\pi}} - 1}\,\frac{\varrho}{\sqrt{n}} = 0{\cdot}85544\,\frac{\varrho}{\sqrt{n}}$$

erhält man den durchschnittlichen Fehler von ϱ:

$$\vartheta_\varrho = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu_\varrho = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\sqrt{\frac{1}{\varkappa\sqrt{\pi}} - 1}\,\frac{\varrho}{\sqrt{n}} = 0{\cdot}68254\,\frac{\varrho}{\sqrt{n}}$$

und den wahrscheinlichen Fehler von ϱ:

$$\varrho_\varrho = \varkappa\sqrt{2}\,\mu_\varrho = \varkappa\sqrt{8}\sqrt{\frac{1}{\varkappa\sqrt{\pi}} - 1}\,\frac{\varrho}{\sqrt{n}} = 0{\cdot}57699\,\frac{\varrho}{\sqrt{n}}.$$

Faßt man z. B. den wahrscheinlichen Fehler näher ins Auge, so hat man folgende verschiedene Bestimmungen für die Fehlergrenzen des wahrscheinlichen Fehlers einer endlichen Anzahl von Beobachtungen. Da der wahrscheinliche Fehler des wahrscheinlichen Fehlers gleich ist $\varrho_\varrho = 0{\cdot}57699\,\frac{\varrho}{\sqrt{n}}$, so ist der wahrscheinliche Fehler einer endlichen Anzahl von Beobachtungen mit seinen aus den Fehlerwurzeln berechneten Fehlergrenzen gleich $\varrho \pm \varrho_\varrho$, also

$$\varrho_{\frac{1}{2}} = \varrho\left(1 \pm \frac{0{\cdot}57699}{\sqrt{n}}\right).$$

Der durchschnittliche Fehler einer Reihe von Beobachtungen mit seinem wahrscheinlichen Fehler $\varrho_\vartheta = 0{\cdot}50958\,\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}$ ist $\vartheta \pm \varrho_\vartheta$, folglich ist der wahrscheinliche Fehler einer endlichen Anzahl von Beobachtungen mit seinen aus den ersten Fehlerpotenzen berechneten Fehlergrenzen unter Hinweis auf die Beziehung $\varrho = (\varkappa\sqrt{\pi})\,\vartheta$:

$$\varrho_1 = (\varkappa\sqrt{\pi})\,\vartheta\left(1 \pm \frac{0{\cdot}50958}{\sqrt{n}}\right).$$

Der mittlere Fehler einer Reihe von Beobachtungen mit seinem wahrscheinlichen Fehler $\varrho_\mu = 0{\cdot}47694\,\frac{\mu}{\sqrt{n}}$ ist $\mu \pm \varrho_\mu$, folglich ist der wahrscheinliche Fehler einer endlichen Anzahl von Beobachtungen mit seinen aus den zweiten Fehlerpotenzen berechneten Fehlergrenzen, da $\varrho = (\varkappa\sqrt{2})\,\mu$ ist,

$$\varrho_2 = (\varkappa\sqrt{2})\,\mu\left(1 \pm \frac{0{\cdot}47694}{\sqrt{n}}\right).$$

Diese Untersuchung, bei den höheren Fehlerpotenzen fortgesetzt, liefert folgende von Gauß (1816) mitgeteilten numerischen Werte, wobei die bereits angeführten Werte der Übersichtlichkeit wegen noch-

mals und zwar in etwas geänderter Form niedergeschrieben und noch einige angefügt seien.

$$\varrho_{\frac{1}{2}} = \left(\frac{[\sqrt{\varepsilon}]}{n}\right)^2 \left(1 \pm \frac{0{\cdot}57699}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\varrho_1 = 0{\cdot}84535 \, \frac{[\varepsilon]}{n} \left(1 \pm \frac{0{\cdot}50958}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\varrho_2 = 0{\cdot}67449 \sqrt[2]{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} \left(1 \pm \frac{0{\cdot}47694}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\varrho_3 = 0{\cdot}57719 \sqrt[3]{\frac{[\varepsilon^3]}{n}} \left(1 \pm \frac{0{\cdot}49720}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\varrho_4 = 0{\cdot}51250 \sqrt[4]{\frac{[\varepsilon^4]}{n}} \left(1 \pm \frac{0{\cdot}55072}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\varrho_5 = 0{\cdot}46555 \sqrt[5]{\frac{[\varepsilon^5]}{n}} \left(1 \pm \frac{0{\cdot}63551}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\varrho_6 = 0{\cdot}42950 \sqrt[6]{\frac{[\varepsilon^6]}{n}} \left(1 \pm \frac{0{\cdot}75578}{\sqrt{n}}\right)$$

. . . .

$$\varrho_9 = 0{\cdot}35704 \sqrt[9]{\frac{[\varepsilon^9]}{n}} \left(1 \pm \frac{1{\cdot}44391}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\varrho_{10} = 0{\cdot}33996 \sqrt[10]{\frac{[\varepsilon^{10}]}{n}} \left(1 \pm \frac{1{\cdot}82506}{\sqrt{n}}\right)$$

usw.

Aus dieser Zusammenstellung ist zu ersehen, daß die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers einer endlichen Anzahl von Beobachtungen aus den Fehlerquadraten in den engsten Grenzen eingeschlossen, also die sicherste ist, weil aus dieser Bestimmungsart der wahrscheinliche Fehler mit dem geringsten wahrscheinlichen Fehler behaftet erscheint. Selbst die direkte Bestimmung aus den Fehlerwurzeln ist unsicherer als die Bestimmung aus den Fehlerquadraten. Dasselbe ist auch bei dem mittleren und durchschnittlichen Fehler der Fall. Denn es ist

$$\mu_\varrho = 0{\cdot}85544 \frac{\varrho}{\sqrt{n}} \text{ folglich: } \mu_{1,2} = \frac{\varrho}{\varkappa\sqrt{2}}\left(1 \pm \frac{0{\cdot}85544}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\mu_\vartheta = 0{\cdot}75551 \frac{\vartheta}{\sqrt{n}} \quad „ \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\vartheta\left(1 - \frac{0{\cdot}75551}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\mu_\mu = 0{\cdot}70711 \frac{\mu}{\sqrt{n}} \quad „ \quad \mu_2 = \mu\left(1 + \frac{0{\cdot}70711}{\sqrt{n}}\right) \text{ usw.}$$

ferner:

$$\vartheta_\varrho = 0{\cdot}68254 \frac{\varrho}{\sqrt{n}} \quad „ \quad \vartheta_{1,2} = \frac{\varrho}{\varkappa\sqrt{\pi}}\left(1 \pm \frac{0{\cdot}68254}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\vartheta_\vartheta = 0{\cdot}60281 \frac{\vartheta}{\sqrt{n}} \quad „ \quad \vartheta_1 = \vartheta\left(1 \pm \frac{0{\cdot}60281}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\vartheta_\mu = 0{\cdot}56419 \frac{\mu}{\sqrt{n}} \quad „ \quad \vartheta_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu\left(1 \pm \frac{0{\cdot}56419}{\sqrt{n}}\right) \text{ usw.}$$

Um bei Anwendung der verschiedenen Fehlerpotenzen ein gleich zuverlässiges Resultat zu erhalten, wird man bei Benützung der Fehlerquadrate die geringste Anzahl von Beobachtungen benötigen. Entsprechend den Proportionen

$$\frac{0{\cdot}47694}{\sqrt{100}} = \frac{0{\cdot}57699}{\sqrt{n}} = \text{usw.}$$

geben z. B. 100 Beobachtungsfehler bei Benützung der Fehlerquadrate ein ebenso genaues Resultat, wie:

$100\left(\frac{0{\cdot}57699}{0{\cdot}47694}\right)^2 = 146$ Fehler bei Benützung der Fehlerwurzeln

$100\left(\frac{0{\cdot}50958}{0{\cdot}47694}\right)^2 = 114$ „ „ „ „ 1. Fehlerpotenzen

$100\left(\frac{0{\cdot}49720}{0{\cdot}47694}\right)^2 = 109$ „ „ „ „ 3. „

$100\left(\frac{0{\cdot}55072}{0{\cdot}47694}\right)^2 = 133$ „ „ „ „ 4. „

$100\left(\frac{0{\cdot}63551}{0{\cdot}47694}\right)^2 = 178$ „ „ „ „ 5. „

$100\left(\frac{0{\cdot}75578}{0{\cdot}47694}\right)^2 = 251$ „ „ „ „ 6. „

. . . .

$100\left(\frac{1{\cdot}44391}{0{\cdot}47694}\right)^2 = 917$ „ „ „ „ 9. „

$100\left(\frac{1{\cdot}82506}{0{\cdot}47694}\right)^2 = 1464$ „ „ „ „ 10. „

Da die Bestimmung aus den ersten Fehlerpotenzen, d. i. den absoluten Fehlerwerten, nicht viel weniger genau, aber viel einfacher und bequemer ist als die aus den Fehlerquadraten, so schlägt schon Gauß (1816) vor, daß man sich derselben immerhin bedienen mag, „wenn man nicht die Summe der Quadrate der Fehler sonst schon kennt, oder zu kennen wünscht".

Auch für das Genauigkeitsmaß h einer endlichen Anzahl von Beobachtungen ist es nicht gleichgültig, aus welchem direkt berechneten Durchschnittsfehler es abgeleitet wird. Allgemein ist

$$h = \sqrt[m]{\frac{K_m}{S_m}},$$

wo $K_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^m e^{-t^2} dt$ eine Konstante bedeutet, welche für

$$m \text{ gerade: } \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (m-1)}{\sqrt{2^m}},$$

$$m \text{ ungerade: } \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \frac{m-1}{2}}{\sqrt{\pi}}$$

ist. Folglich sind die wahrscheinlichen Grenzen von h, berechnet aus den ersten Fehlerpotenzen ($m = 1$):

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi} S_1 \left(1 \mp \frac{\sqrt{\pi - 2}}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{n}{\sqrt{\pi}[\varepsilon]} \left(1 \pm \frac{\sqrt{\pi - 2}}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= 0{\cdot}56419 \frac{n}{[\varepsilon]} \left(1 \pm \frac{0{\cdot}50958}{\sqrt{n}}\right) = h \left(1 \pm \frac{0{\cdot}50958}{\sqrt{n}}\right),$$

oder aus den zweiten Fehlerpotenzen ($m = 2$):

$$h_2 = \frac{1}{\sqrt{2 S_2} \left(1 \mp \frac{\varkappa}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{[\varepsilon^2]}} \left(1 \pm \frac{\varkappa}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= 0{\cdot}70711 \sqrt{\frac{n}{[\varepsilon^2]}} \left(1 \pm \frac{0{\cdot}47694}{\sqrt{n}}\right) = h \left(1 \pm \frac{0{\cdot}47694}{\sqrt{n}}\right),$$

oder aus den dritten Fehlerpotenzen ($m = 3$):

$$h_3 = \frac{1}{\sqrt[6]{\pi} \sqrt[3]{S_3} \left(1 \mp \frac{\varkappa}{6\sqrt{n}} \sqrt{15\pi - 8}\right)} = \frac{1}{\sqrt[6]{\pi}} \sqrt[3]{\frac{n}{[\varepsilon^3]}} \left(1 \pm \frac{\varkappa}{6\sqrt{n}} \sqrt{15\pi - 8}\right) =$$

$$= 0{\cdot}82621 \sqrt[3]{\frac{n}{[\varepsilon^3]}} \left(1 \pm \frac{0{\cdot}49720}{\sqrt{n}}\right) = h \left(1 \pm \frac{0{\cdot}49720}{\sqrt{n}}\right) \text{ usw.}$$

Die Bestimmungen von h aus den verschiedenen Durchschnittsfehlern besitzen daher folgende wahrscheinliche Fehler:

$$r_{\frac{1}{2}} = 0{\cdot}57699 \frac{h}{\sqrt{n}}$$

$$r_1 = 0{\cdot}50958 \frac{h}{\sqrt{n}}$$

$$r_2 = 0{\cdot}47694 \frac{h}{\sqrt{n}}$$

$$r_3 = 0{\cdot}49720 \frac{h}{\sqrt{n}}$$

$$r_4 = 0{\cdot}55072 \frac{h}{\sqrt{n}}$$

usw.

Wie nicht anders zu erwarten stand, ist auch der mit Benützung der Fehlerquadrate gewonnene Wert von h mit dem kleinsten wahrscheinlichen, aber auch mit dem kleinsten mittleren und durchschnittlichen Relativfehler behaftet und es ist daher die Bestimmungsart mit Hilfe des mittleren (mutmaßlichen) Fehlers die am meisten Zutrauen verdienende.

Die Bestimmungsweisen aus höheren Fehlerpotenzen, welche neben ihrem geringen Genauigkeitsgrad auch einen schwerfälligen Rechenapparat erfordern, kommen aus diesen Gründen praktisch nicht in Betracht. Ist die Bestimmung der Genauigkeit einer Beobachtungsreihe aus den Fehlerquadraten die sicherste, so erscheint die aus den linearen Fehlern als die bequemste und die aus den Fehlerwurzeln als die natürlichste. Wenn aber die Anzahl der Beobachtungsfehler sehr groß ist, so verschwinden fast die Unterschiede zwischen den drei charakteristischen Bestimmungsweisen, so daß es dann ziemlich gleichgültig ist, auf welcher Basis die Genauigkeitsbestimmungen vorgenommen werden.

Die Vorzüge der drei charakteristischen Fehlermaße zusammenfassend, können wir daher sagen:

Der durchschnittliche Fehler, das Genauigkeitsmaß des Empirikers, gewährt die größte Anschaulichkeit und die bequemste Rechnung.

Der mittlere Fehler, das Genauigkeitsmaß des Praktikers, besitzt, indem er dem Zusammentreffen der begangenen Fehler die meiste Wahrscheinlichkeit verspricht, den größten Hoffnungswert und empfiehlt sich auch durch die seiner Bestimmung innewohnende geringste Unsicherheit.

Der wahrscheinliche Fehler, das Genauigkeitsmaß des Theoretikers, berücksichtigt am ersichtlichsten die innere Natur der zufälligen Beobachtungsfehler.

Der durchschnittliche Fehler ist das einfachste, der mittlere Fehler das zweckmäßigste, der wahrscheinliche Fehler das natürlichste Fehlermaß.

§ 19. Genauigkeit des durch Abzählen bestimmten wahrscheinlichen Fehlers.

Im § 17 haben wir die Fehlerdurchschnittswerte als Fehlergrenzen kennen gelernt, innerhalb welcher eine gewisse Prozentzahl von Fehlern vorkommen, welche kleiner sind, als die betreffenden Fehlerdurchschnitte selbst. So sollen in einer vorliegenden Reihe von Beobachtungsfehlern gesetzmäßig 50 % kleiner als der wahrscheinliche, 58 % kleiner als der durchschnittliche und 68 % kleiner als der mittlere Fehler ausfallen. Man kann daher diese Kenntnis dazu benützen, irgend einen Fehlerdurchschnitt aus einer Reihe von Fehlern, welche ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen bloß ihrer absoluten Größe nach geordnet sind, durch Abzählen herauszusuchen, wobei man sich eventuell auch der Interpolation bedienen kann.

Allein schon der Umstand, daß bei diesem Verfahren die Fehler keine gleichmäßige Behandlung erfahren, läßt vermuten, daß die Bestimmungsweise durch direktes Aufsuchen im Wege des Abzählens dem üblichen analytischen Verfahren an Genauigkeit weit nachstehen muß, welche Vermutung durch folgende spezielle, von Jouffret (1873) zum ersten Male durchgeführte Genauigkeitsbestimmung des wahrscheinlichen Fehlers eine Bestätigung findet.

Ist ϱ der wahre Wert und ϱ_a der durch bloßes Abzählen erhaltene Wert des wahrscheinlichen Fehlers, und wird der bei der Bestimmungsart durch Abzählen begangene Fehler mit f bezeichnet, so ist

$$f = \varrho - \varrho_a = \frac{z}{h} - \varrho_a \qquad (1)$$

Seiner Definition entsprechend, ist der durch Abzählen erhaltene wahrscheinliche Fehler der mittelste aller Beobachtungsfehler. Ist n die Anzahl der Fehler, so sind $\frac{n}{2}$ Fehler kleiner und $\frac{n}{2}$ größer als ϱ_a, wobei n bei unendlich vielen Fehlern immer als eine gerade Zahl angesehen werden kann. Die Wahrscheinlichkeit, daß irgend ein Beobachtungsfehler zwischen den Grenzen 0 und ϱ falle oder kleiner als ϱ_a sei, wird ausgedrückt durch die Funktion

$$\Theta(\varrho_a h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho_a h} e^{-t^2}\, dt,$$

und es ist die Wahrscheinlichkeit des Gegenteiles, daß irgend ein Beobachtungsfehler größer als ϱ_a sei, gegeben durch

$$1 - \Theta(\varrho_a h),$$

folglich ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Hälfte der vorhandenen Fehler, d. i. $\frac{n}{2}$ kleiner als ϱ_a sei, nach dem Satze von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit:

$$w_1 = \left\{\Theta(\varrho_a h)\right\}^{\frac{n}{2}},$$

und die Wahrscheinlichkeit des Gegenteiles, daß $\frac{n}{2}$ Fehler größer als ϱ_a seien:

$$w_2 = \left\{1 - \Theta(\varrho_a h)\right\}^{\frac{n}{2}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß der durch Abzählen ermittelte wahrscheinliche Fehler ϱ_a der wahre Wert des wahrscheinlichen Fehlers ϱ sei, also genau in die Mitte der Fehlerreihe falle, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, daß $\frac{n}{2}$ Fehler kleiner und $\frac{n}{2}$ größer als ϱ_a seien. Diese Wahrscheinlichkeit ist aber ausgedrückt durch das Produkt:

$$W = w_1 w_2 = \left\{\Theta(\varrho_a h)\right\}^{\frac{n}{2}} \cdot \left\{1 - \Theta(\varrho_a h)\right\}^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \left\{\Theta(\varrho_a h) - \overline{\Theta(\varrho_a h)}^2\right\}^{\frac{n}{2}} = \varphi(f).$$

Wird hier nach (1) für $\varrho_a h = \varkappa - f h = \varkappa - f \frac{\varkappa}{\varrho}$ substituiert und nach der Taylorschen Reihe bis auf das quadratische Glied entwickelt, so ergibt sich:

$$\Theta(\varrho_a h) = \Theta\left(\varkappa - f \frac{\varkappa}{\varrho}\right) = \Theta(\varkappa) - \Theta'(\varkappa) \cdot f \frac{\varkappa}{\varrho} + \Theta''(\varkappa) \cdot \frac{1}{2} f^2 \frac{\varkappa^2}{\varrho^2}.$$

Es ist aber:

$$\Theta(\varrho h) = \Theta(\varkappa) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varkappa} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}$$

$$\Theta'(\varkappa) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}\Big|_{t=\varkappa} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\varkappa^2}$$

$$\Theta''(\varkappa) = -\frac{4t}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}\Big|_{t=\varkappa} = -\frac{4\varkappa}{\sqrt{\pi}} e^{-\varkappa^2},$$

folglich:

$$\Theta(\varrho_a, h) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\chi}{\varrho} \cdot e^{-\chi^2} \cdot f - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\chi^3}{\varrho^2} \cdot e^{-\chi^2} \cdot f^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \alpha f - \beta f^2),$$

worin $\alpha = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\chi}{\varrho} e^{-\chi^2}$ und $\beta = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\chi^3}{\varrho^2} e^{-\chi^2}$ gesetzt ist.

Es ist ferner, wenn wieder nur bis auf die quadratischen Glieder gegangen wird:

$$\Theta(\varrho_a, h)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \alpha f + \frac{\alpha^2}{2} f^2 - \beta f^2\right)$$

und

$$\Theta(\varrho_a, h) - \Theta(\varrho_a, h)^2 = \frac{1}{4}(1 - \alpha^2 f^2)$$

somit ist

$$\varphi(f) = W = \frac{1}{2^n}(1 - \alpha^2 f^2)^{\frac{n}{2}}.$$

oder, da nach der allgemeinen Formel $\psi(z) = e^{lg\,\psi(z)}$ ist, auch

$$\varphi(f) = \frac{1}{2^n} \cdot e^{\frac{n}{2} lg(1 - \alpha^2 f^2)}$$

und durch Reihenentwicklung, wobei nur das erste Glied beibehalten wird,

$$\varphi(f) = \frac{1}{2^n} \cdot e^{-\frac{n}{2}\alpha^2 f^2}.$$

Setzt man in diesen Ausdruck $f = 0$, so erhält man für die Wahrscheinlichkeit, den Fehler Null zu begehen:

$$\varphi(0) = \frac{1}{2^n} = c,$$

also ist:

$$\varphi(f) = \varphi(0) \cdot e^{-\frac{n}{2}\alpha^2 f^2} = c\, e^{-\frac{n}{2}\alpha^2 f^2}.$$

woraus für das Genauigkeitsmaß in der Bestimmung von ϱ_a auf dem Wege des Abzählens der Wert

$$h_{\varrho_a} = \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \alpha = \sqrt{\frac{8\,n}{\pi}} \cdot \frac{\chi}{\varrho} e^{-\chi^2} = \frac{\chi}{0{,}78672} \frac{\sqrt{n}}{\varrho}$$

und als wahrscheinlicher Fehler ϱ_{ϱ_a} in der Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers ϱ_a der Wert

$$\varrho_{\varrho_a} = \frac{\varkappa}{h_{\varrho_a}} = 0{\cdot}78672 \frac{\varrho}{\sqrt{n}}$$

hervorgeht. Es sind daher die wahrscheinlichen Grenzen von ϱ_a:

$$\varrho'_a = \varrho_a\left(1 \pm \frac{0{\cdot}78672}{\sqrt{n}} \frac{\varrho}{\varrho_a}\right).$$

Setzt man in der Klammer für das darin unbekannte ϱ näherungsweise $\varrho = \varrho_a$, was ohne weiteres zulässig ist, so wird

$$\varrho'_a = \varrho_a\left(1 \pm \frac{0{\cdot}78672}{\sqrt{n}}\right) \qquad (2)$$

Das entsprechende Genauigkeitsmaß liegt in den Grenzen:

$$h'_a = \frac{\varkappa}{\varrho'_a} = \frac{\varkappa}{\varrho_a} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{0{\cdot}78672}{\sqrt{n}}} = h_a\left(1 \mp \frac{0{\cdot}78672}{\sqrt{n}}\right),$$

es besitzt daher die Bestimmung des Genauigkeitsmaßes im Wege des Abzählens, wenn man jetzt wieder im Einklange mit den Werten auf S. 76 $h_a = h$ setzt, den wahrscheinlichen Fehler

$$r_a = 0{\cdot}78672 \frac{h}{\sqrt{n}}.$$

Um auf dem Wege des Abzählens ein gleich zuverlässiges Resultat zu erhalten, wie bei Anwendung der Fehlerquadrate unter Zugrundelegung von 100 Beobachtungsfehlern, wird man eine Anzahl von Beobachtungen heranziehen müssen, welche sich analog wie die im § 18, S. 74 erhaltenen Resultate wie folgt berechnet:

$$100\left(\frac{0{\cdot}78672}{0{\cdot}47694}\right)^2 = 272^{*}).$$

Demnach verhalten sich die Zuverlässigkeiten in der Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers aus den verschiedenen Fehlerpotenzen zu der Bestimmung im Wege des Abzählens wie folgt:

$$\varrho \quad : \quad \varrho_1 \quad : \quad \varrho_2 \quad : \quad \varrho_3 \quad : \quad \varrho_4 \quad : \quad \varrho_5 \quad : \quad \varrho_6 \quad : \quad \varrho_a \quad =$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\varkappa\sqrt{\pi}} - 1\right) : \pi - 2 : 1 : \frac{15\pi - 8}{36} : \frac{4}{3} : \frac{945\pi - 128}{1600} : \frac{113}{45} : \frac{\pi}{8\varkappa^2} e^{2\varkappa^2} =$$

$$146 : 114 : 100 : 109 : 133 : 178 : 251 : 272.$$

Hieraus ist zu ersehen, daß der Methode der Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers wie auch der übrigen Genauigkeitsmaße

*) Diese Anzahl wird irrtümlicherweise von Gauß („Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen" in der „Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften", 1816. Art. 7) zu 247 angegeben.

durch Abzählen ein sehr geringer Grad von Verläßlichkeit innewohnt, da sie noch ungenauer ist, als die Bestimmung aus $[\varepsilon^6]$.

§ 20. Beispiel.

Um die vorstehenden Untersuchungen an einem Zahlenbeispiele anzuwenden, ist es notwendig, einen Fall zu betrachten, in welchem zweifellos wahre Fehler vorkommen. Ein solcher Fall liegt vor bei der Bestimmung der Winkelsumme eines Dreieckes. Mißt man die drei Winkel α, β, γ eines sphärischen Dreieckes und bedeutet E den sphärischen Exzeß, so hat die Bedingung zu bestehen:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 + E$$

Weicht die Summe der drei Winkel von dem theoretischen Sollbetrage $180^0 + E$ ab, so ist diese Abweichung als ein wahrer Beobachtungsfehler aufzufassen.

Als Beispiel diene die von Bessel (1838) bei der Gradmessung in Ostpreußen durchgeführte Messung von 22 Dreiecksabschlüssen, welche folgende 22 wahre Widersprüche $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - (180^0 + E)$ ergaben:

Nr.	ε	$\lvert\varepsilon\rvert$ geordnet	$\varepsilon\varepsilon$	$\sqrt{\lvert\varepsilon\rvert}$
1	+ 0″364	0″000	0·0000	0·0000
2	+ 0·926	0·005	0·0000	0·0707
3	— 0·510	0·364	0·1325	0·6033
4	— 1·460	0·418	0·1747	0·6465
5	— 0·953	0·510	0·2601	0·7141
6	— 1·399	0·556	0·3091	0·7457
7	+ 1·758	0·587	0·3446	0·7662
8	+ 0·917	0·723	0·5227	0·8503
9	+ 0·556	0·917	0·8409	0·9576
10	— 0·005	0·926	0·8575	0·9623
11	— 0·587	0·953	0·9082	0·9762
12	0·000	0·980	0·9604	0·9899
13	— 1·357	1·352	1·8279	1·1648
14	+ 1·859	1·357	1·8414	1·1686
15	— 0·418	1·399	1·9572	1·1828
16	+ 1·679	1·460	2·1316	1·2083
17	+ 1·620	1·620	2·6244	1·2728
18	+ 1·623	1·623	2·6341	1·2740
19	+ 1·666	1·666	2·7756	1·2907
20	— 0·723	1·679	2·8190	1·2958
21	— 1·352	1·758	3·0906	1·3259
22	— 0·980	1·859	3·4559	1·3635
	+ 12·968	22·712	30·4684	20·8[illegible]
	— 9·744			

Direkt aus den Beobachtungsfehlern wird erhalten:

Der durchschnittliche Fehler: $\vartheta = \frac{[\varepsilon]}{n} = \frac{22 \cdot 712}{22} = 1 \cdot 0324$,

der mittlere Fehler: $\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{30 \cdot 4684}{22}} = 1 \cdot 1768$,

der wahrscheinliche Fehler: $\varrho = \left(\frac{[\sqrt{\varepsilon}]}{n}\right)^2 = \left(\frac{20 \cdot 8300}{22}\right)^2 = 0 \cdot 8965$.

Durch Aufsuchen unter den nach ihrer absoluten Größe geordneten Fehlerbeträgen ergibt sich, da von den angeführten 22 Fehlern 50% dem arithmetischen Mittel des 11. und 12. Fehlers, 58% dem 13. Fehler und 68% dem 15. Fehler entspricht,

als durchschnittlicher Fehler: $\vartheta_a = 1 \cdot 352$,
als mittlerer Fehler: $\mu_a = 1 \cdot 399$,
als wahrscheinlicher Fehler: $\varrho_a = 0 \cdot 966$.

Das Genauigkeitsmaß ist, je nachdem es aus ϑ, μ oder ϱ berechnet wird:

$$h_\vartheta = 0 \cdot 546 \left(1 + \frac{0 \cdot 510}{\sqrt{22}}\right)$$

$$h_\mu = 0 \cdot 601 \left(1 + \frac{0 \cdot 477}{\sqrt{22}}\right)$$

$$h_\varrho = 0 \cdot 532 \left(1 + \frac{0 \cdot 577}{\sqrt{22}}\right).$$

Hievon ist die aus dem mittleren Fehler gewonnene Bestimmung, wie im § 11 gezeigt wurde und hier auch ziffermäßig hervorgeht, die sicherste.

Die Untersuchung der Fehlerreihe in bezug auf die Erfüllung der theoretischen Bedingungen $2\mu^2 : \vartheta^2 = \pi$ und $(\varrho : \varkappa\vartheta)^2 = \pi$ läßt diese Reihe nicht als eine das Gaußsche Fehlergesetz gut befolgende erkennen, denn sie liefern:

$$2\frac{\mu^2}{\vartheta^2} = 2 \cdot 599 \text{ und } \left(\frac{\varrho}{\varkappa\vartheta}\right)^2 = 3 \cdot 315 \quad \text{anstatt} \quad \pi = 3 \cdot 142.$$

Speziell für den wahrscheinlichen Fehler wird auf indirektem Wege erhalten:

$$\varrho_1 = 0 \cdot 84535\, \vartheta = 0 \cdot 8727,$$
$$\varrho_2 = 0 \cdot 67449\, \mu = 0 \cdot 7937.$$

Zur Beurteilung der Unsicherheit in der Bestimmung der charakteristischen Fehlermaße wählen wir zunächst den mittleren Fehler und erhalten als

mittleren Fehler von ϑ . . . $\mu_\vartheta = \frac{0.75551}{\sqrt{22}} \vartheta = 0.1663,$

" " " μ . . . $\mu_\mu = \frac{0.70711}{\sqrt{22}} \mu = 0.1774,$

" " " ϱ . . . $\mu_\varrho = \frac{0.85544}{\sqrt{22}} \varrho = 0.1635.$

Das Resultat ist dann wie folgt zu schreiben:

$\vartheta' = 1.0324 \pm 0.1663,$ Unsicherheit: 16.11%

$\mu' = 1.1768 \pm 0.1774,$ " 15.08%

$\varrho' = 0.8965 \pm 0.1635,$ " 18.24%,

wobei die Unsicherheit in Prozenten beispielsweise wie folgt erhalten wird:

$$100 \frac{0.1635}{0.8965} = 18.24.$$

Wählt man zur Beurteilung der Unsicherheit in der Bestimmung der charakteristischen Fehlermaße den durchschnittlichen Fehler, so erhält man als

durchschnittlichen Fehler von ϑ . . . $\vartheta_\vartheta = \frac{0.60281}{\sqrt{22}} \vartheta = 0.1327,$

" " " μ . . . $\vartheta_\mu = \frac{0.56419}{\sqrt{22}} \mu = 0.1416,$

" " " ϱ . . . $\vartheta_\varrho = \frac{0.68254}{\sqrt{22}} \varrho = 0.1305$

mit den Resultaten:

$\vartheta'' = 1.0324 \pm 0.1327,$ Unsicherheit: 12.85%

$\mu'' = 1.1768 \pm 0.1416,$ " 12.05%

$\varrho'' = 0.8965 \pm 0.1305,$ " 14.55%.

Wählt man den wahrscheinlichen Fehler, so erhält man analog als

wahrscheinlichen Fehler von ϑ . . . $\varrho_\vartheta = \frac{0.50958}{\sqrt{22}} \vartheta = 0.1122,$

" " " μ . . . $\varrho_\mu = \frac{0.47694}{\sqrt{22}} \mu = 0.1197,$

" " " ϱ . . . $\varrho_\varrho = \frac{0.57699}{\sqrt{22}} \varrho = 0.1103,$

mit den Resultaten:

$\vartheta''' = 1.0324 \pm 0.1122,$ Unsicherheit: 10.86%

$\mu''' = 1.1768 \pm 0.1197,$ " 10.17%

$\varrho''' = 0.8965 \pm 0.1103,$ " 12.30%.

Die drei charakteristischen Fehler einer einzelnen Winkelsumme mit ihren entsprechenden Unsicherheiten lauten demnach:

$$\mu = 1{\cdot}1768 \pm 0{\cdot}1774, \qquad \text{Unsicherheit: } 15{\cdot}08\,\%$$
$$\vartheta'' = 1{\cdot}0324 \pm 0{\cdot}1327, \qquad \text{"} \quad 12{\cdot}85\,\%$$
$$\varrho''' = 0{\cdot}8965 \pm 0{\cdot}1103, \qquad \text{"} \quad 12{\cdot}30\,\%.$$

Die spezielle Betrachtung des wahrscheinlichen Fehlers ergibt aus den verschiedenen Bestimmungsweisen folgende, mit den wahrscheinlichen Fehlergrenzen versehenen Beträge:

Aus den Fehlerwurzeln: $\varrho_{\frac{1}{2}} = 0{\cdot}8965\left(1 \pm \frac{0{\cdot}57699}{\sqrt{22}}\right) = 0{\cdot}8965 \pm 0{\cdot}1103,$

aus den 1. Fehlerpotenzen: $\varrho_1 = 0{\cdot}8727\left(1 \pm \frac{0{\cdot}50958}{\sqrt{22}}\right) = 0{\cdot}8727 \pm 0{\cdot}0948,$

aus den 2. Fehlerpotenzen: $\varrho_2 = 0{\cdot}7937\left(1 \pm \frac{0{\cdot}47694}{\sqrt{22}}\right) = 0{\cdot}7937 \pm 0{\cdot}0807,$

durch Abzählen: $\varrho_a = 0{\cdot}9665\left(1 \pm \frac{0{\cdot}78672}{\sqrt{22}}\right) = 0{\cdot}9665 \pm 0{\cdot}1621.$

Hievon ist die Bestimmungsart ϱ_2 die vorteilhafteste.

Die Ursache der Widersprüche in den auf verschiedenen Wegen erhaltenen Ergebnissen für ϱ liegt darin, daß die dem Gaußschen Fehlergesetze zu Grunde gelegten idealen Voraussetzungen nicht genau zutreffen, weil in der vorliegenden endlichen Fehlerreihe nicht alle möglichen Fehler, wie es das theoretische Gesetz der Fehlerhäufigkeit verlangt, vorkommen. Es geht das bloß näherungsweise Genügen des Fehlergesetzes äußerlich auch schon daraus hervor, daß im vorliegenden Beispiele trotz der nahezu gleichen Anzahl der positiven und negativen Fehler (nämlich 10 positive, 11 negative und 1 Fehler Null) die Summe aller positiven Fehler $+12''968$ und die Summe aller negativen Fehler $-9''744$ beträgt.

§ 21. Genauigkeitsbestimmung des einfachen arithmetischen Mittels.

Werden behufs Bestimmung der Unbekannten X die Beobachtungen

$$l_1,\ l_2,\ \ldots\ l_n$$

in der Anzahl n angestellt, so ist das arithmetische Mittel $x = \frac{[l]}{n}$ als der wahrscheinlichste Wert von X anzusehen. Den wahren Wert des Unterschiedes

$$X - x = \xi$$

oder den wahren Fehler des arithmetischen Mittels wird man wohl niemals in Erfahrung bringen können, man wird sich daher mit dem wahrscheinlichsten Werte desselben begnügen müssen.

Um ein Urteil über die Größe des mittleren Fehlers des arithmetischen Mittels zu gewinnen, hat man die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, mit welcher das Erscheinen des Fehlers ξ zwischen den Grenzen ξ und $\xi + d\xi$ zu erwarten steht. Diese unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, welche in der Form $\varphi(\xi)\,d\xi$ ausgedrückt erscheint, ist offenbar gleich der Wahrscheinlichkeit, mit welcher sich das Zusammentreffen der wahren Beobachtungsfehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ erwarten läßt, wofür im § 11, S. 41 folgender Ausdruck abgeleitet wurde:

$$\Omega = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,d\varepsilon\right)^n e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]} \tag{1}$$

Es besteht daher auch die Gleichung

$$\Omega = \varphi(\xi)\,d\xi.$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= X - l_1 & \varepsilon_1^2 &= X^2 - 2Xl_1 + l_1^2\\
\varepsilon_2 &= X - l_2 & \varepsilon_2^2 &= X^2 - 2Xl_2 + l_2^2\\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varepsilon_n &= X - l_n & \varepsilon_n^2 &= X^2 - 2Xl_n + l_n^2
\end{aligned}$$

$$\text{Summe: } [\varepsilon\varepsilon] = nX^2 - 2X[l] + [ll]$$

Setzt man hierin $[l] = nx$, so wird

$$[\varepsilon\varepsilon] = n\left(X^2 - 2Xx + \frac{[ll]}{n}\right)$$

oder:

$$[\varepsilon\varepsilon] = n\left\{(X - x)^2 - x^2 + \frac{[ll]}{n}\right\}.$$

Somit ist mit Rücksicht auf (1):

$$\begin{aligned}
\varphi(\xi)\,d\xi &= \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,d\varepsilon\right)^n e^{-nh^2\left\{(X-x)^2 - x^2 + \frac{[ll]}{n}\right\}}\\
&= \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,d\varepsilon\right)^n e^{-nh^2\left(\frac{[ll]}{n} - x^2\right)} \cdot e^{-nh^2(X-x)^2}.
\end{aligned}$$

Hierin sind alle Größen bis auf X bekannt oder konstant, denn auch $d\varepsilon$ stellt einen angenommenen konstanten Fehlerzuschlag dar. Setzt man daher den von X unabhängigen Faktor

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,d\varepsilon\right)^n e^{-nh^2\left(\frac{[ll]}{n} - x^2\right)} = c\,d\xi,$$

worin c eine Konstante bedeutet, und $d\xi$ zum Zeichen dafür angesetzt wird, daß der ganze Wahrscheinlichkeitsausdruck von unendlicher Kleinheit (der n-ten Ordnung des $d\varepsilon$ oder der 1. Ordnung des $d\xi$) ist, so kann man auch schreiben:

$$\varphi(\xi)\, d\xi = c\, e^{-n h^2 (X - x)^2}\, d\xi = c\, e^{-n h^2 \xi^2}\, d\xi.$$

Um die Konstante c zu ermitteln, hat man zu beachten, daß das zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ genommene Integral des obigen Ausdruckes der Einheit gleich sein muß, da die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Fehler bei der Bildung des arithmetischen Mittels überhaupt begangen werde, in die Gewißheit übergeht. Man hat also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, d\xi = c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n h^2 \xi^2}\, d\xi = 1$$

oder, wenn $\sqrt{n}\, h\, \xi = t$ gesetzt wird:

$$\frac{c}{h\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{c\sqrt{\pi}}{h\sqrt{n}} = 1,$$

also:

$$c = h\sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Mithin ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler des arithmetischen Mittels $\xi = X - x$ keinen anderen Wert als ξ besitze, dargestellt durch

$$\varphi(\xi)\, d\xi = \frac{h\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n h^2 \xi^2}\, d\xi. \tag{2}$$

Es ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler einer einzelnen Beobachtung kein anderer als ε sei, definiert durch

$$\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 \varepsilon^2}\, d\varepsilon,$$

Setzt man nun in (2)

$$h\sqrt{n} = H, \tag{3}$$

so erhält man:

$$\varphi(\xi)\, d\xi = \frac{H}{\sqrt{\pi}}\, e^{-H^2 \xi^2}\, d\xi \tag{4}$$

d. i. ein Ausdruck von derselben Form wie beim wahren Fehler ε, nur spielt hier $h\sqrt{n} = H$ die Rolle des Genauigkeitsmaßes.

Da nun

$$h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} = \frac{1}{\vartheta\sqrt{\pi}} = \frac{\varkappa}{\varrho}$$

oder

$$h = \sqrt{\frac{n}{2[\varepsilon\varepsilon]}} = \frac{n}{[\varepsilon]\sqrt{\pi}} = \varkappa\left(\frac{n}{[\sqrt{\varepsilon}]}\right)^2,$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} H &= \frac{\sqrt{n}}{\mu\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{n}}{\vartheta\sqrt{\pi}} = \frac{\varkappa\sqrt{n}}{\varrho} \\ &\text{oder} \\ H &= \frac{n}{\sqrt{2[\varepsilon\varepsilon]}} = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{[\varepsilon]\sqrt{\pi}} = \frac{\varkappa\, n^{\frac{3}{2}}}{[\sqrt{\varepsilon}]^2} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

worin μ, ϑ, ϱ die charakteristischen Fehler der einzelnen Beobachtungen darstellen. Demnach ist der mittlere Fehler $M_,$, der durchschnittliche Fehler $T_,$ und der wahrscheinliche Fehler $R_,$ des einfachen arithmetischen Mittels durch folgende theoretische Formeln bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} M_, &= \frac{1}{H\sqrt{2}} = \frac{1}{h\sqrt{2n}} = \frac{\mu}{\sqrt{n}} \\ T_, &= \frac{1}{H\sqrt{\pi}} = \frac{1}{h\sqrt{n\pi}} = \frac{\vartheta}{\sqrt{n}} \\ R_, &= \frac{\varkappa}{H} = \frac{\varkappa}{h\sqrt{n}} = \frac{\varrho}{\sqrt{n}} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

§ 22. Der mittlere Fehler des Durchschnittswertes der höheren Fehlerpotenzen.

Die Formel für den mittleren Fehler in der Bestimmung des Durchschnittswertes der m-ten Potenzen einer endlichen Anzahl von Beobachtungsfehlern wurde bereits im § 18 abgeleitet. Hier möge ein kürzerer Weg hiezu eingeschlagen werden.

Setzt man an Stelle der einzelnen m-ten Potenzen der Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ den streng theoretischen Ausdruck für den Durchschnittswert der m-ten Potenzen der absolut genommenen Beobachtungsfehler, so begeht man hiebei selbst wieder Fehler, welche den Charakter von wahren Fehlern an sich tragen. Dieselben lauten:

$$S_m - \varepsilon_1{}^m$$
$$S_m - \varepsilon_2{}^m$$
$$\cdots\cdots$$
$$S_m - \varepsilon_n{}^m.$$

Das Quadrat des mittleren bei dieser Substitution zu befürchtenden Fehlers μ_ε in der m-ten Potenz eines einzelnen Beobachtungsfehlers ist definiert durch das arithmetische Mittel der Quadrate dieser Differenzen. Man hat daher:

$$\mu_\varepsilon^2 = \frac{[(S_m - \varepsilon^m)^2]}{n}.$$

Entwickelt man die Summe der Quadrate, so erhält man:

$$\mu_\varepsilon^2 = \frac{n S_m^2}{n} - \frac{2 S_m [\varepsilon^m]}{n} + \frac{[\varepsilon^{2m}]}{n}.$$

Da

$$\frac{[\varepsilon^m]}{n} = S_m,$$

so kann entsprechend auch gesetzt werden:

$$\frac{[\varepsilon^{2m}]}{n} = S_{2m},$$

so daß man hat:

$$\mu_\varepsilon^2 = S_{2m} - S_m^2.$$

Aus dem mittleren Fehler μ_ε der m-ten Potenz eines einzelnen Fehlers ε^m ergibt sich der mittlere Fehler μ_m des arithmetischen Mittels aller m-ten Fehlerpotenzen, d. i. des Ausdruckes

$$\frac{[\varepsilon^m]}{n}$$

nach § 21, Formel (6) zu:

$$\mu_m = \frac{\mu_\varepsilon}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{S_{2m} - S_m^2}{n}},$$

übereinstimmend mit der im § 18. S. 69. gefundenen Formel (1).

§ 23. Das Fehlerübertragungsgesetz.

Wird die zu suchende Größe nicht direkt gemessen, sondern aus Messungen oder Beobachtungen, die unter sich **unabhängig** sind, abgeleitet, so wird die zu suchende Größe von den Fehlern der Beobachtungen beeinflußt sein. Man wird daher den wahren Wert dieser Größe ebensowenig ermitteln können, wie die wahren Werte der Beobachtungsgrößen selbst, sondern wird sich mit dem wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten begnügen müssen, welcher, als eine Funktion der fehlerhaften Beobachtungen selbst mit einem Fehler behaftet sein wird. In welcher Weise die Fehler der beobachteten

Argumente auf eine Funktion derselben sich übertragen, d. h. in welchem Maße die fehlerhaften Messungsdaten auf das zu ermittelnde Endresultat einwirken können, wird durch das sogenannte „Fehlerübertragungs- oder Fehlerfortpflanzungsgesetz" zum Ausdrucke gebracht. Sind Durchschnittswerte der Beobachtungsfehler bekannt, so wird man mit Hilfe dieses Gesetzes sofort auch den Durchschnittsfehler gleicher Ordnung des Resultates abzuleiten imstande sein.

Bevor der allgemeinste Fall der Fehlerübertragung behandelt werde, seien einige einfachere Beispiele in Betracht gezogen.

I.) Gesetzt, es sei die zu suchende Größe X ein Vielfaches, z. B. das a-fache einer der direkten Messung zugänglichen Größe L, also

$$X = a\,L,$$

und es seien durch wiederholte Messungen der Größe L die einzelnen Messungsdaten $l_1, l_2, \ldots l_n$ mit den wahren Messungsfehlern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ gefunden worden, so daß die Gleichungen bestehen:

$$L = l_1 + \varepsilon_1 = l_2 + \varepsilon_2 = \ldots = l_n + \varepsilon_n,$$

so ist der mittlere Fehler einer einzelnen Messung bestimmt durch

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}.$$

Jede einzelne Messung liefert durch Multiplikation mit a für die zu suchende Größe einen anderen Wert, nämlich

$$x_1 = a\,l_1, \quad x_2 = a\,l_2, \quad \ldots \quad x_n = a\,l_n.$$

Fügt man zu den Messungsdaten l deren wahre Fehler ε algebraisch hinzu und multipliziert man diese Summen mit a, so muß sich immer der wahre Wert X ergeben, denn es ist:

$$a\,(l_1 + \varepsilon_1) = a\,(l_2 + \varepsilon_2) = \ldots = a\,(l_n + \varepsilon_n) = a\,L = X,$$

somit sind die wahren Fehler von $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$a\,\varepsilon_1, \quad a\,\varepsilon_2, \quad \ldots \quad a\,\varepsilon_n,$$

und es ist deren mittlerer Durchschnittswert bestimmt durch:

$$\mu^2 = \frac{[a^2\varepsilon^2]}{n} = \frac{a^2\,[\varepsilon\,\varepsilon]}{n} = a^2\,m^2,$$

sohin ist

$$\pm\,\mu = \pm\,a\,m \qquad (1)$$

d. h. es ist der mittlere Fehler $\pm\,\mu$ der Größe X das a-fache des mittleren Fehlers $\pm\,m$ der Größe L. Dasselbe Verhalten zeigen auch die übrigen charakteristischen Fehlermittel.

II.) Angenommen, es sei die zu suchende Größe S die algebraische Summe zweier von einander unabhängiger, durch Beobachtung bestimmter Größen s_1 und s_2, deren mittlere Fehler m_1 und m_2 bekannt sind, so wird der mittlere Fehler μ von S eine Funktion von m_1 und m_2 sein. Wenn $\varepsilon_1, \varepsilon_1'', \varepsilon_1''', \ldots$ beziehungsweise $\varepsilon_2', \varepsilon_2'', \varepsilon_2''', \ldots$ die einzelnen wahren Beobachtungsfehler sind, aus welchen die mittleren Fehler m_1 beziehungsweise m_2 erhalten wurden, indem s_1 und s_2 als Mittelwerte von n_1 beziehungsweise n_2 gleich genauen Beobachtungen aufgefaßt werden, so bestehen für die mittleren Fehler m_1 und m_2 die analytischen Ausdrücke:

$$m_1^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_1^2 \varphi_1(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1,$$

$$m_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_2^2 \varphi_2(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2.$$

Bezeichnet man die Fehler der Größe S, welche durch das Zusammenwirken je eines Fehlers ε_1 mit einem Fehler ε_2 entstehen, mit E', E'', E''', ..., so daß z. B. ein bestimmter Fehler E zusammengesetzt erscheint aus einem Fehler ε_1 der Größe s_1 und einem Fehler $\varepsilon_2 = E - \varepsilon_1$ der Größe s_2, und die Wahrscheinlichkeit, daß gerade dieser bestimmte Fehler E zum Vorschein komme, ausgedrückt ist durch das Produkt der Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Fehler

ε_1' und $E - \varepsilon_1'$

oder der Fehler ε_1'' und $E - \varepsilon_1''$ usw.,

so ist die vollständige Wahrscheinlichkeit des Fehlers E durch die Summe dieser einzelnen Wahrscheinlichkeitsprodukte bestimmt, nämlich durch

$$\varphi(E)\, dE = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(\varepsilon_1) \cdot \varphi_2(E - \varepsilon_1)\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2,$$

worin E als eine Konstante zu behandeln ist, da E einen ganz bestimmten Fehler darstellt. Multipliziert man daher beiderseits des Gleichheitszeichens mit E^2 und integriert von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhält man das mittlere Fehlerquadrat μ^2 von S:

$$\mu^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} E^2 \varphi(E)\, dE = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1 \,.\, E^2 \,.\, \varphi_2(E - \varepsilon_1)\, d\varepsilon_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1 \,.\, \int_{-\infty}^{+\infty} E^2 \,.\, \varphi_2(E - \varepsilon_1)\, d\varepsilon_2$$

oder, wenn $E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ beziehungsweise $E - \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ gesetzt wird:

$$\mu^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 \cdot \varphi_2(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2 = J_1 J_2,$$

wo im zweiten Integral ε_1 als konstant anzusehen ist. Die Auflösung gibt:

$$\mu^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_1^2 \varphi_1(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2 + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_1 \varphi_1(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_2 \varphi_2(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_2^2 \cdot \varphi_2(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2.$$

Beachtet man, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2 = 1$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_1 \varphi_1(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_2 \varphi_2(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2 = 0,$$

so vereinfacht sich der obige Ausdruck zu:

$$\mu^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_1^2 \varphi_1(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_2^2 \varphi_2(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2 = m_1^2 + m_2^2,$$

somit ist

$$\mu = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2}.$$

Diesen Satz, der in Anbetracht seiner Form als „pythagoräischer Lehrsatz der Ausgleichungsrechnung" bezeichnet wird, erklärt Jordan (1888) als den wichtigsten Satz der ganzen Ausgleichungsrechnung; wir wollen ihn daher noch auf einem einfacheren Wege hier ableiten.

Sind $\pm \varepsilon_1', \pm \varepsilon_1'', \pm \varepsilon_1''', \ldots$ in der Anzahl n_1
und $\pm \varepsilon_2', \pm \varepsilon_2'', \pm \varepsilon_2''', \ldots$ in der Anzahl n_2

die einzelnen Beobachtungsfehler, welche die mittleren Fehler $m_1 = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon_1 \varepsilon_1]}{n_1}}$ und $m_2 = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon_2 \varepsilon_2]}{n_2}}$ der Beobachtungsgrößen s_1 und s_2 erzeugen, so verbinde man einen jeden Fehler der einen Beobachtungsreihe mit jedem Fehler der zweiten Reihe, wodurch im ganzen $n_1 \, n_2$ Fehlerkombinationen entstehen, nämlich:

$$\begin{array}{lll}
\pm \varepsilon_1' \pm \varepsilon_2' & \pm \varepsilon_1'' \pm \varepsilon_2' & \pm \varepsilon_1''' \pm \varepsilon_2' \\
\pm \varepsilon_1' \pm \varepsilon_2'' & \pm \varepsilon_1'' \pm \varepsilon_2'' & \pm \varepsilon_1''' \pm \varepsilon_2'' \\
\pm \varepsilon_1' \pm \varepsilon_2''' & \pm \varepsilon_1'' \pm \varepsilon_2''' & \pm \varepsilon_1''' \pm \varepsilon_2''' \quad \text{usw.} \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots
\end{array}$$

Bildet man die Quadrate und addiert sie, so erhält man:

$$
\begin{array}{l}
n_2 (\varepsilon_1' \varepsilon_1') + [\varepsilon_2 \varepsilon_2] + 2 \varepsilon_1' [\varepsilon_2] \\
n_2 (\varepsilon_1'' \varepsilon_1'') + [\varepsilon_2 \varepsilon_2] + 2 \varepsilon_1'' [\varepsilon_2] \\
n_2 (\varepsilon_1''' \varepsilon_1''') + [\varepsilon_2 \varepsilon_2] + 2 \varepsilon_1''' [\varepsilon_2] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hline
\text{Summe: } n_2 [\varepsilon_1 \varepsilon_1] + n_1 [\varepsilon_2 \varepsilon_2] + 2 [\varepsilon_1][\varepsilon_2].
\end{array}
$$

Da es am wahrscheinlichsten ist, daß alle ε gleich häufig positiv und negativ auftreten und sich daher in ihren Summen $[\varepsilon_1]$ und $[\varepsilon_2]$ gegenseitig aufheben sollen, so ist der wahrscheinlichste Wert des letzten Gliedes dieser Summe gleich Null oder konvergiert vielmehr mit wachsender Fehleranzahl gegen den Grenzwert Null, so daß man auch setzen kann:

$$n_2 [\varepsilon_1 \varepsilon_1] + n_1 [\varepsilon_2 \varepsilon_2],$$

daher ist das arithmetische Mittel aller Fehlerquadrate:

$$\mu^2 = \frac{n_2 [\varepsilon_1 \varepsilon_1] + n_1 [\varepsilon_2 \varepsilon_2]}{n_1 n_2} = \frac{[\varepsilon_1 \varepsilon_1]}{n_1} + \frac{[\varepsilon_2 \varepsilon_2]}{n_2} = m_1^2 + m_2^2,$$

sohin

$$\mu = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}. \tag{2}$$

III.) Ist $S = s_1 + s_2 + s_3$, so kann man auch schreiben $S = s_0 + s_3$, wenn $s_0 = s_1 + s_2$ gesetzt wird. Nun ist nach Formel (2)

$$\mu_0^2 = m_1^2 + m_2^2 \quad \text{und} \quad \mu^2 = \mu_0^2 + m_3^2,$$

folglich:

$$\mu^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2.$$

Ist S die Summe mehrerer Größen $s_1, s_2, \ldots s_n$ mit den mittleren Fehlern $m_1, m_2, \ldots m_n$, so lautet die Formel für den mittleren Fehler von S:

$$\mu^2 = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2 = [m^2]$$

also:

$$\mu = \sqrt{[m\,m]}. \tag{3}$$

Hat man es nicht mit mittleren, sondern z. B. mit wahrscheinlichen Fehlern zu tun, so gilt die analoge Formel

$$\varrho = \sqrt{[r\,r]}. \tag{4}$$

Sind die mittleren, beziehungsweise wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Größen s einander gleich, so folgt:

$$\mu = m\sqrt{n} \quad \text{beziehungsweise} \quad \varrho = r\sqrt{n} \tag{5}$$

IV.) Ist die zu suchende Größe D die Differenz zweier mit den mittleren Fehlern m_1 und m_2 behafteter Größen l_1 und l_2, so ist nach der Entwicklung unter II.) der mittlere Fehler δ von D bestimmt aus

$$\delta^2 = m_1^2 + m_2^2.$$

Sind l_1 und l_2 zwei Messungen einer und derselben Größe, so stellt dann δ, da theoretisch die Differenz $D = l_1 - l_2$ gleich Null sein soll, die mittlere Beobachtungsdifferenz vor. Haben beide Messungen, was gewöhnlich der Fall ist, den gleichen mittleren Fehler m, so besteht die Beziehung:

$$\delta^2 = 2\,m^2,$$

somit

$$\delta = m\sqrt{2}. \qquad (6)$$

Man kann diese wichtige Formel in anschaulicher Weise wie folgt herleiten. Da das Vorzeichen von m unbekannt, aber gleichwahrscheinlich positiv oder negativ ist, so sind folgende gleichwahrscheinliche Kombinationen möglich:

$$\Delta_1 = +m - -m \qquad \Delta_1^2 = 4\,m^2$$
$$\Delta_2 = +m - +m \qquad \Delta_2^2 = 0$$
$$\Delta_3 = -m - +m \qquad \Delta_3^2 = 4\,m^2$$
$$\Delta_4 = -m - -m \qquad \Delta_4^2 = 0$$

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2 = [\Delta\Delta] = 8\,m^2.$$

Bildet man das mittlere Differenzquadrat δ^2 nach der Regel vom arithmetischen Mittel:

$$\delta^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{4},$$

so wird wie oben

$$\delta^2 = 2\,m^2.$$

V.) Ist X eine lineare Funktion der durch direkte Messung bestimmbaren Größen $L_1, L_2, \ldots L_n$, also

$$X = a_1 L_1 + a_2 L_2 + \cdots + a_n L_n,$$

so wird, wenn statt der wahren Werte L die entsprechenden, mit den wahren Fehlern ε behafteten Beobachtungsresultate l eingeführt werden, für X nur der Näherungswert x als wahrscheinlichstes Resultat erhalten, nämlich

$$x = a_1 l_1 + a_2 l_2 + \cdots + a_n l_n.$$

Es ist dann:

$$X = a_1 (l_1 \pm \varepsilon_1) + a_2 (l_2 \pm \varepsilon_2) + \cdots + a_n (l_n \pm \varepsilon_n)$$
$$X = (a_1 l_1 + a_2 l_2 + \cdots + a_n l_n) \pm a_1 \varepsilon_1 \pm a_2 \varepsilon_2 \pm \cdots \pm a_n \varepsilon_n$$
$$X = x \pm \varepsilon_x, \quad \pm \varepsilon_x = \pm a_1 \varepsilon_1 \pm a_2 \varepsilon_2 \pm \cdots \pm a_n \varepsilon_n. \qquad (7)$$

wo $X - x = \pm \varepsilon_x$ den wahren Fehler des wahrscheinlichsten Näherungswertes x vorstellt.

Da das Vorzeichen der wahren Fehler $\varepsilon_x, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ unbekannt ist, so führt man durch Quadrieren und Mitteln die mittleren Fehlerquadrate ein. Denkt man sich alle ε mit Rücksicht auf die verschiedenen, gleichwahrscheinlichen Vorzeichen in allen möglichen Arten kombiniert, quadriert und gemittelt, so wird links von (7) das mittlere Fehlerquadrat μ^2 der Differenz $X - x$ oder (da X fehlerlos ist) der Größe x erhalten; rechts werden, da alle durch das Quadrieren entstandenen doppelten Produkte bei der nachherigen Addition sich gegenseitig aufheben, die Quadrate der mittleren Durchschnittswerte der einzelnen Glieder $a_i \varepsilon_i$ erscheinen, welche nach der Formel (1) durch $a_i^2 m_i^2$ bestimmt sind, wenn $m_1, m_2, \ldots m_n$ (allgemein m_i) die mittleren Werte der wahren Fehler ε, also die mittleren Fehler der Beobachtungen l darstellen. Es resultiert daher die Gleichung

$$\mu^2 = a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + \cdots + a_n^2 m_n^2$$

und hieraus die allgemeine Formel für lineare Funktionen:

$$\mu = \sqrt{[a^2 m^2]} \tag{8}$$

VI.) Ist $X = F(L_1, L_2, \ldots L_n)$ der wahre Wert einer **nicht linearen** Funktion der voneinander unabhängigen Größen $L_1, L_2 \ldots L_n$, wofür die aus direkten Beobachtungen ermittelten wahrscheinlichsten Werte $l_1, l_2, \ldots l_n$ mit deren mittleren Fehlern $m_1, m_2, \ldots m_n$ erhalten wurden, so lautet die allgemeinste Aufgabe dahin, mit Benützung der gegebenen Stücke den mittleren Fehler μ des wahrscheinlichsten Wertes x von X, d. i. von $x = F(l_1, l_2, \ldots l_n)$ zu berechnen. Bezeichnet man die kleinen Unterschiede zwischen den wahren und wahrscheinlichsten Werten der Beobachtungen mit

$$L_1 - l_1 = \pm \varepsilon_1, \; L_2 - l_2 = \pm \varepsilon_2, \; \ldots \; L_n - l_n = \pm \varepsilon_n,$$

so ist

$$X = F(l_1 \pm \varepsilon_1, \; l_2 \pm \varepsilon_2, \; \ldots \; l_n \pm \varepsilon_n).$$

Entwickelt man nach dem Taylorschen Satze und unterdrückt hiebei mit Rücksicht auf die Kleinheit der Unterschiede ε die Glieder der zweiten und höheren Ordnung von ε, so erhält man:

$$X = F(l_1, l_2, \ldots l_n) \pm \frac{\partial F}{\partial l_1} \varepsilon_1 \pm \frac{\partial F}{\partial l_2} \varepsilon_2 \pm \cdots \pm \frac{\partial F}{\partial l_n} \varepsilon_n,$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$X - x = \pm a_1 \varepsilon_1 \pm a_2 \varepsilon_2 \pm \cdots \pm a_n \varepsilon_n.$$

Da diese Gleichung die Form (7) besitzt, so ergibt sich nach Formel (8):

$$\mu = \pm\sqrt{[a^2 m^2]} = \pm\sqrt{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial l} m\right)^2\right]} \tag{9}$$

als mittlerer Fehler von x. — Jeder einfachere Fall muß selbstverständlich aus dem allgemeinsten Falle durch Spezialisierung hervorgehen, wovon man sich leicht überzeugen kann.

§ 24. Beispiele für die Anwendung des Fehlerübertragungsgesetzes.

a) Fehler der Längenmessung.

Eine Strecke von 400 m Länge sei mit genauen Viermeterlatten einmal gemessen worden, wo bei jeder einzelnen Lattenanlage ein mittlerer Fehler von $m = \pm 0{\cdot}004\ m$ begangen wurde. Wie groß ist der durch das ungenaue Aneinanderreihen der Latten herrührende mittlere Gesamtfehler der Strecke? Zur Längenmessung waren $n = 100$ Lattenschläge erforderlich, folglich ist nach Formel (5) des § 23:

$$\mu = m\sqrt{n} = 0{\cdot}004\sqrt{100} = \pm 0{\cdot}04\ m.$$

Bezeichnet man allgemein die Lattenlänge mit λ und die Streckenlänge mit L, so ist $n = \frac{L}{\lambda}$ und

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{L} = m_1\sqrt{L},$$

wo $m_1 = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ den mittleren Fehler der Längeneinheit bedeutet. Da dieser für eine bestimmte Längenmessungsart (Messung mit Latten, Band, Draht, Rad usw.) unter sonst gleichen Umständen konstant ist, so lautet die obige theoretische Formel in Worten: Der mittlere Fehler der Längenmessung ist proportional der Quadratwurzel aus der gemessenen Streckenlänge. Dies ist das sogenannte „Quadratwurzelgesetz der Längenmessung".

b) Fehler der unzugänglichen Basis.

Behufs Bestimmung der Länge einer in ihrem mittleren Verlaufe unzugänglichen Basis $AB = c$ wurden die beiden zugänglichen Basisendpunkte A und B mit einem dritten Punkte C zu einem schiefwinkeligen Dreiecke verbunden und die beiden zugänglichen Seiten $AC = b$ und $BC = a$, sowie der von ihnen eingeschlossene Winkel γ wiederholt gemessen und hiebei folgende Messungsresultate samt deren mittlere Fehler erhalten:

$$a = 236\text{·}768\ m \qquad m_a = \pm\ 0\text{·}003\ m$$
$$b = 357\text{·}429\ m \qquad m_b = \pm\ 0\text{·}008\ m$$
$$\gamma = 172^\circ\ 12'\ 40'' \qquad m''_\gamma = \pm\ 5''.$$

Die zu suchende Basis rechnet sich aus dem Carnotschen Lehrsatze mit:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\,cos\,\gamma = 592\text{·}882\ m.$$

Der mittlere Fehler der Basis ist nach der Formel (9) des § 23:

$$m_c = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial a} m_a\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial b} m_b\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial \gamma} m_\gamma\right)^2}.$$

Die partiellen Differentialquotienten sind:

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{a - b\,cos\,\gamma}{c}, \quad \frac{\partial c}{\partial b} = \frac{b - a\,cos\,\gamma}{c}, \quad \frac{\partial c}{\partial \gamma} = \frac{ab\,sin\,\gamma}{c}.$$

Hiebei ist zu beachten, daß sämtliche Glieder in derselben Maßeinheit ausgedrückt sein müssen. Man hat daher, da m_c im Längenmaß anzugeben ist und auch m_a und m_b in diesem Maße ausgedrückt erscheinen, die im Winkelmaß gegebene Fehlergröße m''_γ im analytischen Maße einzuführen, nämlich

$$m_\gamma = m''_\gamma\,.\,sin\,1'' = \frac{m''_\gamma}{206265}.$$

Die numerische Ausrechnung liefert das Resultat:

$$m_c = \pm\ 0\text{·}009\ m.$$

Instruktive Beispiele aus der praktischen Geometrie enthält Hegemann: Übungsbuch für die Anwendung der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 3. Aufl. 1908.

II. Abschnitt.

Theorie der scheinbaren Beobachtungsfehler.

A. Die empirischen Fehlermaße.

§ 25. Der scheinbare Beobachtungsfehler.

Die bisherigen Untersuchungen haben zur Voraussetzung gehabt, daß die wahren Abweichungen der n Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots l_n$ von der Unbekannten X, das sind die wahren Beobachtungsfehler ε_1, $\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ bekannt seien. Dies trifft jedoch nur in den seltensten Fällen zu. Gewöhnlich kennt man nur die Abweichungen der Beobachtungen von ihrem arithmetischen Mittel $x = \frac{[l]}{n}$, welche, da dieser Mittelwert nicht den wahren, sondern nur den wahrscheinlichsten Wert der Unbekannten repräsentiert, die **scheinbaren** Beobachtungsfehler genannt und mit $v_1, v_2, \ldots v_n$ bezeichnet werden. Der Unterschied

$$X - x = \xi$$

stellt sodann die wahre Verbesserung oder den mit umgekehrtem Vorzeichen genommenen **wahren Fehler des arithmetischen Mittels** dar.*)

Zwischen den wahren und scheinbaren Fehlern der einzelnen mit gleicher Sorgfalt angestellten Beobachtungen gibt es folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} X - l_1 = \varepsilon_1 \\ X - l_2 = \varepsilon_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ X - l_n = \varepsilon_n \end{array}\right\} \quad (1) \qquad \left.\begin{array}{l} x - l_1 = v_1 \\ x - l_2 = v_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x - l_n = v_n \end{array}\right\} \quad (2)$$

Werden die Gleichungen (2) addiert und hierauf durch n dividiert, so erhält man:

*) Siehe Fußnote S. 25.

$$x = \frac{[l]}{n} + \frac{[v]}{n}$$

und da $x = \frac{[l]}{n}$ ist:

$$[v] = [x - l] = 0 \tag{3}$$

d. h. *bei direkten, gleich genauen Beobachtungen muß die Summe aller scheinbaren Fehler Null sein.*

Subtrahiert man die Gleichungen (2) von (1), so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} X - x = \varepsilon_1 - v_1 \\ X - x = \varepsilon_2 - v_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ X - x = \varepsilon_n - v_n \end{array}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon_1 = v_1 + \xi & \varepsilon_1^2 = v_1^2 + 2\,v_1\,\xi + \xi^2 \\ \varepsilon_2 = v_2 + \xi & \varepsilon_2^2 = v_2^2 + 2\,v_2\,\xi + \xi^2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_n = v_n + \xi & \varepsilon_n^2 = v_n^2 + 2\,v_n\,\xi + \xi^2 \\ \hline [\varepsilon] = [v] + n\,\xi & [\varepsilon\varepsilon] = [vv] + 2\,[v]\,\xi + n\,\xi^2 \end{array}\right\} \tag{5}$$

oder mit Rücksicht auf (3):

$$[\varepsilon] = n\,\xi$$

$$X - x = \xi = \frac{[\varepsilon]}{n} \tag{6}$$

$$\varepsilon_i = v_i + \frac{[\varepsilon]}{n} \tag{7}$$

$$[\varepsilon\varepsilon] = [vv] + n\,\xi^2 \tag{8}$$

$$[\varepsilon\varepsilon] - [vv] = \frac{[\varepsilon]^2}{n}. \tag{9}$$

Da $[\varepsilon]^2$ stets positiv ist, so sieht man, daß immer $[\varepsilon\varepsilon] > [vv]$ sein muß. Es ist ferner

$$[\varepsilon]^2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)^2 = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2) + 2\,(\varepsilon_1\,\varepsilon_2 + \varepsilon_1\,\varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_{n-1}\,\varepsilon_n)$$

$$[\varepsilon]^2 = [\varepsilon\varepsilon] + 2\,[\varepsilon_i\,\varepsilon_k] \tag{10}$$

Die wahren Beobachtungsfehler treten als rein zufällige Fehler mit gleicher Wahrscheinlichkeit positiv und negativ auf. Kommen die ε in unendlicher Anzahl vor, so wird bei jedem $+\varepsilon$ auch ein gleich großes $-\varepsilon$ sich einstellen. Die Fehler ε_i und ε_k können daher vier gleich wahrscheinliche Produkte bilden, nämlich:

$$(+\varepsilon_i) \cdot (+\varepsilon_k) = +\varepsilon_i \varepsilon_k$$
$$(+\varepsilon_i) \cdot (-\varepsilon_k) = -\varepsilon_i \varepsilon_k$$
$$(-\varepsilon_i) \cdot (-\varepsilon_k) = +\varepsilon_i \varepsilon_k$$
$$(-\varepsilon_i) \cdot (+\varepsilon_k) = -\varepsilon_i \varepsilon_k$$

Nimmt man von allen möglichen Kombinationen das Mittel, so wird dasselbe, da jedes Produkt $\varepsilon_i \varepsilon_k$ ebenso oft positiv als negativ auftritt, den Wert Null ergeben müssen. Ist aber die Anzahl der Fehler nicht unendlich groß, so wird man selbst bei einer beschränkten Fehleranzahl die Summe aller Produkte $[\varepsilon_i \varepsilon_k]$ neben der Quadratsumme $[\varepsilon \varepsilon]$, wo alle Summanden positiv sein müssen, jedenfalls vernachlässigen können. Setzt man also

$$[\varepsilon]^2 = [\varepsilon \varepsilon],$$

so ergibt sich aus (9):

$$[\varepsilon \varepsilon] - [v v] = \frac{[\varepsilon \varepsilon]}{n}$$

$$(n-1)[\varepsilon \varepsilon] = n [v v]$$

und

$$[\varepsilon \varepsilon] = \frac{n}{n-1} [v v]. \tag{11}$$

Diese wichtige Gleichung gestattet nun, in allen Formeln, welche die Summe der wahren Fehlerquadrate enthalten, die scheinbaren Fehler einzuführen. Es ist daher der mittlere Fehler einer Beobachtung:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon \varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{[v v]}{n-1}}, \tag{12}$$

das Genauigkeitsmaß:

$$h = \sqrt{\frac{n}{2[\varepsilon \varepsilon]}} = \sqrt{\frac{n-1}{2[v v]}} \tag{13}$$

und der mittlere Fehler des einfachen arithmetischen Mittels:

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v v]}{n(n-1)}}. \tag{14}$$

§ 26. Die charakteristischen Fehlermaße als Funktionen der scheinbaren Beobachtungsfehler.

a) Der mittlere Fehler.

Die im § 25 gegebene Ableitung der Formel für den mittleren Fehler einer einzelnen Beobachtung unter Zugrundelegung der scheinbaren Fehler ist, wie Bertrand (1888) gezeigt hat, nicht einwand-

frei, weil hiebei die Summe $[\varepsilon_i \varepsilon_k]$ gleich Null gesetzt wurde, was aber ohne weiteres nicht zulässig ist; denn bei einer Anzahl von $2k$ Fehlern, wovon k Fehler positiv und k Fehler negativ sind, ist die Anzahl der negativen Produkte k^2, die Anzahl der positiven Produkte $k(k-1) = k^2 - k$, also kleiner, so daß bei gleich großen Fehlern als Mittelwert eher ein negatives als ein positives Resultat zu erwarten steht. Es soll daher eine strenge Ableitung dieser wichtigen Formel hier Platz finden.

Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie sind folgende Sätze bekannt:

1. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von m Ereignissen, von welchen keines mit einem anderen derselben zugleich eintreffen kann, irgend eines eintrete, ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse. (Satz von der vollständigen Wahrscheinlichkeit.)

2. Die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Zusammentreffen zweier oder mehrerer voneinander unabhängiger Ereignisse ist gleich dem Produkte der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse. (Satz von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit.)

3. Liegt der Fall vor, daß ein Ereignis E nur mit einem von m Ereignissen $F_1, F_2, \ldots F_m$, die aber unter sich nicht zugleich eintreffen können, zusammenfallen kann, und bezeichnet man die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der Ereignisse F der Reihe nach mit $W_1, W_2, \ldots W_m$, und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ereignis E nach Stattfinden des Ereignisses F_1 eintritt, mit w_1, jene von E nach Stattfinden des Ereignisses F_2 mit w_2 usw., so ist die vollständige Wahrscheinlichkeit für das Zustandekommen des Ereignisses E bestimmt durch die Summe der Produkte:

$$W_1 w_1 + W_2 w_2 + \cdots + W_m w_m.$$

Ist kein Grund vorhanden, die Wahrscheinlichkeiten für das Stattfinden der Ereignisse $F_1, F_2, \ldots F_m$ verschieden anzunehmen, so ist die vollständige Wahrscheinlichkeit für das Zustandekommen des Ereignisses E gleich:

$$W(w_1 + w_2 + \cdots + w_m) = W[w].$$

Im § 11 wurde der wahrscheinlichste Wert des Genauigkeitsmaßes h unter der Voraussetzung abgeleitet, daß der wahre Wert der beobachteten Größe und somit auch die Abweichungen der einzelnen Beobachtungen von dem wahren Werte, das sind die wahren Fehler ε, bekannt seien. Kennt man aber nicht die wahren Fehler, was gewöhnlich der Fall ist, sondern nur die Abweichungen der ein-

zelnen Beobachtungen von dem wahrscheinlichsten Werte der beobachteten Größe, der im einfachsten Falle direkter Beobachtungen durch das einfache arithmetische Mittel gegeben ist, kennt man also nur die scheinbaren Fehler v, so nimmt die Ableitung des wahrscheinlichsten Wertes von h folgenden Verlauf:

Substituiert man in den Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, mit welcher das Zusammentreffen aller wahren Fehler ε zu erwarten steht, d. i.

$$w = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\, d\varepsilon\right)^n e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]}$$

für $[\varepsilon\varepsilon]$ den aus der Gleichung (8) des § 25 hervorgehenden Wert, worin ξ den Unterschied zwischen dem wahren Wert der Unbekannten X und ihrem wahrscheinlichsten Werte x, also den wahren Fehler des arithmetischen Mittels bedeutet, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, daß bei Kenntnis des wahren Wertes X der beobachteten Größe und also auch des wahren Fehlers ξ des arithmetischen Mittels das Genauigkeitsmaß h sich einstellt, in der Form:

$$w = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\, d\varepsilon\right)^n e^{-h^2[vv]} \cdot e^{-nh^2\xi^2}.$$

Bei der Unkenntnis von X und der beliebigen Wahl irgend eines anderen Wertes für die zu suchende Unbekannte wird aber auch ξ theoretisch alle möglichen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen können. Vor Anstellung der Beobachtungen sind die unendlich kleinen Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen irgend eines der gleich möglichen Werte von ξ dem konstanten Fehlerintervall $d\xi$ proportional, also gleich $c \,.\, d\xi$ zu setzen. Läßt man nun im Laufe der unendlich vielen Beobachtungsanstellungen ξ alle möglichen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so wird die vollständige Wahrscheinlichkeit P dafür, daß als Genauigkeitsmaß gerade die Größe h erscheint, wenn die beobachtete Größe irgend einen, auch von dem wahren Werte X verschiedenen Wert annimmt, gleich der konstanten Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines der unendlichen, gleich möglichen ξ:

$$W = c \,.\, d\xi$$

multipliziert mit der Summe der Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2, \ldots$, eines bestimmten h nach stattgefundener Einführung je eines der unendlichen Werte von ξ:

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_\infty = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\, d\varepsilon\right)^n e^{-h^2[vv]} \left(e^{-nh^2\xi_1^2} + e^{-nh^2\xi_2^2} + \cdots + e^{-nh^2\xi_\infty^2}\right),$$

also gleich der Summe der Produkte:

$$P = W[\varepsilon] = c\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,d\varepsilon\right)^{n} e^{-h^2[vv]}\,(e^{-h^2\xi^2} \cdot e^{-h^2\xi^2} \cdots e^{-h^2\xi^2})\,d\xi$$

oder:

$$P = c\left(\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right)^{n} h^{n} e^{-h^2[vv]} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nh^2\xi^2}\,d\xi.$$

Setzt man hierin

$$n h^2 \xi^2 = t^2$$

und daher

$$d\xi = \frac{dt}{h\sqrt{n}},$$

so kann man auch schreiben:

$$P = c\left(\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right)^{n} \frac{h^{n} e^{-h^2[vv]}}{h\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = c\left(\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right)^{n} h^{n-1} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \cdot e^{-h^2[vv]}.$$

Faßt man die konstanten Größen zusammen, indem man setzt:

$$k = c\left(\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right)^{n} \sqrt{\frac{\pi}{n}},$$

so erhält man in kürzerer Schreibweise:

$$P = k\,h^{n-1} e^{-h^2[vv]}.$$

Unter der in den meisten Fällen zutreffenden Annahme, daß der wahre Wert der zu suchenden Größe X nicht bekannt ist, wird der wahrscheinlichste Wert von h derjenige sein, für welchen P ein Maximum wird. Setzt man den Differentialquotienten von P nach h gleich Null, also

$$\frac{dP}{dh} = k(n-1)\,h^{n-2} e^{-h^2[vv]} - k\,h^{n-1} \cdot 2h[vv]\,e^{-h^2[vv]} = 0$$

oder nach vorgenommener Kürzung:

$$n - 1 - 2h^2[vv] = 0,$$

so ergibt sich das Genauigkeitsmaß als Funktion der Quadrate der scheinbaren Beobachtungsfehler zu

$$h = \sqrt{\frac{n-1}{2[vv]}}.$$

Hieraus resultiert als mittlerer Fehler einer einzelnen Beobachtung die wichtige von Gauß aufgestellte Formel:

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}, \qquad (5)$$

für welche Helmert (1876) — abweichend von dieser Analyse — den ersten strengen Beweis geliefert hat und welche, wie Simony (1905) bemerkt, „zu den bedeutendsten Errungenschaften in diesem Forschungsgebiete" gehört.

b) Der durchschnittliche Fehler.

Zwischen dem wahren und scheinbaren Beobachtungsfehler irgend einer Beobachtung l_i besteht die allgemeine Beziehung (7) des § 25:

$$\varepsilon_i = v_i + \frac{[\varepsilon]}{n}.$$

Schreibt man dieselbe in der Form

$$v_i = -\frac{1}{n}\left\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{i-1} - (n-1)\,\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} + \cdots + \varepsilon_n\right\},$$

so kann v_i auch aufgefaßt werden als die Summe folgender Einzelfehler:

$$-\frac{\varepsilon_1}{n},\ -\frac{\varepsilon_2}{n},\ \ldots\ -\frac{\varepsilon_{i-1}}{n},\ +\frac{(n-1)\,\varepsilon_i}{n},\ -\frac{\varepsilon_{i+1}}{n},\ \ldots\ -\frac{\varepsilon_n}{n}.$$

Führt man statt der wahren Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ den mittleren Fehler $\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$ ein, was zulässig ist, da er seiner Definition entsprechend die Eigenschaft besitzt, daß er dieselbe Summe der Fehlerquadrate gibt wie die wahren Fehler, so kann man für die obigen n Einzelfehler auch die folgenden Werte substituieren:

$$\frac{\mu}{n},\ \frac{\mu}{n},\ \ldots\ \frac{\mu}{n},\ \frac{(n-1)\,\mu}{n},\ \frac{\mu}{n},\ \ldots\ \frac{\mu}{n}.$$

Wendet man auf diese mittleren Fehler das Fehlerübertragungsgesetz an, wonach das Quadrat des mittleren Fehlers der Summe mehrerer Größen gleich ist der Summe der Quadrate der mittleren Fehler der einzelnen Größen, so ist der mittlere Wert m der scheinbaren Fehler $v_1, v_2, \ldots v_n$ bestimmt aus:

$$m^2 = \left(\frac{\mu}{n}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\mu}{n}\right)^2 + \left(\frac{n-1}{n}\,\mu\right)^2 + \left(\frac{\mu}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\mu}{n}\right)^2 =$$

$$= (n-1)\left(\frac{\mu}{n}\right)^2 + \left(\frac{n-1}{n}\,\mu\right)^2 = \mu^2\,\frac{n-1}{n}$$

oder

$$m = \mu\sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

Zwischen dem Mittelwert der scheinbaren Fehler und dem Mittelwert der wahren Fehler besteht also die Proportion:

$$\frac{m}{\mu} = \sqrt{\frac{n-1}{n}},$$

die auch direkt durch Division der beiden Gleichungen

$$m = \sqrt{\frac{[r\,r]}{n}}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{[r\,r]}{n-1}}$$

hervorgeht.

Da zwischen dem durchschnittlichen und mittleren Werte der wahren Fehler die Beziehung besteht:

$$\frac{\vartheta}{\mu} = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

so gilt zwischen dem durchschnittlichen und mittleren Werte der scheinbaren Fehler um so eher die analoge Beziehung

$$\frac{t}{m} = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

als ja das Gaußsche Fehlergesetz direkt aus den scheinbaren Fehlern abgeleitet wurde. Es besteht daher auch zwischen den durchschnittlichen Werten der scheinbaren und wahren Fehler das Verhältnis:

$$\frac{t}{\vartheta} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

Nun ist der lineare Durchschnitt der wahren Fehler $\vartheta = \frac{[\varepsilon]}{n}$ und der lineare Durchschnitt der scheinbaren Fehler $t = \frac{[r]}{n}$, folglich kann man auch setzen:

$$\vartheta = t\sqrt{\frac{n}{n-1}} = \frac{[|r|]}{n}\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

oder

$$\vartheta = \frac{[r]}{\sqrt{n\,(n-1)}}, \tag{6}$$

welche Gleichung zuerst von Peters (1856) aufgestellt wurde.

c) Der wahrscheinliche Fehler.

Bezeichnet man das arithmetische Mittel aller wahren Fehlerwurzeln mit

$$\sqrt{\varrho} = \frac{[\sqrt{\varepsilon}]}{n}$$

und das arithmetische Mittel aller scheinbaren Fehlerwurzeln mit

$$\sqrt{r} = \frac{[\sqrt{v}]}{n},$$

so ergeben sich mit Hinweis auf die zwischen dem wahrscheinlichen Fehler einerseits und dem mittleren und durchschnittlichen Fehler anderseits bestehenden Beziehungen

$$\varrho = \varkappa\sqrt{2}\,.\,\mu = \varkappa\sqrt{\pi}\,.\,\vartheta$$

$$r = \varkappa\sqrt{2}\,.\,m = \varkappa\sqrt{\pi}\,.\,t$$

folgende Resultate:

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{m}{\mu} = \frac{t}{\vartheta} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

$$\varrho = \left(\frac{[\sqrt{\varepsilon}]}{n}\right)^2 = r\sqrt{\frac{n}{n-1}} = \left(\frac{[\sqrt{v}]}{n}\right)^2\sqrt{\frac{n}{n-1}},$$

somit ist mit großer Annäherung (vgl. § 34, S. 131):

$$\varrho = \frac{[\sqrt{v}]^2}{n\sqrt{n(n-1)}}. \qquad (7)$$

§ 27. Die charakteristischen Fehlermaße als Funktionen der Beobachtungsdifferenzen.

Hat man zur Bestimmung einer Unbekannten zwei Beobachtungen mit gleicher Genauigkeit angestellt, welche um dem Betrag d voneinander abweichen, so wird d die Beobachtungsdifferenz genannt. Ihr wahrer Wert ist als bekannt anzusehen, denn diese Differenz soll bei fehlerlosen Beobachtungen gleich Null sein. Ist dies aber nicht der Fall, so ist die Beobachtungsdifferenz d gleichbedeutend mit dem wahren Fehler der Differenz d, d. h. sie ist ihr eigener Fehler und es können daher Beobachtungsdifferenzen wie wahre Beobachtungsfehler behandelt werden.

Aus den zwischen den wahren und scheinbaren Beobachtungsfehlern bestehenden Ansätzen

$$\varepsilon_1 = X - l_1, \qquad \varepsilon_2 = X - l_2, \ldots$$

$$v_1 = x - l_1, \qquad v_2 = x - l_2, \ldots$$

resultieren die Beziehungen:

$$X = l_1 - \varepsilon_1 = l_2 - \varepsilon_2$$
$$x = l_1 - v_1 = l_2 - v_2$$
$$l_2 - l_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = v_2 - v_1 = d_{2,1}. \qquad (1)$$

Die letzte Gleichung besagt, daß die Differenz zweier Beobachtungen gleich ist der mit entgegengesetztem Vorzeichen versehenen Differenz der betreffenden wahren oder scheinbaren Fehler. Wenn daher die Beobachtungsfehler das Gaußsche Gesetz befolgen, so befolgen es auch die Beobachtungsdifferenzen.

Aus n Beobachtungen l_1 bis l_n können im ganzen $\frac{n(n-1)}{2}$ voneinander verschiedene Beobachtungsdifferenzen gebildet werden, nämlich:

$$\begin{array}{lllll}
l_1 - l_2 & & & & \\
l_1 - l_3 & l_2 - l_3 & & & \\
l_1 - l_4 & l_2 - l_4 & l_3 - l_4 & . & \\
\cdots & \cdots & \cdots & . & \\
l_1 - l_n & l_2 - l_n & l_3 - l_n & . & l_{n-1} - l_n.
\end{array}$$

Diese $\frac{n(n-1)}{2}$ Differenzen sind aber nicht unabhängig voneinander; es geht beispielsweise die erste Differenz der zweiten Vertikalreihe durch Subtraktion der beiden ersten Differenzen der ersten Vertikalreihe hervor, denn es ist:

$$(l_1 - l_3) - (l_1 - l_2) = l_2 - l_3.$$

Unabhängige Differenzen gibt es daher nur $(n-1)$.

Um eine Relation zwischen den Beobachtungsdifferenzen d und den scheinbaren Beobachtungsfehlern v zu gewinnen, gehe man von den wahren Beobachtungsfehlern ε aus. Nach (1) ist allgemein

$$d_{i,k} = \varepsilon_i - \varepsilon_k,$$

wonach folgende $\frac{n(n-1)}{2}$ Differenzen bestehen:

$$\begin{array}{lllll}
\varepsilon_2 - \varepsilon_1 & & & & \\
\varepsilon_3 - \varepsilon_1 & \varepsilon_3 - \varepsilon_2 & & & \\
\varepsilon_4 - \varepsilon_1 & \varepsilon_4 - \varepsilon_2 & \varepsilon_4 - \varepsilon_3 & . & \\
\cdots & \cdots & \cdots & . & \\
\varepsilon_n - \varepsilon_1 & \varepsilon_n - \varepsilon_2 & \varepsilon_n - \varepsilon_3 & . & \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}
\end{array}$$

Bildet man die Summe der Quadrate dieser in der Anzahl $\frac{n(n-1)}{2}$ vorkommenden Differenzen, so erhält man, da hiebei jedes ε in der Anzahl $(n-1)$ auftritt:

$$[d\,d] = [(\varepsilon_i - \varepsilon_k)^2] = (n-1)\,[\varepsilon\,\varepsilon] - 2\,[\varepsilon_i\,\varepsilon_k],$$

worin $[\varepsilon_i\,\varepsilon_k]$ die Summe aller beim Quadrieren gebildeten Produkte bedeutet. Bildet man das Quadrat der Summe aller wahren Fehler:

$$[\varepsilon]^2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n)^2 = [\varepsilon\,\varepsilon] + 2\,[\varepsilon_i\,\varepsilon_k]$$

und eliminiert man aus den beiden letzten Gleichungen die Post $2\,[\varepsilon_i\,\varepsilon_k]$, so erhält man

$$[d\,d] = n\,[\varepsilon\,\varepsilon] - [\varepsilon]^2$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (3) des § 11, welche auch in der Form

$$n\,[\varepsilon\,\varepsilon] = n\,[v\,v] + [\varepsilon]^2$$

geschrieben werden kann,

$$[d\,d] = n\,[v\,v]. \qquad (2)$$

Da die Anzahl der in dieser Quadratsumme auftretenden Differenzen d gleich $z = \frac{n\,(n-1)}{2}$ ist und diese Differenzen den Charakter von wahren Beobachtungsfehlern an sich tragen, so kann man behufs Ermittlung der mittleren Differenz δ zweier Beobachtungen die strenge Formel für den mittleren Fehler aus wahren Beobachtungsfehlern anwenden, d. h. es ist das Quadrat der mittleren Differenz δ^2 gleich der durch die volle Anzahl z dividierten Summe der Quadrate aller Beobachtungsdifferenzen, also:

$$\delta^2 = \frac{[d\,d]}{z} = \frac{2\,[d\,d]}{n\,(n-1)}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (2):

$$\delta^2 = \frac{2\,[v\,v]}{n-1}.$$

Zwischen der mittleren Differenz δ zweier Beobachtungen und dem mittleren Fehler μ einer einzelnen dieser Beobachtungen herrscht aber nach dem Fehlerübertragungsgesetze, Formel (6) des § 23, S. 9. die Relation:

$$\delta^2 = 2\,\mu^2,$$

somit ist, da

$$\mu = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}},$$

mit Rücksicht auf Gleichung (2):

$$\mu = \sqrt{\frac{[d\,d]}{n\,(n-1)}}. \qquad (3)$$

welche Gleichung zuerst von Andrae (1869) aufgestellt wurde. Dieselbe hat mehr theoretisches Interesse als praktischen Wert, da mit Rücksicht auf die Anzahl n der v und die Anzahl $\frac{n(n-1)}{2}$ der d die Berechnung des mittleren Fehlers nach der Formel $\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$ den Vorzug verdient.

Bezeichnet man mit Δ die durchschnittliche Differenz der z Beobachtungsdifferenzen, so besteht die Definitionsgleichung:

$$\Delta = \frac{[d]}{z} = \frac{2\,[d]}{n\,(n-1)}.$$

Nach dem Fehlerübertragungsgesetz ist:

$$\Delta = \vartheta \sqrt{2},$$

wenn ϑ den durchschnittlichen Fehler einer einzelnen Beobachtung bedeutet.

Durch Verbindung dieser beiden Gleichungen ergibt sich die von Jordan aufgestellte und von Helmert (1876) zum ersten Male streng bewiesene Formel:

$$\vartheta = \frac{[d]\sqrt{2}}{n\,(n-1)}. \tag{4}$$

Bezeichnet man mit δ die wahrscheinliche Differenz der Beobachtungsdifferenzen, so besteht die Näherungsgleichung:

$$\delta = \left(\frac{[\sqrt{d}]}{z}\right)^2 = \left(\frac{2\,[\sqrt{d}]}{n\,(n-1)}\right)^2.$$

Nach dem Fehlerübertragungsgesetze ist:

$$\delta = \varrho \sqrt{2},$$

wenn ϱ den wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen Beobachtung bedeutet.

Somit besteht die Relation:

$$\varrho = \sqrt{8}\left(\frac{[\sqrt{d}]}{n\,(n-1)}\right)^2. \tag{5}$$

§ 28. Verbesserte Fehlerformeln.

Von den drei zur Berechnung des mittleren Fehlers dienenden Formeln:

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \tag{1}$$

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{[v]}{\sqrt{n(n-1)}} \qquad (2)$$

$$\mu_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\varkappa\sqrt{2}} \frac{[\sqrt{v}]^2}{n\sqrt{n(n-1)}} \qquad (3)$$

ist die erste die sicherste. Der aus ihr gewonnene Zahlenwert ist auch stets der kleinste, indem die Ungleichungen bestehen:

$$\mu_2 < \mu_1, \qquad \mu_1 < \mu_{\frac{1}{2}}.$$

Dies tritt namentlich dann auffallend hervor, wenn man den einfachsten Fall zweier Beobachtungen, wo $n = 2$ und $v_1 = -v_2$ ist, in Betracht zieht, denn man hat dann:

$$\mu_2 = v\sqrt{2} = 1{\cdot}414\, v \qquad (4)$$

$$\mu_1 = v\sqrt{\pi} = 1{\cdot}772\, v \qquad (5)$$

$$\mu_{\frac{1}{2}} = \frac{v}{\varkappa} = 2{\cdot}097\, v. \qquad (6)$$

Es liegt daher nahe, die Formeln (2) und (3) so umzugestalten, daß die aus ihnen erhaltenen Werte μ_1 beziehungsweise $\mu_{\frac{1}{2}}$ mit dem sichersten Werte μ_2 ziffermäßig übereinstimmen. Dies kann annähernd dadurch erreicht werden, daß man in den Formeln (2) und (3) im Nenner anstatt $(n-1)$ den Wert $(n-x)$ setzt und hierin x so bestimmt, daß aus den ungünstigsten Formeln (5) und (6) der Wert μ_2 resultiert. Schreibt man also die Formel von Peters in der Form:

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{[v]}{\sqrt{n(n-x)}}$$

und speziell für $n = 2$, sowie $\mu_1 = \mu_2$:

$$\mu_2 = v\sqrt{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2v}{\sqrt{2(2-x)}},$$

so ergibt sich hieraus

$$x = \frac{4-\pi}{2},$$

womit die Formel von Peters übergeht in:

$$\mu = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{[v]}{\sqrt{n\left(n - \frac{4-\pi}{2}\right)}}. \qquad (7)$$

Daraus ergibt sich die **verbesserte Formel für den durchschnittlichen Fehler:**

$$\vartheta = \frac{[v]}{\sqrt{n\left(n - \frac{4-\pi}{2}\right)}}, \tag{8}$$

welche die **Fechner**sche Formel genannt wird (1874). Wenn annähernd $\pi = 3$, also $x = \frac{1}{2}$ gesetzt wird, so erhält man die Näherungsformel von **Fechner:**

$$\vartheta = \frac{[v]\sqrt{2}}{\sqrt{n(2n-1)}}, \tag{9}$$

welche von **Helmert** (1876) als die beste derjenigen Formeln erklärt wurde, welche die Fehlermaße aus der absoluten Summe der scheinbaren Fehler berechnen.

Geht man in ähnlicher Weise mit der Formel (3) vor, indem man schreibt:

$$\mu_1 = \frac{1}{\varkappa\sqrt{2}} \cdot \frac{[\sqrt{v}]^2}{n\sqrt{n(n-x)}}$$

und speziell für $n = 2$, sowie $\mu_1 = \mu_2$:

$$\mu_2 = v\sqrt{2} = \frac{1}{\varkappa\sqrt{2}} \cdot \frac{4v}{2\sqrt{2(2-x)}},$$

so ergibt sich:

$$x = 2 - \frac{1}{2\varkappa^2} = -0{\cdot}20 = -\frac{1}{5},$$

also

$$\mu = \frac{1}{\varkappa\sqrt{2}} \cdot \frac{[\sqrt{v}]^2\sqrt{5}}{n\sqrt{n(5n-1)}} \tag{10}$$

und

$$\varrho = \frac{[\sqrt{v}]^2\sqrt{5}}{n\sqrt{n(5n-1)}}. \tag{11}$$

Für die Näherung $x = n$ resultiert die praktisch sehr handliche **verbesserte Formel für den wahrscheinlichen Fehler:**

$$\varrho = \left(\frac{[\sqrt{v}]}{n}\right)^2. \tag{12}$$

§ 29. Beispiel.

l	v	v geordnet	vv	$\sqrt{v}$	d				dd		$\sqrt{d}$	
35° 26′ 15″	+3·8	0·8	0·64	0·89					1	16	1·0	2·0
16	+2·8	1·2	1·44	1·10	1				9	81	1·7	3·0
18	+0·8	2·8	7·84	1·67	3	2			25	4	2·2	1·4
20	−1·2	3·8	14·44	1·95	5	4	2		100	49	3·2	2·6
25	−6·2	6·2	38·44	2·49	10	9	7	5	4	25	1·4	2·2
35° 26′ 18·8″	0	14·8	62·80	8·10	$[d] = 48$				$[dd] = 314$		$[\sqrt{d}] = 20·7$	

Das arithmetische Mittel der fünf unabhängigen Winkelmessungen ist $x = 35^\circ\,26'\,18·8''$. Rechnet man die einzelnen v, v^2 und $\sqrt{v}$ sowie die einzelnen d, d^2 und $\sqrt{d}$ und deren Summen, so findet man die charakteristischen Fehler einer Einzelmessung wie folgt:

$$\text{durchschnittlicher Fehler } \vartheta_v = \frac{[v]}{\sqrt{n(n-1)}} = \frac{14·8}{\sqrt{20}} = 3·31''$$

$$\text{oder } \vartheta_d = \frac{[d]\sqrt{2}}{n(n-1)} = \frac{48\sqrt{2}}{20} = 3·39'',$$

$$\text{mittlerer Fehler } \mu_v = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{62·80}{4}} = 3·96''$$

$$\text{oder } \mu_d = \sqrt{\frac{[dd]}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{314}{20}} = 3·96'',$$

$$\text{wahrscheinlicher Fehler } \varrho_v = \frac{[\sqrt{v}]^2}{n\sqrt{n(n-1)}} = \frac{8·10^2}{5\sqrt{20}} = 2·93''$$

$$\text{oder } \varrho_d = \sqrt{8}\left(\frac{[\sqrt{d}]}{n(n-1)}\right)^2 = \sqrt{8}\left(\frac{20·7}{20}\right)^2 = 2·93''.$$

Die Aufsuchung durch Abzählen der nach ihrer Größe geordneten v gibt:

$$\varrho_a = 2·80''.$$

Der sicherste Wert des durchschnittlichen Fehlers ist der aus dem mittleren Fehler nach Formel (1) des § 28 abgeleitete:

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu = 0·798 \,.\, 3·96 = 3·16'';$$

sein direkt nach **Peters** erhaltener Wert $\vartheta_v = 3·31''$ ist also um 0·15″ zu groß. Rechnet man ihn aber direkt nach **Fechner** aus der Formel (9) des § 28:

$$\rho = \frac{[r]\sqrt{2}}{\sqrt{n(2n-1)}} = \frac{14{\cdot}8 \,.\, 1{\cdot}414}{\sqrt{45}} = 3{\cdot}12'',$$

so stimmt er bis auf 0·04″ mit dem sichersten Werte zusammen.

Der sicherste Wert des wahrscheinlichen Fehlers ist der aus dem mittleren Fehler nach Formel (1) des § 28 abgeleitete:

$$\rho = \varkappa\sqrt{2} \,.\, \mu = 0{\cdot}674 \,.\, 3{\cdot}96 = 2{\cdot}67''.$$

Der oben erhaltene Wert $\rho_r = 2{\cdot}95''$ ist um 0·26″ größer. Rechnet man ihn aber nach der Formel (12) des § 28:

$$\rho = \left(\frac{[\sqrt{r}]}{n}\right)^2 = \left(\frac{8{\cdot}10}{5}\right)^2 = 2{\cdot}62'',$$

so stimmt er bis auf 0·05″ mit dem sichersten Werte überein.

§ 30. Die Zuverlässigkeit der empirischen Fehlermittel.

Bezeichnet

$$\mu = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon$$

den aus einer unendlichen Anzahl von wahren Fehlern abgeleiteten theoretischen mittleren Fehler einer einzelnen Beobachtung und

$$\sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}}$$

den aus einer endlichen Anzahl von scheinbaren Fehlern erhaltenen empirischen mittleren Fehler, so stellt die Differenz

$$\Delta = \frac{[v\,v]}{n-1} - \mu^2$$

den in der Bestimmung des Quadrates des mittleren Fehlers $\frac{[v\,v]}{n-1}$ begangenen wahren Fehler dar. Da es unmöglich ist, den wahren Wert desselben jemals zu erhalten, so findet man sich mit der Berechnung desjenigen Wertes ab, welchem wenigstens die größte mathematische Erwartung zukommt, d. i. aber der mittlere zu befürchtende Fehler μ_2 in der Bestimmung des mittleren Fehlerquadrates $\frac{[v\,v]}{n-1}$. Das Quadrat dieses mittleren Fehlers ist offenbar durch den Mittelwert des quadratischen Ausdruckes

$$f^2 = \left(\frac{[v\,v]}{n-1} - \mu^2\right)^2 \tag{1}$$

definiert. Entwickelt man diesen Ausdruck, so erhält man:

$$l^2 = \left(\frac{[vv]}{n-1}\right)^2 - 2\frac{[vv]}{n-1}\mu^2 + \mu^4. \qquad (2)$$

Um den Durchschnittswert dieses Ansatzes zu bestimmen, bilde man die Durchschnitte der einzelnen Glieder und addiere sie. Nun ist der Mittelwert von $\frac{[vv]}{n-1} = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}$ gleich μ^2, so daß die beiden letzten Glieder in ihrem Mittel zusammen $-2\mu^2\mu^2 + \mu^4 = -\mu^4$ geben. Um den Mittelwert des ersten Gliedes zu erhalten, gehe man mittels der Gleichung (9) des § 25, S. 98

$$[vv] = [\varepsilon\varepsilon] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}$$

von den scheinbaren auf die wahren Fehler über. Diese Gleichung kann mit Bezug auf die Gleichung (10) des § 25:

$$[\varepsilon]^2 = [\varepsilon\varepsilon] + 2[\varepsilon_i\varepsilon_k]$$

auch wie folgt geschrieben werden:

$$[vv] = \frac{(n-1)[\varepsilon\varepsilon] - 2[\varepsilon_i\varepsilon_k]}{n},$$

so daß man für das erste Glied des Ansatzes (2) setzen kann:

$$\left(\frac{[vv]}{n-1}\right)^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]^2}{n^2} - 4\frac{[\varepsilon\varepsilon][\varepsilon_i\varepsilon_k]}{n^2(n-1)} + 4\frac{[\varepsilon_i\varepsilon_k]^2}{n^2(n-1)^2}. \qquad (a)$$

Beachtet man, daß

$$[\varepsilon\varepsilon]^2 = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2)^2 = [\varepsilon^4] + 2[\varepsilon_i^2\varepsilon_k^2];$$

daß der Durchschnittswert der Summe $[\varepsilon^4]$ nach § 16, S. 54 bestimmt ist aus

$$S_4 = \frac{[\varepsilon^4]}{n} = \frac{3}{4h^4} = 3\mu^4$$

und der Durchschnittswert der Summe $[\varepsilon_i^2\varepsilon_k^2]$, welche aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Produkten besteht, durch

$$[\varepsilon_i^2\varepsilon_k^2] = \frac{n(n-1)}{2}\mu^4,$$

weil der mittlere Wert eines jeden $\varepsilon_i^2\varepsilon_k^2$ gleich μ^4 ist, so daß man im Durchschnitt setzen kann:

$$[\varepsilon\varepsilon]^2 = 3n\mu^4 + n(n-1)\mu^4,$$

so ist der Mittelwert des ersten Gliedes von (a), nämlich von $\frac{[\varepsilon\varepsilon]^2}{n^2}$:

$$\mathrm{I} = \frac{3\,\mu^4}{n} + \frac{n-1}{n}\,\mu^4.$$

Das zweite Glied von (α), worin der Faktor $[\varepsilon_i\,\varepsilon_k]$ bei der Mittelbildung zu Null wird, zählt deshalb nicht mit; das dritte Glied hingegen, welches den Faktor

$$[\varepsilon_i\,\varepsilon_k]^2 = [\varepsilon_i^2\,\varepsilon_k^2] - 2\,[\varepsilon_i\,\varepsilon_k\,\varepsilon_i'\,\varepsilon_k']$$

enthält, dessen Mittelwert wegen $[\varepsilon_i\,\varepsilon_k\,\varepsilon_i'\,\varepsilon_k'] = 0$ auch gleich ist dem Mittelwert von $[\varepsilon_i^2\,\varepsilon_k^2]$, nämlich $\frac{n\,(n-1)}{2}\,\mu^4$, gibt als Mittelwert von $4\,\frac{[\varepsilon_i\,\varepsilon_k]^2}{n^2\,(n-1)^2}$:

$$\mathrm{II} = \frac{2\,\mu^4}{n\,(n-1)}.$$

Folglich ist der Mittelwert von $\left(\frac{[v\,v]}{n-1}\right)^2$:

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} = \frac{3\,\mu^4}{n} + \frac{n-1}{n}\,\mu^4 + \frac{2\,\mu^4}{n\,(n-1)}$$

und der Mittelwert von $\varDelta^2$:

$$\mu_2^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{n-1}{n} + \frac{2}{n\,(n-1)} - 1\right)\mu^4 = \frac{2}{n-1}\,\mu^4.$$

Der mittlere Fehler μ_2 in der Bestimmung des mittleren Fehlerquadrates, wenn sie nach der Formel $\mu^2 = \frac{[v\,v]}{n-1}$ vorgenommen wird, ist demnach

$$\mu_2 = \mu^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}. \tag{3}$$

Diese Formel kann auch kürzer in folgender Weise erhalten werden*).

Ist x der wahrscheinlichste Wert der beobachteten Größen l_1, l_2, . . . l_n, so ergibt sich der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung aus der Beziehung:

$$\mu^2 = \frac{[(x-l)^2]}{n-1} = \frac{[v\,v]}{n-1} = \frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n} \tag{4}$$

und der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels aus der Formel (14) des § 25:

*) Vgl. des Verfassers: „Theoretische und historische Betrachtungen über die Ausgleichungsrechnung". Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen, Wien 1907, Art. VI.

$$M^2 = \frac{[(x-l)^2]}{n(n-1)}.$$

Sowie für den Mittelwert aus einer Reihe von Beobachtungsgrößen ein mittlerer Fehler angegeben werden kann, ebenso läßt sich für den mittleren Wert aus einer Reihe von Beobachtungsfehlern, wie überhaupt für jede auf Grund von Beobachtungsdaten abgeleitete Größe, ein mitterer Fehler nach den Regeln der Fehlertheorie berechnen. Da μ^2 das arithmetische Mittel aller ε^2 ist, so wie x das arithmetische Mittel aller l, so ist — den analogen Vorgang wie bei der Ermittlung von M^2 einschlagend — das Quadrat des mittleren Fehlers von μ^2 dargestellt durch die Formel:

$$\mu_2^2 = \frac{[(\mu^2-\varepsilon^2)^2]}{n(n-1)}.$$

Entwickelt man die Quadratsumme im Zähler, so erhält man

$$\mu_2^2 = \frac{n\mu^4 - 2\mu^2[\varepsilon^2] + [\varepsilon^4]}{n(n-1)} = \frac{\mu^4}{n-1}\left(1 - 2\frac{[\varepsilon^2]}{n\mu^2} + \frac{[\varepsilon^4]}{n\mu^4}\right),$$

oder mit Rücksicht auf (4):

$$\mu_2^2 = \frac{\mu^4}{n-1}\left(\frac{[\varepsilon^4]}{n\mu^4} - 1\right).$$

Wird nun der Durchschnittswert der vierten Potenzen der wahren Fehler unter der Voraussetzung gebildet, daß sämtliche ε alle möglichen Werte mit Rücksicht auf ihre Wahrscheinlichkeit durchlaufen, so ist zu setzen $\frac{[\varepsilon^4]}{n} = 3\mu^4$ und man erhält:

$$\mu_2^2 = \frac{2\mu^4}{n-1}$$

und wie zuvor (3):

$$\mu_2 = \mu^2\sqrt{\frac{2}{n-1}} = \frac{[vv]}{n-1}\sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Das Quadrat des mittleren Fehlers als Funktion der scheinbaren Fehler ist daher mit seinen mittleren Fehlergrenzen wie folgt zu schreiben:

$$\mu^2 = \frac{[vv]}{n-1}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right).$$

Somit ist

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}\,\sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-1}}} \qquad (5)$$

Entwickelt man den zweiten Wurzelausdruck nach der allgemeinen Formel

$$\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{8}\alpha^2 + \frac{1}{16}\alpha^3 - \cdots$$

und vernachlässigt man alle Glieder von α^2 an, so resultiert die Näherungsformel von Bessel:

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\right) = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}\left(1 \pm \frac{0{\cdot}70711}{\sqrt{n-1}}\right). \tag{6}$$

Genauer ist die Formel von Simony (Zeitschr. für das land-landwirtsch. Versuchswesen in Österreich, Wien 1905):

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}\left(1 \pm \frac{\sqrt{8n-9}}{4(n-1)}\right), \tag{7}$$

die auch schon für sehr mäßige n Geltung besitzt. Die genaueste Formel lieferte Helmert (Astronomische Nachrichten, 1876):

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}\left(1 \pm \sqrt{2 - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sqrt{\frac{8}{n-1}}}\right). \tag{8}$$

Schreibt man die Formeln (6), (7) und (8) in der Form $\mu = \mu_0(1 \pm \alpha)$, so erscheint das α von Bessel als Näherungsausdruck des Wertes von Simony, und dieser wieder als eine Näherung des Wertes von Helmert. Wie wenig aber die drei Formeln untereinander abweichen, geben die folgenden Spezialisierungen zu erkennen:

	Helmert:	Simony:	Bessel:
Für $n = 5$ ist $\alpha =$	0·346 45	0·347 99	0·353 55
10	0·233 84	0·234 06	0·235 70
20	0·161 65	0·161 69	0·162 22
30	0·131 01	0·131 02	0·131 31
40	0·113 04	0·113 05	0·113 23
50	0·100 88	0·100 89	0·101 02
100	0·071 02	0·071 02	0·071 07

Man kann daher die Besselsche Formel selbst für mäßig große n und die Simonysche Formel auch für kleine n als praktisch ausreichend bezeichnen.

Da der mittlere Fehler als Funktion der wahren Fehler mit seinen mittleren Fehlergrenzen durch die im § 18, S. 70, abgeleitete Formel

$$\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2n}}\right)$$

bestimmt ist, so sieht man im Vergleiche mit Formel (6) auch hier wieder deutlich, daß die Formel für die scheinbaren Fehler aus der Formel für die wahren Fehler hervorgeht, wenn anstatt der Anzahl n der Beobachtungen die Anzahl $(n-1)$ der überschüssigen Beobachtungen genommen wird. Man kann daher mit Hinweis auf die im § 18 abgeleiteten Formeln für die charakteristischen Fehler sofort folgende Formeln anschreiben:

Der durchschnittliche Fehler als Funktion der scheinbaren Fehler mit seinen mittleren Fehlergrenzen ist

$$\vartheta = \frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{\pi-2}{2(n-1)}}\right) = \frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}}\left(1 \pm \frac{0\cdot75551}{\sqrt{n-1}}\right). \tag{9}$$

Der wahrscheinliche Fehler als Funktion der scheinbaren Fehler mit seinen mittleren Fehlergrenzen ist annähernd:

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{[\sqrt{|v|}]^2}{n\sqrt{n(n-1)}}\left(1 \pm \frac{2}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\frac{1}{\varkappa\sqrt{\pi}} - 1}\right) = \\ &= \frac{[\sqrt{|v|}]^2}{n\sqrt{n(n-1)}}\left(1 \pm \frac{0\cdot85544}{\sqrt{n-1}}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

In der folgenden Tabelle sind die relativen mittleren Fehler der drei Formeln (6), (9) und (10) für μ, ϑ und ϱ in Einheiten der entsprechenden Fehlergrößen für einige Werte von n zusammengestellt, woraus ziffermäßig entnommen werden kann, daß der mittlere Fehler auch als Funktion der scheinbaren Beobachtungsfehler das zuverlässigste Maß zur Beurteilung der Genauigkeit von Beobachtungen darstellt und daß in zweiter Linie der durchschnittliche Fehler rangiert.

n	μ_μ	μ_ϑ	μ_ϱ
2	0·7071	0·7555	0·8554
3	0·5000	0·5342	0·6049
4	0·4083	0·4362	0·4939
5	0·3536	0·3778	0·4277
10	0·2357	0·2518	0·2851
20	0·1622	0·1733	0·1963
30	0·1313	0·1403	0·1589
40	0·1132	0·1210	0·1370
50	0·1010	0·1079	0·1222
100	0·0711	0·0759	0·0860

§ 31. Der maximale mittlere Fehler.

Sind zur Bestimmung einer unbekannten Größe n Beobachtungen l_1 bis l_n angestellt worden, so ist der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \tag{1}$$

und der mittlere Fehler dieses mittleren Fehlers nach der Besselschen Formel:

$$\mu_1 = \mu \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}. \tag{2}$$

Offenbar ist dieser mittlere Fehler μ_1 des mittleren Fehlers μ, als eine abgeleitete Größe der Beobachtungsdaten, selbst wieder mit einem Fehler behaftet, dessen Mittelwert nach dem Fehlerübertragungsgesetze wie folgt berechnet werden kann.

Der mittlere Fehler m_x einer bestimmten Größe x überträgt sich auf eine durch Multiplikation mit einer konstanten Zahl a abgeleitete Größe ax durch Multiplikation des Fehlers m_x mit derselben Konstanten a; es ist also der mittlere Fehler m_{ax} des Produktes ax bestimmt durch

$$m_{ax} = a\, m_x.$$

Setzt man nun $x = \mu$, $m_x = \mu_1$, $a = \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}$ und $m_{ax} = \mu_2$, so erhält man als mittleren Fehler μ_2 des mittleren Fehlers μ_1 die Gleichung

$$\mu_2 = \mu_1 \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}} = \mu \left(\sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\right)^2.$$

In der gleichen Weise bestimmt sich der mittlere Fehler μ_3 des mittleren Fehlers μ_2:

$$\mu_3 = \mu_2 \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}} = \mu \left(\sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\right)^3$$

und allgemein der mittlere Fehler μ_r des mittleren Fehlers μ_{r-1}:

$$\mu_r = \mu \left(\sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\right)^r.$$

Schreitet man so weiter bis ins Unendliche, so resultiert als mittlerer Fehler einer einzelnen Beobachtung die unendliche Reihe:

$$\mu_m = \mu + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_\infty.$$

Die ungünstigste Kombination aller dieser Fehlerbeträge tritt offenbar unter der Annahme durchaus gleicher Vorzeichen ein; man erhält so durch Addition das Maximum:

$$\mathfrak{M} = \mu \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} + \frac{1}{(\sqrt{2(n-1)})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2(n-1)})^3} + \ldots \right\}.$$

Der Ausdruck in der Parenthese ist eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}$, dessen Summe gibt für unendlich viele Glieder den Wert $\frac{1}{1-\alpha}$ und damit wird:

$$\mathfrak{M} = \frac{\mu}{1 - \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}}. \qquad (3)$$

Legt man statt der Besselschen Formel die fast ebenso einfache, aber wesentlich genauere Formel von Simony zu Grunde, so erhält man, indem für $\alpha = \frac{\sqrt{8n-9}}{4(n-1)}$ zu setzen ist:

$$\mathfrak{M} = \frac{4(n-1)}{4(n-1) - \sqrt{8n-9}}\,\mu. \qquad (4)$$

Die Fehlergröße $\mathfrak{M}$ kann als maximaler mittlerer Fehler einer Beobachtung bezeichnet werden, denn sie gibt im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie mit dem Maximum der mathematischen Erwartung oder mit dem größten Hoffnungswerte jenen Fehlerbetrag an, mit dem eine Beobachtung von bestimmter Gattung im ungünstigsten Falle behaftet sein kann. Er ist größer als der theoretische mittlere Fehler μ, nähert sich ihm aber um so mehr, je mehr die Anzahl der Beobachtungen wächst und erreicht für $n = \infty$ sein Minimum

$$\mathfrak{M}_{min} = \frac{1}{h\sqrt{2}},$$

d. h. bei einer unendlichen Anzahl von Beobachtungen ist auch der aus den scheinbaren Beobachtungsfehlern berechnete mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung sein wahrer Wert, ebenso wie das arithmetische Mittel aus einer unendlichen Anzahl von Beobachtungsgrößen deren wahren Wert darstellt.

In welcher Weise das Verhältnis des maximalen mittleren Fehlers $\mathfrak{M}$ zu dem empirischen mittleren Fehler μ, der Einheit sich nähernd, mit der wachsenden Anzahl der Beobachtungen abnimmt, geht aus folgendem Täfelchen hervor:

	Bessel $\frac{\mathfrak{M}}{\mu}$	Simony $\frac{\mathfrak{M}}{\mu}$
$n = 5$	1·547	1·534
10	1·308	1·306
20	1·194	1·193
30	1·151	1·151
40	1·128	1·128
50	1·114	1·114
100	1·077	1·077.

§ 32. Untersuchung von Fehlerreihen.

Für die Anwendung der hier vorgetragenen Fehlertheorie ist die Geltung des Gaußschen Fehlergesetzes die wesentlichste Voraussetzung. Um eine vorhandene Fehlerreihe nach dieser Richtung hin zu untersuchen, gibt es einige Mittel und Wege. Am einfachsten ist es, irgend ein Genauigkeits- oder Fehlermaß auf mehrfache Art zu bestimmen und auf ihre Übereinstimmung hin zu prüfen. Rechnet man z. B. das Präzisionsmaß h aus allen drei charakteristischen Fehlern, so soll h immer in gleicher Größe resultieren, insoferne die Beobachtungsfehler das Gaußsche Gesetz strenge befolgen. Entsprechend den idealen Beziehungen

$$h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} = \frac{1}{\vartheta\sqrt{\pi}} = \frac{\varkappa}{\varrho}$$

soll bei Vorhandensein von wahren Beobachtungsfehlern zwischen den Gleichungen

$$h = \sqrt{\frac{n}{2[\varepsilon\varepsilon]}} = \frac{n}{[\varepsilon]\sqrt{\pi}} = \varkappa\left(\frac{n}{[\sqrt{\varepsilon}]}\right)^2$$

vollkommene Übereinstimmung bestehen. Sind statt der wahren die scheinbaren Fehler gegeben, so kann aus dem Genügen der Gleichungen

$$h = \sqrt{\frac{n-1}{2[vv]}} = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{[v]\sqrt{\pi}} = \frac{\varkappa n\sqrt{n(n-1)}}{[\sqrt{v}]^2}$$

auf den Grad der Einhaltung des Exponentialgesetzes geschlossen werden. Hiebei kommt dem Umstande, daß die Bestimmungsart aus dem wahrscheinlichen Fehler nur eine Annäherung an den streng theoretischen Wert gibt, praktisch keine Bedeutung zu. (Vgl. S. 131.)

Verlegt man sich auf den wahrscheinlichen Fehler, so besteht in der Vergleichung seiner direkten Bestimmungen aus den Beobachtungsfehlern und durch Abzählen der Fehler, sowie seiner indi-

rekten Bestimmungen aus dem mittleren und durchschnittlichen Fehler ein ähnliches Mittel zur Prüfung einer Fehlerreihe in Bezug auf das Befolgen des Gaußschen Gesetzes. Die direkte Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers aus den Beobachtungsdifferenzen kann hiebei aus dem Grunde unterbleiben, weil diese ebenso wie die Bestimmung des mittleren Fehlers aus den Beobachtungsdifferenzen identisch ist mit der direkten Bestimmung aus den scheinbaren Fehlern. (Der durchschnittliche Fehler liefert im allgemeinen bei Benützung der scheinbaren Fehler und der Beobachtungsdifferenzen abweichende Resultate. Siehe Beispiel im § 29.)

Einen klaren Einblick gewährt neben der Formel $\left(\frac{\rho}{\varkappa\vartheta}\right)^2 = \pi$ auch die Gleichung

$$2\frac{\mu^2}{\vartheta^2} = \pi = 3{\cdot}14159,$$

deren Erfüllung, wie Cornu (1876) erkannt zu haben glaubt, als ein geeignetes Kriterium dafür erblickt werden kann, daß die Fehler einer vorliegenden Fehlerreihe das Gaußsche Gesetz gut befolgen. Indessen ist die Erfüllung dieser Probe zwar notwendig, aber sie ist allein nicht ausreichend. Eine erschöpfende Untersuchung nach dieser Richtung hin hat sich auch darauf zu erstrecken, ob die Anzahl und die Summe der positiven und negativen Fehler gleich ist, ferner auch darauf, ob die zwischen bestimmten Grenzen $-a$ und $+a$ zu erwartende Anzahl von Fehlern auch tatsächlich vorhanden ist, denn erst dann besteht genügende Bürgschaft für die wahrscheinlichste Verteilung der Fehler.

Da die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ oder ohne Rücksicht auf das Vorzeichen zwischen Null und a bestimmt ist durch den Ausdruck

$$\Theta(a\,h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ah} e^{-t^2}\,dt,$$

so sind unter n Fehlern $z = n\,.\,\Theta(a\,h)$ Fehler vorhanden, welche die Grenzen $\mp a$ gesetzmäßig einhalten, d. h. kleiner als a sein sollen. Denn da die Wahrscheinlichkeit $\Theta(a\,h)$ für das Auftreten eines Fehlers zwischen 0 und a durch das Verhältnis der Anzahl z aller zwischen 0 und a vorkommender Fehler zur Gesamtanzahl n aller Fehler definiert ist, so besteht die Relation: $\frac{z}{n} = \Theta(a\,h)$. Ist an Stelle von h eine der Größen μ, ϑ oder ρ gegeben, so tritt an Stelle von $\Theta(a\,h)$

die entsprechende Funktion $\Theta\left(\frac{a}{\mu}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, $\Theta\left(\frac{a}{\vartheta}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\right)$ beziehungsweise $\Theta\left(\frac{a}{\varrho}\varkappa\right)$. Ist also beispielsweise der wahrscheinliche Fehler gegeben, so sind unter n Fehlern

$$z = n\,.\,\Theta\left(\frac{a}{\varrho}\varkappa\right) = n\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{a}{\varrho}\varkappa} e^{-t^2}\,dt$$

vorhanden, welche die Grenzen $\pm a$ gesetzmäßig einzuhalten hätten.

Um Untersuchungen nach dieser Richtung hin leicht anstellen zu können, hat man entsprechende Tafeln entworfen. Im Anhange dieses Buches bringt die Tafel I für $h = 1$ die Funktionswerte

$$\Theta(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^a e^{-t^2}\,dt$$

mit dem Argumente a und die Tafel II für $\varrho = 1$ die Funktionswerte

$$\Theta(a\varkappa) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a\varkappa} e^{-t^2}\,dt$$

mit dem Argumente $a\varkappa$. Hat nun h nicht den Wert 1, so sind in Tafel I an Stelle der Argumente a die Argumente $a\,h$ anzunehmen, und ist ϱ von 1 verschieden, so sind in Tafel II statt der Argumente $a\varkappa$ die Argumente $\frac{a\varkappa}{\varrho}$ zu setzen. Die Tabellen III, IV und V enthalten in übersichtlicher Zusammenstellung die betreffenden Funktionswerte für die Einheit der charakteristischen Fehlermaße. Sie haben jedoch nur für wahre Fehler ε volle Giltigkeit. Gelangt eine Reihe von scheinbaren Fehlern v zur Untersuchung, so hat man entsprechend den Gleichungen

$$\frac{\mu}{\mu_\varepsilon} = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \quad \text{und} \quad \frac{h_v}{h_\varepsilon} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

die zu Grunde gelegten Fehlermaße ϱ, μ, ϑ strenge genommen vorerst mit $\sqrt{\frac{n-1}{n}}$ zu multiplizieren, beziehungsweise das Genauigkeitsmaß h durch diese Verhältniszahl zu dividieren. Es gelangen dann folgende Formeln zur Anwendung:

$$z = n\,.\,\Theta\left(a\,h\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)$$

$$z = n\,.\,\Theta\left(\frac{a\varkappa}{\varrho}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)$$

$$z = n \,.\, \Theta\left(\frac{a}{\mu} \sqrt{\frac{n}{2\,(n-1)}}\right)$$

$$z = n \,.\, \Theta\left(\frac{a}{\vartheta} \sqrt{\frac{n}{\pi\,(n-1)}}\right).$$

Ist aber n hinreichend groß, so wird eine diesbezügliche Modifikation der Tafelargumente an den Tafelfunktionen nur geringfügige Änderungen hervorbringen, und es können dann diese umständlichen Modifikationen ohne Nachteil unterbleiben.

Sollen derartige Untersuchungen dazu dienen, das Gaußsche Exponentialgesetz in bezug auf seine praktische Anwendbarkeit zu überprüfen, so müssen Beobachtungsreihen mit sehr großem n zu Rate gezogen werden. So hat Bessel (1818) aus 300 Deklinationsbeobachtungen mit dem mittleren Fehler $\mu = 1''6237$ folgende Resultate gefunden und hiemit den ersten empirischen Beweis des Gaußschen Fehlergesetzes erbracht.

Intervall	Beobachtung	Theorie	Differenz
0″0—0″4	22·0	19·5	−2·5
0·4—0·8	19·3	18·3	−1·0
0·8—1·2	18·3	16·2	—2·1
1·2—1·6	9·3	13·6	+4·3
1·6—2·0	9·0	10·6	+1·6
2·0—2·4	7·7	7·9	+0·2
2·4—2·8	3·3	5·5	+2·2
2·8—3·2	5·0	3·6	—1·4
3·2—3·6	2·7	2·2	—0·5
3·6—4·0	1·3	1·3	0·0
über 4·0	2·0	1·4	−0·6

Ähnliche, das Gaußsche Gesetz bestätigende Untersuchungen haben angestellt: Hagen (1837) mit dem Vorkommen des Buchstaben e in Schriftsätzen, Laurent (1875) mit Horizontalwinkelmessungen, Newcomb (1886) mit Merkurvorübergängen vor der Sonne, Bertrand (1888) mit Schießfehlern, Jordan (1888) mit dem Vorkommen der Null in Logarithmentafeln, Schols (1887), Ferrero-Guarducci (1889) und Tinter (1904) mit Dreiecksschlußfehlern, Vogeler (1907) mit Verlosungslisten von Staatspapieren usw.

Als Beispiel sei eine von Clarke (1888) aufgestellte Reihe von 40 mikroskopischen Bestimmungen der Lage eines Teilstriches auf einem Maßstabe angeführt. Die mit gleicher Genauigkeit angestellten Beobachtungen l in Einheiten von 0·000001 Yard = 0·91 Mikrons

und deren Abweichungen v vom arithmetischen Mittel sind nachstehend, ihrer Größe nach geordnet, zusammengestellt.

l	$-v$	vv	$\sqrt{v}$	l	$+v$	vv	$\sqrt{v}$
6·35	— 2·42	5·8564	1·5556	3·95	— 0·02	0·0004	0·1414
5·48	— 1·55	2·4025	1·2450	3·91	+ 0·02	0·0004	0·1414
5·23	— 1·30	1·6900	1·1402	3·78	+ 0·15	0·0225	0·3873
5·21	— 1·28	1·6384	1·1314	3·78	+ 0·15	0·0225	0·3873
5·08	— 1·15	1·3225	1·0724	3·76	+ 0·17	0·0289	0·4123
4·84	— 0·91	0·8281	0·9539	3·68	+ 0·25	0·0625	0·5000
4·76	— 0·83	0·6889	0·9110	3·43	+ 0·50	0·2500	0·7071
4·65	— 0·72	0·5184	0·8485	3·28	+ 0·65	0·4225	0·8062
4·59	— 0·66	0·4356	0·8124	3·27	+ 0·66	0·4356	0·8124
4·51	— 0·58	0·3364	0·7616	3·26	+ 0·67	0·4489	0·8185
4·49	— 0·56	0·3136	0·7483	3·22	+ 0·71	0·5041	0·8426
4·45	— 0·52	0·2704	0·7211	3·11	+ 0·82	0·6724	0·9055
4·43	— 0·50	0·2500	0·7071	2·98	+ 0·95	0·9025	0·9747
4·43	— 0·50	0·2500	0·7071	2·95	+ 0·98	0·9604	0·9899
4·21	— 0·28	0·0784	0·5292	2·81	+ 1·12	1·2544	1·0583
4·18	— 0·25	0·0625	0·5000	2·75	+ 1·18	1·3924	1·0863
4·15	— 0·22	0·0484	0·4690	2·66	+ 1·27	1·6129	1·1269
4·10	— 0·17	0·0289	0·4123	2·64	+ 1·29	1·6641	1·1358
4·08	— 0·15	0·0225	0·3873	2·48	+ 1·45	2·1025	1·2042
3·98	— 0·05	0·0025	0·2236	2·28	+ 1·65	2·7225	1·2845
93·20	14·60	17·0444	15·8370	63·98	14·66	15·4824	15·7226

Es ist das arithmetische Mittel: $157{\cdot}18 : 40 = 3{\cdot}93$,
die algebraische Summe der scheinbaren Fehler:

$$[v] = 14{\cdot}64 - 14{\cdot}62 = +0{\cdot}02,$$

die absolute Summe der scheinbaren Fehler:

$$[v] = 14{\cdot}60 + 14{\cdot}66 = 29{\cdot}26,$$

die Summe der Fehlerquadrate:

$$[vv] = 17{\cdot}0444 + 15{\cdot}4824 = 32{\cdot}5268,$$

die Summe der Fehlerquadratwurzeln:

$$[\sqrt{v}] = 15{\cdot}8370 + 15{\cdot}7226 = 31{\cdot}5596.$$

Die Untersuchung der Fehlerreihe in bezug auf die Summen und die Anzahl der positiven und negativen Fehler fällt günstig aus, denn es ist $[+v] = 14{\cdot}64$, $[-v] = -14{\cdot}62$ und es stehen 19 positive 21 negativen Fehlern gegenüber. Es ist ferner

$$\text{der durchschnittliche Fehler } \vartheta = \frac{[v]}{\sqrt{n(n-1)}} = \frac{29{\cdot}26}{\sqrt{1560}} = 0{\cdot}741,$$

$$\text{der mittlere Fehler } \mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{32{\cdot}5268}{39}} = 0{\cdot}913,$$

der wahrscheinliche Fehler $\varrho = \frac{[|v|]^2}{n\sqrt{n(n-1)}} = \frac{31\cdot5596^2}{40\sqrt{1560}} = 0\cdot630.$

Die zwei Bestimmungen der Zahl $\pi = 3\cdot1416$ sind:

$$\pi = 2\frac{\mu^2}{\vartheta^2} = 3\cdot0394$$

$$\pi = \left(\frac{\varrho}{\varkappa\vartheta}\right)^2 = 3\cdot1837.$$

Die drei Bestimmungen des Genauigkeitsmaßes geben:

$$h_\vartheta = \frac{1}{\vartheta\sqrt{\pi}} = 0\cdot762$$

$$h_\mu = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} = 0\cdot774$$

$$h_\varrho = \frac{\varkappa}{\varrho} = 0\cdot757.$$

Die vier Bestimmungen des wahrscheinlichen Fehlers sind:

$\varrho_{\prime}$ wie oben: $= 0\cdot630$

$\varrho_{\prime\prime}$ durch Abzählen: $= 0\cdot660$

ϱ_1 abgeleitet aus ϑ: $= 0\cdot626$

ϱ_2 abgeleitet aus μ: $= 0\cdot616.$

Teilt man die $n = 40$ Fehler ohne Rücksicht auf das Vorzeichen in Gruppen derart ab, daß sie in die Intervalle (0, 0·5), (0·5, 1·0), (1·0, 1·5) usw. zu liegen kommen, wie dies in der ersten Kolonne der folgenden Tabelle ersichtlich erscheint, so ergeben sich die in der zweiten Kolonne eingeschriebenen tatsächlich beobachteten Fehleranzahlen. In der dritten und vierten Kolonne sind die bezüglichen von der Theorie geforderten Anzahlen ausgewiesen, und zwar in der dritten Kolonne unter der genäherten Annahme, daß die übrigbleibenden Fehler wahre Werte sind, während in der vierten Kolonne die Berechnung mit Rücksicht darauf erfolgte, daß die übrigbleibenden Fehler nur scheinbare Beobachtungsfehler darstellen.

Intervall	Beobachtung	1. Theorie	2. Theorie
0·0—0·5	15	16·6	16·8
0·5—1·0	14	12·4	12·5
1·0—1·5	8	6·9	6·8
1·5—2·0	2	2·9	2·8
2·0—∞	1	1·2	1·1
	40	40·0	40·0

Die Berechnung nimmt hiebei folgenden Verlauf. Unter Zugrundelegung des aus μ abgeleiteten Wertes von $h = 0{\cdot}77428$ erhält man mit Benützung der Tabelle I:

a	$a\,h$	$\Theta(a\,h)$	$n \,.\, \Theta(a\,h)$	$n \,.\, \Theta(a_i\,h) - n \,.\, \Theta(a_{i+1}\,h)$
0·5	0·3872	0·41601	16·64	16·6
1·0	0·7743	0·72648	29·06	12·4
1·5	1·1614	0·89950	35·98	6·9
2·0	1·5486	0·97148	38·86	2·9
∞	∞	1·00000	40·00	1·2

Rechnet man mit dem aus μ abgeleiteten Werte von $\varrho = 0{\cdot}61598$, so erhält man mit Benützung der Tabelle II:

$a\varkappa$	$\frac{a\varkappa}{\varrho}$	$\Theta\left(\frac{a\varkappa}{\varrho}\right)$	$n \,.\, \Theta\left(\frac{a\varkappa}{\varrho}\right)$	1. Theorie
0·5	0·8117	0·41596	16·64	16·6
1·0	1·6234	0·72646	29·06	12·4
1·5	2·4352	0·89952	35·98	6·9
2·0	3·2469	0·97148	38·86	2·9
∞	∞	1·00000	40·00	1·2

Die strengere Berechnung mit $\varrho' = \varrho \sqrt{\frac{n-1}{n}} = 0{\cdot}60823$ ergibt:

$a\varkappa$	$\frac{a\varkappa}{\varrho'}$	$\Theta\left(\frac{a\varkappa}{\varrho'}\right)$	$n \,.\, \Theta\left(\frac{a\varkappa}{\varrho'}\right)$	2. Theorie
0·5	0·8221	0·42076	16·83	16·8
1·0	1·6441	0·73253	29·30	12·5
1·5	2·4662	0·90377	36·15	6·8
2·0	3·2883	0·94344	38·94	2·8
∞	∞	1·00000	40·00	1·1

Dieselben Resultate ergeben sich auch aus den Tabellen IV und V bei Zugrundelegung der Fehlermaße μ beziehungsweise ϑ.

§ 33. Die neutralen widerspruchsfreien Werte der charakteristischen Fehlermaße.

Die Theorie der Beobachtungsfehler verlangt, daß zwischen den Genauigkeitsmaßen folgende Relationen strenge erfüllt werden:

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu = \frac{1}{\varkappa\sqrt{\pi}}\,\varrho$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\vartheta = \frac{1}{\varkappa\sqrt{2}}\,\varrho$$

$$\varrho = \varkappa\sqrt{2}\,\mu = \varkappa\sqrt{\pi}\,\vartheta$$

$$h = \frac{1}{\vartheta\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} = \frac{\varkappa}{\varrho}$$

$$2\,\frac{\mu^2}{\vartheta^2} = \frac{\varrho^2}{\varkappa^2\vartheta^2} = \pi.$$

Treten die Beobachtungsfehler rein zufällig und in unendlicher Anzahl auf, so werden diese Bedingungen auch tatsächlich in Erfüllung gehen. Da aber die wirklich begangenen Fehler nur selten mit ganzer Reinheit von zufälliger Natur sind und auch niemals in unendlicher Anzahl zur Verfügung gestellt werden können, so werden diese Forderungen in Wirklichkeit keine Befriedigung finden; es müssen vielmehr Widersprüche zutage treten, welche störend empfunden werden.

Um diese Widersprüche zu beheben, hat schon Simony den Versuch unternommen, die „Rohwerte" μ und ϑ durch Ausgleichung in die „Normalwerte" μ^* und ϑ^* derart zu verwandeln, daß sie für ϱ und h eindeutige Resultate ϱ^* und h^* liefern*).

Wir wollen hier ein einfaches Verfahren angeben, das bei Behebung sämtlicher Widersprüche zugleich die neutralsten Werte der charakteristischen Fehlermaße ganz ungezwungen zu berechnen gestattet.

Bildet man die arithmetischen Mittel:

$$\vartheta_* = \frac{\vartheta' + \vartheta_1 + \vartheta_2}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varkappa\sqrt{\pi n}}\,\frac{[\sqrt{v}]^2}{\sqrt{n(n-1)}} + \frac{[v]}{\sqrt{n(n-1)}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}\right) \quad (1)$$

$$\mu_* = \frac{\mu' + \mu_1 + \mu_2}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varkappa\sqrt{2n}}\,\frac{[\sqrt{v}]^2}{\sqrt{n(n-1)}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{[v]}{\sqrt{n(n-1)}} + \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}\right) \quad (2)$$

*) O. Simony: „Über die Anwendbarkeit der Fehlerwahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung auf Ertragsbestimmungen." (Zeitschrift für das landwirtsch. Versuchswesen in Österreich, 1905, S. 114.)

Vgl. auch des Verfassers „Theoretische und historische Betrachtungen über die Ausgleichungsrechnung". (Österr. Zeitschr. für Vermessungswesen, 1907, S. 221.)

$$\varrho_* = \frac{\varrho_{\frac{1}{2}} + \varrho_1 + \varrho_2}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{[\sqrt{r}]^2}{n\sqrt{n(n-1)}} + \varkappa\sqrt{\pi}\,\frac{[r]}{\sqrt{n(n-1)}} + \right.$$

$$\left. + \varkappa\sqrt{2}\sqrt{\frac{[rr]}{n-1}}\right) \qquad (3)$$

so können folgende Umwandlungen vorgenommen werden: Multipliziert man die Gleichung (1) mit $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, so entsteht die Gleichung (2), multipliziert man sie mit $\varkappa\sqrt{\pi}$, so ergibt sich (3); wird (2) mit $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ oder mit $\varkappa\sqrt{2}$ multipliziert, so resultiert die Gleichung (1) beziehungsweise (3); dividiert man (3) durch $\varkappa\sqrt{\pi}$ oder $\varkappa\sqrt{2}$, so ergibt sich (1) beziehungsweise (2). Es müssen daher auch für eine endliche Anzahl von Beobachtungsfehlern die Beziehungen als identisch bestehen:

$$\vartheta_* = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu_* = \frac{1}{\varkappa\sqrt{\pi}}\,\varrho_*$$

$$\mu_* = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\vartheta_* = \frac{1}{\varkappa\sqrt{2}}\,\varrho_*$$

$$\varrho_* = \varkappa\sqrt{2}\,\mu_* = \varkappa\sqrt{\pi}\,\vartheta_*$$

$$h_* = \frac{1}{\vartheta_*\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\mu_*\sqrt{2}} = \frac{\varkappa}{\varrho_*}$$

$$2\,\frac{\mu_*^2}{\vartheta_*^2} = \frac{\varrho_*^2}{\varkappa^2\,\vartheta_*^2} = \pi.$$

Die Mittelwerte ϑ_*, μ_*, ϱ_*, h_* haben also die Eigenschaft, daß sie, ohne irgend einer Bestimmungsart den Vorzug einzuräumen, die vom Gaußschen Fehlergesetze theoretisch geforderten Bedingungen stets ohne Widerspruch strenge erfüllen. Diese Fehlermaße können daher als die neutralen charakteristischen Fehler bezeichnet werden. Ohne die Eigenschaft der Widerspruchslosigkeit zu verlieren, werden sie, wie leicht einzusehen ist, auch annähernd erhalten, wenn man bei den Mittelbildungen die Bestimmungen ϑ_1, μ_1 beziehungsweise ϱ_1 oder auch die Bestimmungen mit dem Zeiger $\frac{1}{2}$ wegläßt.

Daß z. B. nach der letzten Doppelgleichung bei richtiger Berechnung der Mittelwerte die Ludolphsche Zahl unter allen Umständen genau zum Vorschein kommen muß, läßt sich wie folgt beweisen:

$$2\frac{\mu_*^2}{\vartheta_*^2} = 2\left(\frac{\frac{1}{2}(\mu_{\frac{1}{2}}+\mu_2)}{\frac{1}{2}(\vartheta_{\frac{1}{2}}+\vartheta_2)}\right)^2 = 2\left(\frac{\frac{1}{\varkappa\sqrt{2n}\sqrt{n(n-1)}}[\sqrt{v}]^2+\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}}{\frac{1}{\varkappa\sqrt{\pi n}\sqrt{n(n-1)}}[\sqrt{v}]^2+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\frac{\frac{[\sqrt{v}]^2+\varkappa n\sqrt{2n}\sqrt{[vv]}}{\varkappa n\sqrt{2n(n-1)}}}{\frac{[\sqrt{v}]^2+\varkappa n\sqrt{2n}\sqrt{[vv]}}{\varkappa n\sqrt{\pi}\sqrt{n(n-1)}}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\pi}\,\varkappa n\sqrt{2n(n-1)}}{\varkappa n\sqrt{2n(n-1)}}\right)^2 = \pi$$

$$\left(\frac{\varrho_*}{\varkappa\vartheta_*}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{2}(\varrho_{\frac{1}{2}}+\varrho_2)}{\frac{\varkappa}{2}(\vartheta_{\frac{1}{2}}+\vartheta_2)}\right)^2 = \left(\frac{\frac{[\sqrt{v}]^2}{n\sqrt{n(n-1)}}+\varkappa\sqrt{2}\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}}{\frac{1}{\sqrt{\pi n}\sqrt{n(n-1)}}[\sqrt{v}]^2+\varkappa\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\frac{[\sqrt{v}]^2+\varkappa n\sqrt{2n}\sqrt{[vv]}}{n\sqrt{n(n-1)}}}{\frac{[\sqrt{v}]^2+\varkappa n\sqrt{2n}\sqrt{[vv]}}{\sqrt{\pi}\,n\sqrt{n(n-1)}}}\right)^2 = \pi.$$

In dem Beispiele von Clarke (§ 32) ist:

$\vartheta_{\frac{1}{2}} = 0{\cdot}74577$	$\mu_{\frac{1}{2}} = 0{\cdot}93469$	$\varrho_{\frac{1}{2}} = 0{\cdot}63044$
$\vartheta_1 = 0{\cdot}74082$	$\mu_1 = 0{\cdot}92848$	$\varrho_1 = 0{\cdot}62625$
$\vartheta_2 = 0{\cdot}72867$	$\mu_2 = 0{\cdot}91325$	$\varrho_2 = 0{\cdot}61598$
$\vartheta_* = 0{\cdot}73842$	$\mu_* = 0{\cdot}92547$	$\varrho_* = 0{\cdot}62422$

$$\vartheta_* = 0{\cdot}79788\,\mu_* = 1{\cdot}18295\,\varrho_* = 0{\cdot}73842$$
$$\mu_* = 1{\cdot}25331\,\vartheta_* = 1{\cdot}48260\,\varrho_* = 0{\cdot}92547$$
$$\varrho_* = 0{\cdot}67449\,\mu_* = 0{\cdot}84535\,\vartheta_* = 0{\cdot}62422$$
$$h_* = \frac{0{\cdot}56419}{\vartheta_*} = \frac{0{\cdot}70711}{\mu_*} = \frac{0{\cdot}47694}{\varrho_*} = 0{\cdot}76405$$

$$2\frac{\mu_*^2}{\vartheta_*^2} = \left(\frac{\varrho_*}{\varkappa\vartheta_*}\right)^2 = 3{\cdot}14158; \text{ (soll } 3{\cdot}14159),$$

während sonst

$$2\frac{\mu_2^2}{\vartheta_1^2} = 3{\cdot}0394, \quad \left(\frac{\varrho_{\frac{1}{2}}}{\varkappa\vartheta_1}\right)^2 = 3{\cdot}1837$$

erhalten wird (S. 125).

§ 34. Der Begriff der Streuung.

Denkt man sich die verschiedenen Beobachtungen oder Messungen durch gerade Linien graphisch dargestellt und von einem fixen Punkte derart aufgetragen, daß sie den Anfangspunkt und die Richtung gemein und daher die Endpunkte in einer Geraden liegen haben, so wird dasjenige Stück der Geraden, auf welchem sämtliche, vermöge der Verschiedenheit der einzelnen Messungsergebnisse abweichenden Endpunkte sich ausbreiten, die Streuungsstrecke genannt. Der Abstand der beiden äußersten, den Bereich der Fehler begrenzenden Endpunkte heißt die Streuung s.

Diese in die Schießlehre und Kollektivmaßlehre eingeführte Nomenklatur ist insoferne gerechtfertigt, als sich die variablen Endpunkte der verschiedenen Messungsgrößen innerhalb des Intervalls zwischen der kleinsten und größten Messung gewissermaßen ausbreiten oder „zerstreuen".

Wenn alle Messungen fehlerlos wären, so würden beide Enden sämtlicher als Gerade zur graphischen Darstellung gebrachten Messungsresultate vollständig zusammenfallen. Das Vorhandensein der zufälligen Messungsfehler ist daher die Ursache der Streuungserscheinung. Je mehr die einzelnen Beobachtungen oder Messungen voneinander abweichen (wenn dies auch nur durch eine einzige, zufällig sehr ungenau ausgefallene Messung bewirkt wird), desto länger wird die Streuungsstrecke, so daß auch die Streuung zur Beurteilung der Genauigkeit von Beobachtungsreihen benützt werden kann. Die Ausdehnung der Streuungsstrecke ist dann als ein Bild der Genauigkeit anzusehen.

Denkt man sich in derselben Geraden von dem fixen Anfangspunkte A das arithmetische Mittel x aller Beobachtungen bis zu dem Endpunkte B und von da zu beiden Seiten den mittleren Fehler $-\mu$ und $+\mu$ aufgetragen, so wollen wir das von $-\mu$ und $+\mu$ beanspruchte Stück der Geraden die mittlere Streuung nennen, welche ihrem Betrage nach sohin doppelt so groß ist als der Absolutwert des mittleren Fehlers.*) Analoges gilt auch von der durchschnittlichen und wahrscheinlichen Streuung.

Die mittlere, durchschnittliche und wahrscheinliche Streuung, welche mit Bezug auf den Begriff der prozentuellen Fehlergrenzen auch als 68, 58 beziehungsweise 50-prozentige Streuung aufgefaßt werden können, sind daher durch folgende Ausdrücke bestimmt:

*) H. Bruns (1906) bezeichnet den einfachen mittleren Fehler von x in Anwendung auf Kollektivgegenstände als die Streuung von x und schreibt hiefür str (x).

$$s_\mu = s_{68} = 2\mu = 2\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

$$s_\vartheta = s_{58} = 2\vartheta = \frac{2[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}}$$

$$s_\varrho = s_{50} = 2\varrho = \frac{2[|\sqrt{v}|]^2}{n\sqrt{n(n-1)}}.$$

Es nimmt also die mittlere Streuung 68% die durchschnittliche Streuung 58% und die wahrscheinliche Streuung 50% der angestellten Beobachtungen in sich auf. Allgemein wird unter der p-prozentigen Streuung die Länge einer Strecke verstanden, welche im Sinne unserer graphischen Darstellung p Prozent sämtlicher angestellter Beobachtungen in sich enthält und zum Mittelwert symmetrisch liegt.

Auch das Genauigkeitsmaß kann als Funktion der Streuung wie folgt angeschrieben werden:

$$h = \frac{\sqrt{2}}{s_{68}} = \frac{2}{s_{58}\sqrt{\pi}} = \frac{2\varkappa}{s_{50}}.$$

Der anschauliche Begriff der Streuung findet in manchen Zweigen der mathematischen Wissenschaften, wie in der Theorie des Schießwesens und in der Kollektivmaßlehre zweckmäßige Anwendung, während für seine Einführung in die Geodäsie und Astronomie kein Bedürfnis besteht, wo er vorteilhafter durch die charakteristischen Fehlermaße ersetzt wird.

Im Anschlusse an die im § 16, S. 59 abgeleitete Näherungsformel

$$\varrho' h = \varkappa' = \frac{4}{\pi} J^2_{\left(\frac{1}{2}\right)} = 0{\cdot}4779, \qquad J_{\left(\frac{1}{2}\right)} = 0{\cdot}6127,$$

welche bei der Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers aus den Fehlerwurzeln an Stelle der theoretisch strengen Formel

$$\varrho h = \varkappa = \frac{4}{\pi} J^2_{(\varrho)} = 0{\cdot}4769, \qquad J_{(\varrho)} = 0{\cdot}6120$$

tritt, sei hier noch folgendes erwähnt. Aus der Tabelle I des Anhanges ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler den Wert 0·4769 nicht überschreite, zu 0·5 und daß er den Wert 0·4779 nicht überschreite, zu 0·5009; folglich gibt die Näherungsformel für ϱ' nicht genau jene Fehlergrenze an, welche von 50% der vorhandenen Beobachtungsfehler gesetzmäßig überschritten werden soll, sondern jene Fehlergrenze, innerhalb welcher 50·09% der Fehler theoretisch fallen sollen. Wird der wahrscheinliche Fehler ϱ als die 50-prozentige Fehlergrenze definiert, so stellt der quasi-wahrscheinliche Fehler ϱ' die

50%-prozentige Fehlergrenze dar. Der Unterschied beider Fehlergrenzen ist also so gering, daß er praktisch ohne Bedeutung ist. Dies geht auch aus folgender Betrachtung hervor: Es ist

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \left(\frac{\varDelta_1}{\varDelta_2}\right)^2 = \left(\frac{0\cdot6120}{0\cdot6127}\right)^2 = 0\cdot998,$$

folglich lautet die strenge Formel für den wahrscheinlichen Fehler:

$$\varrho = 0\cdot998\,\varrho' = 0\cdot998\left(\frac{[\sqrt{\varepsilon}]}{n}\right)^2 = 0\cdot998\,\frac{[\sqrt{v}]^2}{n\sqrt{n\,(n-1)}}.$$

In der Praxis wird man aber fast immer für 0·998 die Einheit, also ϱ' für ϱ nehmen dürfen.

In dem Beispiele S. 125 ist $\varrho' = 0\cdot630$, $\varrho = 0\cdot629$, ferner $s_\eta = 1\cdot826$, $s_\vartheta = 1\cdot482$, $s_\varrho = 1\cdot258$.

B. Ungleiche Genauigkeiten.

§ 35. Der Begriff des Gewichtes.

Wurden zur Bestimmung der Größe X die Beobachtungen l_1, l_2, . . . l_n angestellt, welchen der Reihe nach die ungleichen Genauigkeitsmaße h_1, h_2, . . . h_n zukommen, und wurden hiebei die wahren Fehler ε_1, ε_2, . . . ε_n begangen, so ist, wenn X bekannt wäre, die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen der wahren Fehler ausgedrückt durch das Produkt

$$h_1 e^{-h_1^2 \varepsilon_1^2} \cdot h_2 e^{-h_2^2 \varepsilon_2^2} \ldots h_n e^{-h_n^2 \varepsilon_n^2} \left(\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right)^n = h_1\, h_2 \ldots h_n \left(\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-[h^2 \varepsilon^2]}.$$

Es ist aber X in Wirklichkeit unbekannt. Betrachtet man daher in diesem Wahrscheinlichkeitsausdrucke die tatsächlich bekannten Fehler, welche — da sie nicht die wahren Fehler sein können — nunmehr mit v_1, v_2, . . . v_n bezeichnet werden sollen, als konstant und dafür die Unbekannte X als veränderlich, so liefert der analog gebaute Ausdruck

$$h_1\, h_2 \ldots h_n \left(\frac{dv}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-[h^2 v^2]}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Fehlersystem v_1, v_2, . . . v_n einem von dem wahren Werte X abweichenden Wert x entspricht. Der wahrscheinlichste Wert x von X wird nun derjenige sein, welcher dieses Wahrscheinlichkeitsprodukt oder, da der Faktor $h_1\, h_2 \,.\,.\,.\, h_n \left(\frac{dv}{\sqrt{\pi}}\right)^n$ konstant bleibt, den diesem Produkte proportionalen, mit der Än-

derung von x variablen Ausdruck $e^{-[h^2 v^2]}$ zu einem Maximum oder den Exponenten desselben $[h^2 v^2] = [h^2 (x - l)^2]$ zu einem Minimum macht. Setzt man den ersten Differentialquotienten dieser Summe nach x gleich Null, so wird

$$[h^2 (x - l)] = 0$$

und hieraus

$$x = \frac{h_1^2 l_1 + h_2^2 l_2 + \cdots + h_n^2 l_n}{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2} = \frac{[h^2 l]}{[h^2]}, \tag{1}$$

d. h. der wahrscheinlichste Wert x von X ist unter der Voraussetzung, daß die einzelnen Beobachtungen verschiedene Genauigkeiten besitzen, gleich der Summe der Produkte einer jeden Beobachtung mit dem Quadrate ihres Genauigkeitsmaßes, dividiert durch die Quadratsumme der Genauigkeitsmaße. Dieses Resultat wird das **allgemeine arithmetische Mittel der Beobachtungen** genannt.

Führt man statt der Genauigkeitsmaße $h_1, h_2, \ldots h_n$ die Zahlenwerte $g_1, g_2, \ldots g_n$ ein, welche den Quadraten der Genauigkeitsmaße gerade proportional sind, so daß die Beziehungen bestehen:

$$\frac{h_1^2}{g_1} = \frac{h_2^2}{g_2} = \cdots = \frac{h_n^2}{g_n}, \tag{2}$$

so kann für x auch gesetzt werden:

$$x = \frac{h_1^2 l_1 + \frac{g_2}{g_1} h_1^2 l_2 + \cdots + \frac{g_n}{g_1} h_1^2 l_n}{h_1^2 + \frac{g_2}{g_1} h_1^2 + \cdots + \frac{g_n}{g_1} h_1^2}$$

$$= \frac{g_1 l_1 + g_2 l_2 + \cdots + g_n l_n}{g_1 + g_2 + \cdots + g_n} = \frac{[g l]}{[g]}, \tag{3}$$

Zu demselben Resultate kann man aber auch mit Hilfe der Regel vom einfachen arithmetischen Mittel gelangen, wenn angenommen wird, daß

g_1 Beobachtungen den Wert l_1
g_2 " " " l_2
. . . .
g_n " " " l_n

ergeben haben und sämtliche Beobachtungen von gleicher Genauigkeit vorausgesetzt werden. Denn unter dieser Annahme ist die Summe aller Beobachtungen gleich $[g l]$, die Anzahl derselben gleich $[g]$, somit das arithmetische Mittel aller Beobachtungen wie oben

$$x = \frac{[g l]}{[g]}.$$

Man kann daher die den Quadraten der Genauigkeitsmaße proportionalen Zahlen, welche gleichfalls als ein Maß der Genauigkeit anzusehen sind, auffassen als die Anzahlen von gleich genauen Beobachtungen, welche den Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit sozusagen das Gleichgewicht halten, indem sie diese zu ersetzen vermögen. Da sohin eine Beobachtung von größerer Genauigkeit mehr zählt oder mehr „ins Gewicht fällt" als eine minder genaue, so wird diejenige Zahl, welche angibt, wie viele Einzel- oder Normalbeobachtungen von gleicher Genauigkeit zu einem arithmetischen Mittel vereinigt werden müssen, damit diesem die Genauigkeit der gegebenen Beobachtung zukommt, das Gewicht der Beobachtung genannt.

Zur Messung des Gewichtes einer vorliegenden Beobachtung hat hiebei das Gewicht einer Normalbeobachtung als Einheit zu dienen. Eine Beobachtung mit dem Gewichte $g = 1$ oder eine Normalbeobachtung stellt sozusagen die „Beobachtungseinheit" dar, die gewöhnlich kürzer als die „Gewichtseinheit" bezeichnet wird. Was also in der Ausgleichungsrechnung die Gewichtseinheit genannt wird, ist nicht die Einheit des Gewichtes, sondern eine Beobachtung, welcher die Gewichtseinheit zukommt. Demgemäß kann eine Beobachtung mit dem Gewichte g ersetzt werden durch g Beobachtungen mit dem Gewichte 1, weshalb statt der Benennung „Gewicht" manchmal auch anschaulicher die Bezeichnung „Anzahl" gebraucht werden kann.

Ein Beispiel möge das Vorgeführte näher erläutern. Als wahrscheinliche Fehler der von Bessel ausgeführten Messung von 22 Dreiecksabschlüssen haben sich im § 20 folgende Werte ergeben:

$$\begin{aligned} \text{Aus den Fehlerwurzeln} \dots\dots \; \varrho_{\frac{1}{2}} &= 0{\cdot}8965 \\ \text{aus den linearen Fehlern} \dots\dots \; \varrho_1 &= 0{\cdot}8727 \\ \text{aus den Fehlerquadraten} \dots\dots \; \varrho_2 &= 0{\cdot}7937 \\ \text{durch Abzählen} \dots\dots \; \varrho_a &= 0{\cdot}9660. \end{aligned}$$

Einen guten Mittelwert dieser vier Bestimmungen bildet das einfache arithmetische Mittel

$$\varrho = \frac{\varrho_{\frac{1}{2}} + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_a}{4} = 0{\cdot}8822.$$

Derselbe kann jedoch mit Berücksichtigung der verschiedenen Zuverlässigkeiten, die den einzelnen Bestimmungen innewohnen, noch wesentlich verbessert werden. Die wahrscheinlichen Fehler r in den vier Bestimmungen der wahrscheinlichen Fehler ϱ sind (S. 84):

$$r_{\frac{1}{2}} = 0{\cdot}8965 \cdot \frac{0{\cdot}57699}{\sqrt{22}} = 0{\cdot}1103$$

$$r_1 = 0{\cdot}8727 \cdot \frac{0{\cdot}50958}{\sqrt{22}} = 0{\cdot}0948$$

$$r_2 = 0{\cdot}7937 \cdot \frac{0{\cdot}47694}{\sqrt{22}} = 0{\cdot}0807$$

$$r_a = 0{\cdot}9660 \cdot \frac{0{\cdot}78672}{\sqrt{22}} = 0{\cdot}1621.$$

Die entsprechenden Genauigkeitsmaße $\mathfrak{h} = \frac{0{\cdot}47694}{r}$ und Gewichte $g = \mathfrak{h}^2$ sind:

$\mathfrak{h} = 4{\cdot}324$	$\mathfrak{h}^2 = 18{\cdot}70$	$g_{\frac{1}{2}} = 19$
$5{\cdot}031$	$25{\cdot}31$	$g_1 = 25$
$5{\cdot}910$	$34{\cdot}93$	$g_2 = 35$
$2{\cdot}942$	$8{\cdot}66$	$g_a = 9.$

Damit ergibt sich das allgemeine arithmetische Mittel:

$$\varrho_0 = \frac{g_{\frac{1}{2}}\,\varrho_{\frac{1}{2}} + g_1\,\varrho_1 + g_2\,\varrho_2 + g_a\,\varrho_a}{g_{\frac{1}{2}} + g_1 + g_2 + g_a} = \frac{[g\varrho]}{[g]} = \frac{75{\cdot}3245}{88} = 0{\cdot}8560.$$

Um zu diesem Resultate zu gelangen, bedarf es aber nicht erst dieser umständlichen Rechnung. Denn da die Gewichte g den Quadraten der Genauigkeitsmaße h^2 direkt proportional sind, das Genauigkeitsmaß aber analytisch bestimmt ist durch die Beziehungen

$$h = \frac{1}{\vartheta\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} = \frac{\varkappa}{\varrho},$$

so sind die Gewichte auch umgekehrt proportional den Quadraten der charakteristischen Fehler ϑ, μ, ϱ*), und man kann demnach die Proportionen aufstellen:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{h_1^2}{h_2^2} = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_1^2} = \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} = \frac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2}.$$

Für die Berechnung des Gewichtes kann daher irgend einer der folgenden Ansätze verwendet werden:

$$g_i = k_1\,h_i^2 = \frac{k_2}{\vartheta_i^2} = \frac{k_3}{\mu_i^2} = \frac{k_4}{\varrho_i^2},$$

*) In einem vom 14. April 1819 datierten Briefe an Olbers macht Gauß hierüber folgende Bemerkung: „Gewicht ist übrigens immer dem Quadrate der Genauigkeit direkt, dem Quadrate des sogenannten wahrscheinlichen Fehlers umgekehrt proportional, welches aber kein Lehrsatz, sondern bloß die Definition des Wortes Gewicht ist."

worin k_1, k_2, k_3, k_4 konstante Zahlenwerte bedeuten. Hat man sich für einen Rechnungsweg entschieden, so kann k willkürlich gewählt, also der Einfachheit halber auch $k = 1$ angenommen werden, so daß auch die Beziehungen gelten:

$$g^{I} = h^2, \qquad g^{II} = \frac{1}{\vartheta^2}, \qquad g^{III} = \frac{1}{\mu^2}, \qquad g^{IV} = \frac{1}{\varrho^2}.$$

Verbleiben wir in unserem Beispiele bei dem wahrscheinlichen Fehler r, so ergeben sich die neuen Gewichte

$$\begin{aligned} g' &= 1 : r^2 = 82 \\ g'_1 &= 1 : r_1^2 = 111 \\ g'_2 &= 1 : r_2^2 = 153 \\ g'_a &= 1 : r^2 = 38 \end{aligned}$$

und das allgemeine arithmetische Mittel wird:

$$\varrho_0 = \frac{[g' \varrho]}{[g']} = \frac{328{\cdot}5268}{384} = 0{\cdot}8555,$$

im Hinblick auf den Abrundungsfehler mit dem ersten Resultate gut übereinstimmend.

Durch geeignete Wahl der Konstanten k kann man die Gewichte g' in die Gewichte g überführen. Für $k = 1 : 4{\cdot}4$ ist allgemein $g = g' : 4{\cdot}4$ und speziell

$$\begin{aligned} g &= 82 : 4{\cdot}4 = 19 \\ g_1 &= 111 : 4{\cdot}4 = 25 \\ g_2 &= 153 : 4{\cdot}4 = 35 \\ g_a &= 38 : 4{\cdot}4 = 9. \end{aligned}$$

Aus dieser Betrachtung geht hervor, daß man die Gewichte einer und derselben Beobachtungsreihe mit einer beliebigen Zahl multiplizieren oder dividieren kann, ohne hiedurch an dem Resultate etwas zu ändern.

§ 36. Die charakteristischen Fehler der Gewichtseinheit als Funktion der wahren Beobachtungsfehler.

Wurden zur Bestimmung der Unbekannten X ungleich genaue Beobachtungen von der Anzahl n angestellt und gehören zu den

Beobachtungen	$l_1, l_2, \ldots l_n$
die wahren Beobachtungsfehler	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$,
die Genauigkeitsmaße	$h_1, h_2, \ldots h_n$,
die mittleren Fehler	$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$,
und die Gewichte	$g_1, g_2, \ldots g_n$,

so hat man für die Berechnung des wahrscheinlichsten Wertes der Unbekannten folgende Formeln. Zunächst ist nach Gleichung (1) des § 35:

$$x = \frac{h_1^2 l_1 + h_2^2 l_2 + \cdots + h_n^2 l_n}{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}. \tag{1}$$

Führt man an Stelle der Genauigkeitsmaße die mittleren Fehler nach der allgemeinen Formel $h^2 = 1 : 2\mu^2$ ein, so geht Gleichung (1) über in

$$x = \frac{\frac{1}{\mu_1^2} l_1 + \frac{1}{\mu_2^2} l_2 + \cdots + \frac{1}{\mu_n^2} l_n}{\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2} + \cdots + \frac{1}{\mu_n^2}}. \tag{2}$$

Multipliziert man hier Zähler und Nenner mit einer vorläufig beliebig gewählten, positiven Zahl μ_0^2, so wird

$$x = \frac{\frac{\mu_0^2}{\mu_1^2} l_1 + \frac{\mu_0^2}{\mu_2^2} l_2 + \cdots + \frac{\mu_0^2}{\mu_n^2} l_n}{\frac{\mu_0^2}{\mu_1^2} + \frac{\mu_0^2}{\mu_2^2} + \cdots + \frac{\mu_0^2}{\mu_n^2}}. \tag{3}$$

Wählt man μ_0 so, daß

$$\frac{\mu_0^2}{\mu_1^2} = g_1, \qquad \frac{\mu_0^2}{\mu_2^2} = g_2, \quad \ldots \quad \frac{\mu_0^2}{\mu_n^2} = g_n$$

wird, so erhält man die Gleichung (3) des § 35:

$$x = \frac{g_1 l_1 + g_2 l_2 + \cdots + g_n l_n}{g_1 + g_2 + \cdots + g_n}. \tag{4}$$

Betrachtet man eine wirkliche oder fingierte Beobachtung l_0 mit dem Gewichte $g_0 = 1$ und ist deren mittlerer Fehler (μ), so besteht die Relation:

$$\frac{\mu_0^2}{(\mu)^2} = g_0 = 1 \quad \text{oder} \quad (\mu) = \mu_0,$$

d. h. μ_0 ist der mittlere Fehler einer Beobachtung, welcher die Gewichtseinheit zukommt, oder kürzer, es ist μ_0 der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, was bei der Schreibweise

$$\mu_1^2 g_1 = \mu_2^2 g_2 = \ldots = \mu_n^2 g_n = \mu_0^2 \cdot 1$$

besonders deutlich in die Augen fällt.

Für irgend eine Beobachtung l_i mit dem Gewichte g_i ist der mittlere Fehler μ_i bestimmt durch

$$\mu_i = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_i}},$$

d. h. der mittlere Fehler einer Beobachtung ist gleich dem mittleren Fehler der Gewichtseinheit dividiert durch die zugehörige Gewichtswurzel.

Um μ zu ermitteln, ist daher die Kenntnis von μ_0 erforderlich. Betrachtet man die verschieden genauen Beobachtungen mit ihren verschiedenen mittleren Fehlern

$$l_1 \pm \mu_1$$
$$l_2 \pm \mu_2$$
$$\ldots \text{ usw.}$$

sowie die mit den Quadratwurzeln ihrer Gewichte multiplizierten Ausdrücke:

$$l_1 \sqrt{g_1} \pm \mu_1 \sqrt{g_1} = l_1 \sqrt{g_1} \pm \mu_0$$
$$l_2 \sqrt{g_2} \pm \mu_2 \sqrt{g_2} = l_2 \sqrt{g_2} \pm \mu_0$$
$$\ldots\ldots\ldots \text{ usw.,}$$

so erkennt man, daß die mit den Gewichtswurzeln multiplizierten Beobachtungen von gleicher Genauigkeit sind, denn alle weisen nunmehr den gleichen mittleren Fehler μ_0 auf. Man sagt daher, daß die Beobachtungen durch Multiplikation mit den entsprechenden Gewichtswurzeln auf Beobachtungen mit dem Gewichte 1 reduziert werden. Haben

die ursprünglichen Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots l_n$
die wahren Beobachtungsfehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$,
so entsprechen den reduzierten Beobachtungen $l_1 \sqrt{g_1}, l_2 \sqrt{g_2}, \ldots l_n \sqrt{g_n}$
die wahren Fehler $\varepsilon_1 \sqrt{g_1}, \varepsilon_2 \sqrt{g_2}, \ldots \varepsilon_n \sqrt{g_n}$,

denn wird eine Beobachtung mit einer konstanten Zahl multipliziert, so wächst nach dem Fehlerübertragungsgesetz auch deren Fehler in demselben Verhältnisse. Von gleich genauen, mit dem mittleren Fehler $\pm \mu_0$ behafteten Beobachtungen $l_i \sqrt{g_i}$, deren wahre Fehler die Werte $\varepsilon_i \sqrt{g_i}$ besitzen und die in der Anzahl n vorkommen, erhält man aber den mittleren Fehler μ_0 einer einzelnen dieser Beobachtungen, wenn man nach § 13 aus dem n-ten Teile der Fehlerquadratsumme die Quadratwurzel auszieht. Es ist daher der

mittlere Fehler der Gewichtseinheit: $\mu_0 = \sqrt{\dfrac{[g\,\varepsilon\,\varepsilon]}{n}}$ (5)

und der mittlere Fehler irgend einer Beobachtung l_i mit dem Gewichte g_i:

$$\mu_i = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_i}} = \sqrt{\frac{[g\,\varepsilon\,\varepsilon]}{n\,g_i}}. \tag{6}$$

Führt man in die Gleichung (1) an Stelle des Genauigkeitsmaßes h die durchschnittlichen beziehungsweise die wahrscheinlichen Fehler ein, so erhält man durch analoge Ableitung als durchschnittlichen Fehler der Gewichtseinheit:

$$\vartheta_0 = \frac{[\sqrt{g}\,\varepsilon]}{n}, \tag{7}$$

als wahrscheinlichen Fehler der Gewichtseinheit annähernd:

$$\varrho_0' = \left(\frac{[\sqrt{\sqrt{g}\,\varepsilon}]}{n}\right)^2 \tag{8}$$

und genauer:

$$\varrho_0 = 0{\cdot}998\,\varrho_0'.$$

§ 37. Genauigkeitsbestimmung des allgemeinen arithmetischen Mittels.

Besitzen die behufs Bestimmung der Unbekannten X angestellten Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots l_n$ die ungleichen Genauigkeitsmaße $h_1, h_2, \ldots h_n$, so ist die Wahrscheinlichkeit W für das Zusammentreffen aller wahren Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ proportional dem Ausdrucke

$$e^{-[h^2\varepsilon^2]} = e^{-[h^2(X-l)^2]},$$

also, wenn k einen Proportionalitätsfaktor darstellt:

$$W = k\,e^{-[h^2(X-l)^2]}\,.\,dX.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
h_1^2(X-l_1)^2 &= h_1^2X^2 - 2h_1^2Xl_1 + h_1^2l_1^2\\
h_2^2(X-l_2)^2 &= h_2^2X^2 - 2h_2^2Xl_2 + h_2^2l_2^2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\hline
[h^2(X-l)^2] &= X^2[h^2] - 2X[h^2l] + [h^2l^2].
\end{aligned}$$

Da nach der Regel des allgemeinen arithmetischen Mittels $x = \frac{[h^2l]}{[h^2]}$ ist, so wird:

$$[h^2(X-l)^2] = [h^2]\left\{X^2 - 2Xx + \frac{[h^2l^2]}{[h^2]}\right\} = [h^2]\left\{(X-x)^2 - x^2 + \frac{[h^2l^2]}{[h^2]}\right\}$$

Die Weiterentwicklung analog wie bei dem Falle gleicher Genauigkeit, gibt nach § 21:

$$W = k\,e^{-([h^2l^2]-x^2[h^2])}\,.\,e^{-[h^2](X-x)^2}\,.\,dX = c'\,e^{-[h^2](X-x)^2}\,.\,dX.$$

Zur Bestimmung von c' hat man die Beziehung:

$$c'\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[h^2](X-x)^2}\,.\,dX = \frac{c'}{\sqrt{[h^2]}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{c'\sqrt{\pi}}{\sqrt{[h^2]}} = 1.$$

Daraus folgt:

$$c = \frac{\sqrt{[h^2]}}{\sqrt{\pi}},$$

ferner

$$W = \frac{\sqrt{[h^2]}}{\sqrt{\pi}} e^{-[h^2](X-x)^2} dX.$$

Substituiert man für $X - x$ den wahren Fehler des arithmetischen Mittels, also

$$X - x = \xi, \; dX = d\xi,$$

so ist die Wahrscheinlichkeit des Fehlers ξ von der Form

$$\frac{H_a}{\sqrt{\pi}} e^{-H_a^2 \xi^2} d\xi$$

gleich:

$$W = \frac{\sqrt{[h^2]}}{\sqrt{\pi}} e^{-[h^2]\xi^2} d\xi,$$

somit ist

$$H_a^2 = h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2 = [h^2]$$

und

$$H_a = \sqrt{[hh]}, \tag{1}$$

d. h. das Quadrat des Genauigkeitsmaßes des allgemeinen arithmetischen Mittels ist gleich der Summe der Quadrate der Genauigkeitsmaße der einzelnen ungleich genauen Beobachtungen. Das Genauigkeitsmaß des einfachen arithmetischen Mittels

$$H_e = h\sqrt{n} \tag{2}$$

geht aus (1) hervor, wenn darin sämtliche h gleichgesetzt werden.

Haben die gleich genauen Beobachtungen das Gewicht g, so ist das Gewicht G_e des einfachen arithmetischen Mittels zufolge der Gleichungen (2) des § 35:

$$\frac{h^2}{g} = \frac{nh^2}{ng} = \frac{H_e^2}{G_e}$$

bestimmt durch

$$G_e = ng, \tag{3}$$

d. h. das Gewicht des aus n gleich genauen Beobachtungen gezogenen arithmetischen Mittels ist gleich dem n-fachen Gewichte einer Einzelbeobachtung. Legt man daher einer einzelnen Beobachtung das Gewicht 1 bei, so kommt dem einfachen arithmetischen Mittel aus n Beobachtungen das Gewicht n zu.

Besitzen die einzelnen Beobachtungen die verschiedenen Gewichte $g_1, g_2, \dots g_n$ und ist G_a das Gewicht des allgemeinen arithmetischen Mittels, so folgt aus (1) und den Proportionen

$$\frac{h^2}{g_i} = \frac{H_a^2}{G_a} = \frac{[hh]}{[g]}$$

die Beziehung:

$$G_a = g_1 + g_2 + \cdots + g_n = [g], \tag{4}$$

d. h. es ist das Gewicht des allgemeinen arithmetischen Mittels gleich der Summe der Gewichte der einzelnen Beobachtungen. Werden die Gewichte durchaus gleich 1 genommen, so geht die Formel (4) in (3) über.

Da das allgemeine arithmetische Mittel aufgefaßt werden kann als eine Beobachtung mit dem Gewichte G_a, so ist der mittlere Fehler des allgemeinen arithmetischen Mittels nach Gleichung (6) des § 36 gegeben durch

$$M_a = \frac{\mu_0}{\sqrt{G_a}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{[g]}} \tag{5}$$

und analog der durchschnittliche und wahrscheinliche Fehler des allgemeinen arithmetischen Mittels:

$$T_a = \frac{\vartheta_0}{\sqrt{[g]}}, \quad R_a = \frac{\varrho_0}{\sqrt{[g]}}$$

§ 38. Die charakteristischen Fehler der Gewichtseinheit als Funktionen der scheinbaren Beobachtungsfehler.

Um den mittleren Fehler der Gewichtseinheit als Funktion der scheinbaren Beobachtungsfehler auszudrücken, stelle man folgende Betrachtung an. Bei verschieden genauen Beobachtungen hat man den einzelnen Gleichungen

$$\begin{aligned} x - l_1 &= v_1 \\ x - l_2 &= v_2 \\ &\cdots\cdots \\ x - l_n &= v_n \end{aligned}$$

der Reihe nach die Gewichte $g_1, g_2, \ldots g_n$ zuzuteilen, d. h. man kann sich jede dieser Gleichungen in der Anzahl der zugehörigen Gewichte angeschrieben denken und erhält so das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} g_1 x - g_1 l_1 &= g_1 v_1 \\ g_2 x - g_2 l_2 &= g_2 v_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ g_n x - g_n l_n &= g_n v_n. \end{aligned}$$

Werden diese Gleichungen addiert und durch $[g]$ dividiert, so erhält man:

$$x - \frac{[gl]}{[g]} = \frac{[gv]}{[g]},$$

woraus, da $x = \frac{[gl]}{[g]}$ ist, die zur Kontrolle für die Berechnung des allgemeinen arithmetischen Mittels dienende Bedingung

$$[g v] = 0 \tag{1}$$

resultiert, die für gleich genaue Beobachtungen in $[v] = 0$ übergeht.

Operiert man nun an Stelle der Fehler ε der ungleich genauen Beobachtungen mit den reduzierten Fehlern $\varepsilon \sqrt{g}$ der auf gleiche Genauigkeit gebrachten Beobachtungen, so geht die Summe der Gleichungen (5) des § 25, nämlich:

$$[\varepsilon \varepsilon] = [v v] + 2 [v] \xi + n \xi^2$$

über in

$$[g \varepsilon \varepsilon] = [g v v] + 2 [g v] \xi + [g] \xi^2.$$

Zieht man in Erwägung, daß ξ, der wahre Fehler des allgemeinen arithmetischen Mittels, niemals mit Sicherheit erhalten werden kann und es noch am wahrscheinlichsten ist, hiefür den mittleren Fehler M_a nach (5) des § 37 einzuführen, also

$$\xi^2 = M_a^2 = \frac{\mu_0^2}{[g]}$$

zu setzen, so erhält man mit Rücksicht auf (1):

$$[g \varepsilon \varepsilon] = [g v v] + \mu_0^2. \tag{2}$$

Nun ist aber nach (5) des § 36: $\mu_0^2 = \frac{[g \varepsilon \varepsilon]}{n}$.

Substituiert man diesen Wert in (2), so ergibt sich als Analogon zur Gleichung (11) des § 25, S. 99:

$$[g \varepsilon \varepsilon] = \frac{n}{n-1} [g v v]. \tag{3}$$

Mit Hilfe dieser Relation ist man in der Lage, in allen Formeln, welche die Summe der mit den Gewichten multiplizierten Quadrate der wahren Fehler enthalten, die scheinbaren Fehler einzuführen. Demgemäß ist der mittlere Fehler der Gewichtseinheit:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[g \varepsilon \varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{[g v v]}{n-1}} \tag{4}$$

und der mittlere Fehler des allgemeinen arithmetischen Mittels:

$$M_a = \frac{\mu_0}{\sqrt{[g]}} = \sqrt{\frac{[g v v]}{[g]\,(n-1)}}. \tag{5}$$

Um den mittleren Fehler der Gewichtseinheit als Funktion der scheinbaren Fehler auszudrücken, kann man auch folgenden Weg

einschlagen, der auch zur einfachen Bestimmung der übrigen charakteristischen Fehlermaße führt. Geht man von der Gleichung

$$\frac{\mu_0^2}{\mu_i^2} = \frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_i^2} = \frac{\varrho_0^2}{\varrho_i^2} = g_i$$

aus, so folgt:

$$\mu_0 = \mu_i \sqrt{g_i}, \quad \vartheta_0 = \vartheta_i \sqrt{g_i}, \quad \varrho_0 = \varrho_i \sqrt{g_i}.$$

Ist g_i das Gewicht einer Beobachtung, deren scheinbarer Fehler v_i ist, so entspricht der scheinbare Fehler v_i' einer Beobachtung vom Gewichte 1, denn es besteht die analog gebaute Gleichung:

$$v_i' = v_i \sqrt{g_i}. \tag{6}$$

Gehören also die scheinbaren Fehler $v_1, v_2, \ldots v_n$ den ungleich genauen Beobachtungen mit den verschiedenen Gewichten $g_1, g_2, \ldots g_n$ an, so entsprechen die scheinbaren Fehler $v_1', v_2', \ldots v_n'$ den gleich genauen Beobachtungen vom Gewichte 1. Die Formeln für die charakteristischen Fehler gleich genauer Beobachtungen mit den scheinbaren Fehlern v_1' bis v_n' lauten aber:

$$\mu = \sqrt{\frac{[v'v']}{n-1}}, \quad \vartheta = \frac{[v']}{\sqrt{n(n-1)}}, \quad \varrho = 0\text{·}998\,\frac{[\sqrt{v'}]^2}{n\sqrt{n(n-1)}},$$

folglich ist mit Rücksicht auf (6):

der mittlere Fehler der Gewichtseinheit $\mu_0 = \sqrt{\dfrac{[g\,v\,v]}{n-1}}$ (7)

der durchschnittliche „ „ „ $\vartheta_0 = \dfrac{[\sqrt{g}\,v]}{\sqrt{n(n-1)}}$ (8)

der wahrscheinliche „ „ „ $\varrho_0 = 0\text{·}998\,\dfrac{[\sqrt{\sqrt{g}\,v}]^2}{n\sqrt{n(n-1)}}$ (9)

und es sind die charakteristischen Fehler des allgemeinen arithmetischen Mittels:

$$M_a = \frac{\mu_0}{\sqrt{[g]}} = \sqrt{\frac{[g\,v\,v]}{[g]\,(n-1)}} \tag{10}$$

$$T_a = \frac{\vartheta_0}{\sqrt{[g]}} = \frac{[\sqrt{g}\,v]}{\sqrt{[g]\,n\,(n-1)}} \tag{11}$$

$$R_a = \frac{\varrho_0}{\sqrt{[g]}} = 0\text{·}998\,\frac{[\sqrt{\sqrt{g}\,v}]^2}{n\sqrt{[g]\,n\,(n-1)}}. \tag{12}$$

Anmerkung. An dieser Stelle möge auf eine von der Theorie nicht gebilligte Auffassung kurz hingewiesen werden, welche in manchen Praktikerkreisen Eingang gefunden hat. (Siehe des Ingenieurs

Taschenbuch „Die Hütte".) Hierin wird bei ungleich genauen Beobachtungen von der Bestimmung des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit Umgang genommen und dafür der mittlere Fehler einer fingierten Beobachtung bestimmt, welcher als Gewicht das arithmetische Mittel aller Gewichte, also das Gewicht $\frac{[g]}{n}$ zukommt. Der mittlere Fehler einer solchen Beobachtung ist dann

$$(\mu) = \frac{\mu_0}{\sqrt{\frac{[g]}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}\,\frac{[g\,v\,v]}{[g]}},$$

womit der mittlere Fehler des allgemeinen arithmetischen Mittels

$$M_a = \frac{(\mu)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[g\,v\,v]}{[g]\,(n-1)}}$$

wieder richtig erhalten wird.

Beispiel. Eine Strecke sei von drei Geometern unabhängig und von jedem wiederholt gemessen worden, wobei sich als arithmetisches Mittel aus den von je einem Geometer abgelieferten Beobachtungen folgende Resultate mit ihren mittleren Fehlern ergeben haben:

$l \pm \mu$	μ^2	$\frac{1}{\mu^2}$	$g = \frac{1}{\mu^2} : 3·19$	$\sqrt{g}$
485·67 ± 0·56	0·3136	3·19	1	1
485·85 ± 0·25	0·0625	16·00	5	2·24
485·40 ± 0·20	0·0400	25·00	8	2·83

Aus den Angaben am Kopfe dieser Zusammenstellung ergibt sich die Berechnung der Gewichte, wobei das Gewicht der ersten Beobachtung absichtlich zur Einheit gewählt ist und die übrigen Gewichte auf einfache ganze Zahlen abgerundet wurden. Mit Benützung dieser Gewichte ergibt sich der wahrscheinlichste Wert der gemessenen Länge als allgemeines arithmetisches Mittel wie folgt:

$$L = 485 + \frac{0·67\,.\,1 + 0·85\,.\,5 + 0·40\,.\,8}{1 + 5 + 8} = 485 + 0·58 = 485·58.$$

Die Genauigkeitsberechnung nimmt folgenden Gang:

$L - l = v$	$g\,v$	$v\,v$	$g\,v\,v$	$\sqrt{g}\,v$	$\sqrt{\sqrt{g}\,v}$
− 0·09	− 0·09	0·0081	0·0081	0·090	0·30
− 0·27	− 1·35	0·0729	0·3645	0·605	0·78
0·18	1·44	0·0324	0·2592	0·509	0·71
	0·00		0·6318	1·204	1·79

Die Rechenprobe $[g\,r] = 0$ stimmt. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[g\,r\,r]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0\cdot6318}{2}} = \pm 0\cdot562.$$

Der mittlere Fehler des allgemeinen arithmetischen Mittels ist:

$$M_a = \frac{\mu_0}{\sqrt{[g]}} = \frac{0\cdot562}{\sqrt{14}} = \pm 0\cdot150$$

und das Resultat daher: $L = 485\cdot58 \pm 0\cdot15$.

Rechnet man zur Kontrolle die mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen:

$$\mu' = \frac{\mu_0}{\sqrt{1}} = 0\cdot56, \quad \mu'' = \frac{\mu_0}{\sqrt{5}} = 0\cdot25, \quad \mu''' = \frac{\mu_0}{\sqrt{8}} = 0\cdot20,$$

so müssen sich dieselben übereinstimmend mit den gegebenen mittleren Fehlern ergeben, wenn, wie in unserem Beispiele, in der Reihe der Messungen eine vorkommt, welche das Gewicht 1 besitzt. Ist dies nicht der Fall, so hat anstatt der Übereinstimmung ein proportionales Verhalten stattzufinden, wie im Beispiele des folgenden Paragraphen.

Wir berechnen noch den durchschnittlichen und wahrscheinlichen Fehler der Gewichtseinheit:

$$\vartheta_0 = \frac{1\cdot204}{\sqrt{6}} = 0\cdot491, \quad \varrho_0 = 0\cdot998\,\frac{1\cdot792}{3\sqrt{6}} = 0\cdot435.$$

§ 39. Das Gesamtgewicht.

Betrachtet man mehrere Beobachtungsreihen, welche $n_1, n_2, n_3, \ldots$ unter sich gleich genaue Beobachtungen mit den korrespondierenden Gewichten $p_1, p_2, p_3 \ldots$ enthalten, so besitzen die arithmetischen Mittel der einzelnen Beobachtungsreihen nach Gleichung (3) des § 37 die Gewichte

$$g_1 = n_1\,p_1, \qquad g_2 = n_2\,p_2, \quad \ldots \quad \text{usw.}$$

Liegt kein Grund vor, die Beobachtungen der einen Reihe genauer zu halten, als diejenigen einer anderen, oder weiß man über die Genauigkeit im vorhinein überhaupt nichts auszusagen, so bleibt nichts anderes übrig, als $p_1 = p_2 = \cdots = 1$ zu setzen, wodurch erhalten wird:

$$g_1 = n_1, \qquad g_2 = n_2, \quad \ldots \quad \text{usw.}$$

d. h. unter sonst gleichen Umständen können die Gewichte der durch Mittelbildung aus wiederholten Einzelbeobachtungen gewonnenen Be-

obachtungsresultate den Wiederholungszahlen geradezu gleich gesetzt werden. Stillschweigend werden hiebei den Einzelbeobachtungen das Gewicht 1 zugeschrieben. Diese Gewichte kann man passend „Wiederholungsgewichte" nennen.

Ist man nicht berechtigt, die arithmetischen Mittel verschiedener Beobachtungsgruppen gleich genau zu halten, indem etwa die zur Bildung der arithmetischen Mittel herangezogenen Einzelbeobachtungen nicht mit einem und demselben Instrumente oder von verschiedenen Geodäten oder unter verschieden günstigen Umständen ausgeführt worden sind, so daß man den verschiedenen arithmetischen Mitteln die „Genauigkeitsgewichte" $p_1, p_2, p_3, \ldots$ zuzuteilen bemüssigt ist, so sind die Gesamtgewichte den Produkten aus den Wiederholungsgewichten n und den Genauigkeitsgewichten p gleich zu halten. Außer den beiden genannten Gewichtsgattungen gibt es aber noch andere, zur Bildung des Gesamtgewichtes beitragende Faktoren. So hat man bei Längenmessungen, deren Fehler bei sonst gleichen Umständen und gleicher Messungssorgfalt — wenn er nur von systematischen Teilen befreit ist — der Quadratwurzel aus der gemessenen Länge L proportional ist, die „Längengewichte" $\frac{1}{L}$, bei Konstantenbestimmungen von Distanzmessern die „Entfernungsgewichte", bei Richtungsbeobachtungen die „Strahlengewichte" usw. einzuführen. Immer aber kombinieren sich die verschiedenartigen, einer einzelnen Bestimmung beizulegenden Gewichte durch Multiplikation zu dem Gesamtgewichte. So bestimmt Jahn (1839) das Gesamtgewicht bei Besetzungen von Stellen aus dem Produkte $a\,g\,v\,l\,k$ für jeden einzelnen Kandidaten, wo a das Alter, g die Gesundheit, v das Vermögen, l das Ledig- oder Verheiratetsein und k den Charakter, die Kenntnisse und Leistungen des Kandidaten bedeuten und sich deren Einheiten auf den jüngsten, den kränklichsten, den reichsten und jeden ledigen Kandidaten beziehen und k durch vorausgegangene, sorgfältige Untersuchung von den stellenbesetzenden Machthabern durch eine Zahl auszudrücken ist.

Dem Begriffe „Gewicht" kommt demnach eine viel allgemeinere Bedeutung als die eines bloßen Genauigkeitsmaßes zu: es ist allgemein als ein die Beobachtungsart näher bezeichnendes Merkmal aufzufassen, das sich von den direkt angestellten Beobachtungen auch auf Funktionen von Beobachtungen gewissermaßen überträgt.

Während die Wiederholungsgewichte n unmittelbar gegeben sind, müssen die Genauigkeitsgewichte p auf Grund von besonderen Untersuchungen vor jeder weiteren Rechnung ermittelt, zuweilen auch nur durch bloße Schätzung festgestellt werden. Die Vornahme

derartiger Schätzungen oder Taxierungen erfordert aber große Erfahrung und Unbefangenheit des Urteils. Gauß schreibt hierüber in einem vom 2. April 1840 datierten Briefe an Gerling: „Mittel zu einiger Schätzung wenigstens wird man bei Mutterwitz fast immer finden; wo aber alle Kenntnis gänzlich fehlt, da liegt es doch wahrhaftig nicht an der Methode selbst, daß sie ihre Dienste versagen muß. Sachkenntnis kann bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate niemals erlassen werden."

Sind die mittleren Fehler μ der Einzelbeobachtungen bekannt, so können daraus die Genauigkeitsgewichte nach der Formel

$$p = \frac{1}{\mu^2} \quad \text{oder} \quad p = \frac{k}{\mu^2}$$

berechnet werden, wobei k nach Belieben gewählt werden kann. Ein Zahlenbeispiel wird das Vorgebrachte deutlicher machen.

Beispiel. Gesetzt, es rücken zur Durchführung einer umfangreichen Triangulierung drei Ingenieure aus, welche mit verschiedenen Theodoliten ausgerüstet sind, die mit I, II und III bezeichnet werden sollen und deren Leistungsfähigkeiten aus den Winkelmessungen einer älteren Triangulierung durch Berechnung der mittleren Fehler in folgender Weise ermittelt worden sind.

Instrument	n	$v\,v$	μ	μ^2	$\frac{1}{\mu^2}$	$p = \frac{100}{\mu^2}$
I	110	2156	4″45	19·78	0·05	5
II	85	1307	3·94	15·56	0·06	6
III	124	3870	5·59	31·21	0·03	3

Aus Winkelmessungen mit dem Instrumente I in der Anzahl 110, mit dem Instrumente II in der Anzahl 85 und mit dem Instrumente III in der Anzahl 124 wurden die mittleren Fehler einer einzelnen Winkelmessung nach der Formel $\mu = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}}$ berechnet. Dieselben sagen aus, daß bei einer vorzunehmenden Winkelmessung mit diesen Instrumenten die Winkelfehler $\pm 4''45$, $\pm 3''94$ beziehungsweise $\pm 5''59$ mit größter mathematischer Hoffnung zu erwarten sind. Diesem Verhalten entsprechen die Gewichte $p_1 = 5$, $p_2 = 6$, $p_3 = 3$. Wurde nun ein und derselbe Winkel mit dem Instrumente I . . . $\nu_1 = 12$mal

„ „ „ II . . . $\nu_2 = 8$ „

„ „ „ III . . . $\nu_3 = 6$ „

gemessen und haben die drei gleich verläßlichen Ingenieure hiebei als einfache arithmetische Mittel folgende Resultate erhalten:

$$\text{I}: \; l_1 = 58^0\,17'\,26''62$$
$$\text{II}: \; l_2 = 58\;\;17\;\;28{\cdot}34$$
$$\text{III}: \; l_3 = 58\;\;17\;\;21{\cdot}04,$$

so sind als Gesamtgewichte dieser Bestimmungen anzunehmen:

$$\text{I}: \; r_1\,p_1 = 12\,.\,5 = 60 \text{ oder durch 6 gekürzt: } g_1 = 10$$
$$\text{II}: \; r_2\,p_2 = \;\;8\,.\,6 = 48 \qquad\qquad g_2 = \;\;8$$
$$\text{III}: \; r_3\,p_3 = \;\;6\,.\,3 = 18 \qquad\qquad g_3 = \;\;3.$$

(Unter der Verwendung eines und desselben Instrumentes würden die Wiederholungszahlen r allein zur Anwendung kommen. — Würde hingegen die Verläßlichkeit der Ingenieure im Verhältnisse wie 1:2:3 stehen, welche Zahlen selbstverständlich nur im Wege einer Schätzung angegeben werden könnten, so wären die Gesamtgewichte durch die Produkte $1\,r_1\,p_1 = 10$, $2\,r_2\,p_2 = 16$, $3\,r_3\,p_3 = 9$ bestimmt.)

Unter den gegebenen Umständen ist der wahrscheinlichste Wert des gemessenen Winkels:

$$\alpha = 58^0\,17'\,20'' + \frac{6{\cdot}62\,.\,10 + 8{\cdot}34\,.\,8 + 1{\cdot}04\,.\,3}{10 + 8 + 3} = 58^0\,17'\,20'' + 6''48.$$

Die Weiterrechnung gibt:

Instr.	$\alpha - l = v$	$g\,v$	$v\,v$	$g\,v\,v$
I	$-0''14$	$-\;1{\cdot}40$	$0{\cdot}0196$	$0{\cdot}1960$
II	$-1{\cdot}86$	$-14{\cdot}88$	$3{\cdot}4596$	$27{\cdot}6768$
III	$+5{\cdot}44$	$+16{\cdot}32$	$29{\cdot}5936$	$88{\cdot}7808$
		$+\;0{\cdot}04$		$116{\cdot}6536$

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[g\,v\,v]}{n-1}} = \sqrt{\frac{116{\cdot}6536}{2}} = \pm\,7''637$$

$$M_\alpha = \frac{\mu_0}{\sqrt{[g]}} = \frac{7{\cdot}637}{\sqrt{21}} = \pm\,1''667.$$

Das Resultat lautet sohin: $\alpha = 50^0\,17'\,26''48 \pm 1''67$.

Die mittleren Fehler der von den einzelnen Ingenieuren eingelieferten Resultate sind:

$$\mu_{\text{I}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_1}} = \pm\,2''41, \qquad \mu_{\text{II}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_2}} = \pm\,2{\cdot}67, \qquad \mu_{\text{III}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_3}} = \pm\,4{\cdot}41.$$

Aus den ursprünglichen mittleren Fehlern μ für je eine Winkelmessung ergeben sich die mittleren Fehler μ' für die einfachen arithmetischen Mittel wie folgt:

$$\mu_1' = \frac{4\cdot45}{\sqrt{12}} = \pm 1''28, \quad \mu_2' = \frac{3\cdot94}{\sqrt{8}} = \pm 1\cdot39, \quad \mu_3' = \frac{5\cdot59}{\sqrt{6}} = \pm 2\cdot28.$$

Bei richtiger Rechnung müssen die Verhältnisse bestehen:

$$\mu_{\mathrm{I}} : \mu_{\mathrm{II}} : \mu_{\mathrm{III}} = \mu_1' : \mu_2' : \mu_3'.$$

Damit die drei Ingenieure bei Benützung ihrer ungleich genauen Instrumente dennoch gleichwertige Resultate zu Wege bringen, müßten sie bei gleicher Sorgfalt und gleichen Nebenumständen die Beobachtungen in solcher Anzahl anstellen, daß die Produkte νp gleich werden. Es müßte z. B.

der I. Ingenieur $\nu' = 6$ (oder 12) Beobachtungen
„ II. „ $\nu'' = 5$ („ 10) „
„ III. „ $\nu''' = 10$ („ 20) „

ausführen, um dasselbe Gesamtgewicht 30 (oder 60) zu erzielen. Die auf diese Weise auf gleiche Genauigkeit gebrachten Beobachtungsresultate könnten dann zu einem einfachen arithmetischen Mittel vereinigt werden.

§ 40. Ausscheidung von Beobachtungen.

Das einfache arithmetische Mittel ist im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie nur dann der wahrscheinlichste Wert der beobachteten Größen, wenn die zur Mittelbildung verwendeten Beobachtungsresultate von gleicher Genauigkeit sind. Sobald aber das arithmetische Mittel als der wahrscheinlichste Wert angesprochen wird, sind alle mit ihm nicht übereinstimmenden Beobachtungen nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche als weniger wahrscheinlich zu bezeichnen, und zwar wäre dementsprechend eine Beobachtung um so weniger genau zu nennen, je weiter sie von dem arithmetischen Mittel entfernt ist oder je größer ihr scheinbarer Fehler ausfällt. Werden aber von diesem Gesichtspunkte aus den einzelnen Beobachtungen verschiedene Genauigkeiten beigemessen, so wäre der wahrscheinlichste Mittelwert nicht mehr nach dem einfachen, sondern nach dem allgemeinen arithmetischen Mittel zu bilden, obgleich die ursprünglichen Beobachtungen ausdrücklich von gleicher Zuverlässigkeit vorausgesetzt wurden und sohin keine Gewichtsunterscheidungen getroffen werden dürften. Dem darin enthaltenen Sophismus läßt sich nur dadurch beikommen, daß das arithmetische Mittel überhaupt nicht als der wahrhaft wahrscheinlichste Wert, sondern bloß als ein approximativer Mittelwert erklärt wird, wobei das Vorhandensein der mehr

oder minder großen Abweichungen vom Mittel lediglich dem reinen Zufall anzurechnen sei.

Alle Versuche, eine Verbesserung des arithmetischen Mittels durch Einführung sophistischer Gewichte unter Beibehaltung aller ursprünglich gleichwertigen Beobachtungen herbeizuführen, können daher die beabsichtigte Wirkung nur verfehlen. Hiezu gehört das Verfahren von Svanberg (1821), wonach den ursprünglich gleichgewichtig angenommenen Größen nachträglich Gewichte beigelegt werden, welche den reziproken Werten der scheinbaren Fehler oder deren Quadrate proportional zu setzen sind. Ähnliche Betrachtungen haben auch Morgan (1847) und Glaisher (1873) angestellt, indem auch sie den Beobachtungen durch Zuerteilung fiktiver Gewichte einen um so geringeren Einfluß auf die Mittelbildung einräumen, je weiter sie von dem einfachen arithmetischen Mittel abstehen.

Derartige Bestrebungen, auf diesem Wege eine Verschärfung der Resultate zu erreichen, führen schließlich dahin, den vom arithmetischen Mittel beträchtlich abweichenden Beobachtungen die Anteilnahme an der Mittelbildung überhaupt zu entziehen.

Hält man sich die Definition von Muncke*) vor Augen, wonach das arithmetische Mittel mit Ausschluß der von dem Mittel selbst am weitesten abweichenden Beobachtungen als das der absoluten Wahrheit ammeisten genäherte anzusehen sei, so kann man geneigt sein, vor der definitiven Mittelbildung alle Beobachtungen, deren Abweichungen von dem vorläufigen arithmetischen Mittel im positiven wie im negativen Sinne eine gewisse Grenze überschreiten, gänzlich zu verwerfen. Untersuchungen nach dieser Richtung hin wurden auch angestellt von Benjamin Peirce (1852), Gould (1854), Airy (1856), Winlock (1856), Chauvenet (1868), Stone (1876), Jordan (1877), Helmert (1877), Newcomb (1886), Lehmann-Filhès (1887), Bertrand (1888), Czuber (1891) und Vogeler (1907).

Die meisten dieser Untersuchungen fußen auf der Annahme, daß die Zahl der vorliegenden Beobachtungen eine außerordentlich große sei, in welchem Falle aber das Auftreten einer abnorm abweichenden Beobachtung ohnehin keinen störenden Einfluß auf den wahrscheinlichsten Mittelwert und sein Fehlermaß ausübt. Eine besonders abweichende, zweifelhafte Beobachtung vermag nur dann eine merkliche Beeinträchtigung des Mittelwertes herbeizuführen, wenn die Anzahl der Beobachtungen eine beschränkte ist, in welchem Falle aber

*) G. W. Muncke: Über die Methode der kleinsten Quadratsumme. (Gehlers Physik. Wörterbuch. 1825. Artikel „Beobachtung".)

die für die Ausscheidung derartiger Beobachtungen aufgestellten Gesetze keine volle Gültigkeit besitzen.

Während manche Ausgleicher aus prinzipiellen Gründen gegen die Ausschließung einzelner, durch bloße Vergleichung mit den übrigen Beobachtungen als zweifelhaft zu haltender Beobachtungen sich ausgesprochen haben, finden andere hiezu selbst dann eine gewisse Berechtigung, wenn nicht gerade ungewöhnliche Ursachen einen fraglichen Widerspruch herbeigeführt haben sollten. (Abweichungen, die offenbar auf groben Irrtümern oder Schreibfehlern beruhen, muß man natürlicherweise eliminieren.)

Hagen (1837) teilt hierin folgende Ansicht: „Die Täuschung, die man durch Verschweigen von Messungen begeht, läßt sich ebensowenig entschuldigen, als wenn man Messungen fälschen oder fingieren wollte. — Hat man während der Beobachtung von der großen Unsicherheit einzelner Messungen sich überzeugt, so kann man diese unberücksichtigt lassen; letzteres darf aber nicht deshalb geschehen, weil man später bemerkt, daß sie von den übrigen bedeutend abweichen (man nimmt nämlich ein unendlich kleines Gewicht an)."

Bessel und Baeyer (1838) geben folgende Erklärung ab: „Wir haben jede gemachte Beobachtung, und zwar alle mit gleichem Gewichte, zu dem Resultate stimmen lassen, ohne das etwaige Zusammentreffen ungünstiger Umstände mit der stärkeren Abweichung einer Beobachtung als einen Grund zu ihrer Ausschließung gelten zu lassen. Wir haben geglaubt, nur durch die feste Beobachtung dieser Regel Willkür aus unseren Resultaten entfernen zu können."

Gerling (1843) drückt sich über die Bedeutung der angestellten Beobachtungen recht drastisch aus, indem er sagt: „Jede Beobachtung, die nicht einen entschiedenen protokollarischen Verdachtsgrund gegen sich hat, habe ich als einen Zeugen für die Wahrheit zu betrachten, und ebensowenig, wie ich den Zeugen torquieren darf, bis er sagt, was ich gesagt haben will, ebensowenig darf ich auch ohne weiteres sein Zeugnis verwerfen, weil dasselbe von den übrigen bedeutend abweicht."

Faye (1888) erblickt in der Verwerfung einzelner Beobachtungen eine schwere Unzukömmlichkeit, da es dem Rechner in vielen Fällen leicht wäre, auf diesem Wege aus den Beobachtungen das ihm am besten zusagende Resultat zu ziehen, um dadurch eine vorgefaßte Meinung zu stützen. Die beste Regel sei daher die, nur solche Beobachtungen auszuscheiden, welche sich als zweifelhaft kennzeichnen in dem Augenblicke, wo sie gemacht werden und vor jeder Rechnung

Bertrand (1888) ist der Meinung, „daß die Unterdrückung der als schlecht bezeichneten Beobachtungen die Zuverlässigkeit der Resultate um so mehr erhöhen wird, je mehr Beobachtungen beseitigt worden sind", oder mit anderen Worten, je rigoroser man hiebei zu Werke geht.

„Es unterliegt keinem Zweifel," sagt Czuber (1891), „daß die Ausscheidung solcher Beobachtungen, deren Abweichung vom arithmetischen Mittel dem absoluten Betrage nach eine gewisse Grenze überschreitet und die vermutlich oder höchst wahrscheinlich minder gut sind, die Genauigkeit des Resultates erhöhen müßte, und zwar in um so höherem Grade, je enger man jene Grenze zöge."

Wir wollen nun ein Verfahren bekannt machen, das die Ausscheidung von Beobachtungen theoretisch noch am meisten berechtigt erscheinen läßt. Die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler in das Intervall von v bis $v + dv$ falle,

$$w = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v^2} dv,$$

bleibt konstant, wenn der Exponent von e konstant ist. Setzt man

$$h^2 v^2 = t^2, \quad \text{also } v = \frac{t}{h} \quad \text{und} \quad dv = \frac{dt}{h},$$

so wird

$$w = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt,$$

daher ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler, absolut genommen, kleiner als v sei, also innerhalb der Grenzen $\pm v$ falle:

$$W_i = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt = \Theta(t),$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß er größer als v sei oder außerhalb der Grenzen $\pm v$ zu liegen komme:

$$W_a = 1 - \Theta(t).$$

Für diejenige Fehlergrenze, welche bei n Beobachtungen von der Hälfte überschritten und von der anderen Hälfte nicht überschritten wird, für welche

$$W_i = W_a = \frac{1}{2}$$

ist, also für den wahrscheinlichen Fehler, ist daher

$$\Theta(t) = \frac{1}{2},$$

somit

$$t = 0{\cdot}47694 = \varrho h.$$

Um jene Fehlergrenze V zu ermitteln, welche bei n Beobachtungen gerade noch von einer einzigen Beobachtung gesetzlich überschritten werden darf, ist die innere Wahrscheinlichkeit:

$$W_i = \Theta(t_n) = \frac{n-1}{n}$$

und die äußere Wahrscheinlichkeit:

$$W_a = \frac{1}{n}.$$

Berechnet man hieraus mit Hilfe der Tafel I das Argument t_n, so erhält man, je nachdem μ, ϑ oder ϱ als Fehlermaß gewählt wird:

$$t_n = Vh = \frac{V}{\mu\sqrt{2}} = \frac{V}{\vartheta\sqrt{\pi}} = \frac{V\varkappa}{\varrho}$$

und hieraus

$$V = t_n\sqrt{2}\,\mu = t_n\sqrt{\pi}\,\vartheta = t_n\frac{\varrho}{\varkappa}.$$

Kommen in der Beobachtungsreihe mehr als ein Fehler vor, welche diese Grenze V überschreiten, so sind alle außerhalb derselben fallenden bis auf den kleinsten von ihnen als der Theorie widersprechend auszuscheiden.

In dem Beispiel von Clarke, § 32, S. 124, ist $n = 40$ und $\mu = 0{\cdot}913$, folglich hat man zu setzen:

$$W_i = \Theta(t_{40}) = \frac{39}{40} = 0{\cdot}975.$$

Die Tafel I liefert hiefür $t_{40} = 1{\cdot}58495$, somit ist

$$V = 2{\cdot}24146\,\mu = 2{\cdot}046.$$

Diese Grenze überschreitet nur ein einziger Fehler, nämlich der zur Beobachtung 6·35 gehörige: 2·42. Derselbe darf daher, als der einzige gesetzmäßig zulässige, nicht ausgeschieden werden, er bestätigt vielmehr die Richtigkeit des Gaußschen Fehlergesetzes.

III. Abschnitt.

Theorie der kleinsten Fehlerquadratsummen.

A. Vermittelnde Beobachtungen.

§ 41. Das Minimumsprinzip.

Die erste Aufgabe der Ausgleichungsrechnung wurde dahin ausgesprochen, durch Kombinationen aller überschüssigen Beobachtungen eindeutige Resultate derart zu gewinnen, daß die hiedurch notwendigen Änderungen der Beobachtungen auf ein geringstes Maß herabgedrückt werden.

Wurde die Unbekannte X wiederholt mit gleichbleibender Genauigkeit direkt gemessen und wurden hiebei die Werte $l_1, l_2, \ldots l_n$ als Messungsergebnisse erhalten, so wird irgend ein willkürlicher, in den Bereich der unmittelbaren Messungsgrößen l fallender Mittelwert l_0 durch Vergleichung mit den Messungsgrößen ein Fehlersystem erzeugen. Die durch diese willkürliche Annahme an den Messungsgrößen auftretenden Widersprüche, Korrektionen oder Fehler seien:

$$
\begin{aligned}
l_0 - l_1 &= v_1 \\
l_0 - l_2 &= v_2 \\
\cdots &\cdots \\
l_0 - l_n &= v_n.
\end{aligned}
$$

Jedem dieser Fehler wird eine gewisse Wahrscheinlichkeit zukommen, welche durch folgende Ausdrücke dargestellt ist:

$$
\begin{aligned}
\varphi(v_1)\,dv &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v_1^2} dv \\
\varphi(v_2)\,dv &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v_2^2} dv \\
\cdots &\cdots \\
\varphi(v_n)\,dv &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v_n^2} dv.
\end{aligned}
$$

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Zustandekommen des ganzen Fehlersystems v_1 bis v_n ist durch das Produkt

$$W = \varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \ldots \varphi(v_n)(dv)^n = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,dv\right)^n e^{-h^2(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2)}$$

gegeben. Da W eine Funktion des willkürlich gewählten Mittelwertes l_0 ist, so wird es die verschiedensten Werte annehmen können. Je größer die Wahrscheinlichkeit ist, desto mehr wird der angenommene Wert l_0, welcher die übrigbleibenden Fehler v erzeugt und daher die Größe W bestimmt, der Wahrheit entsprechen, daher wird derjenige Wert von l_0, welcher an den Beobachtungen solche Widersprüche übrig läßt, die das obige Wahrscheinlichkeitsprodukt W oder den demselben proportionalen Ausdruck

$$\Omega = e^{-h^2[vv]}$$

zu einem Maximum macht, der wahrscheinlichste sein, denn dieser Ausnahmswert von l_0 erzeugt die wahrscheinlichste Verbindung der übrigbleibenden Widersprüche oder Fehler. Nun erreicht aber Ω seinen größten Wert, wenn der Exponent der e-Funktion oder, da h konstant ist, wenn $[vv]$ ein Minimum wird. Die Bedingung, welche der wahrscheinlichste Wert einer mit gleicher Genauigkeit wiederholt gemessenen Größe zu erfüllen hat, spricht sich also dahin aus, daß die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Widersprüche zu einem Minimum werde. Schreibt man diese zu einem Prinzip erhobene Bedingung in der Form:

$$[vv] = (l_0 - l_1)^2 + (l_0 - l_2)^2 + \ldots + (l_0 - l_n)^2 = min.,$$

so erhält man hieraus den wahrscheinlichsten Wert von l_0 durch Differenzieren nach l_0 und Nullsetzen des Differentialquotienten. Dies gibt:

$$\frac{d[vv]}{dl_0} = 2(l_0 - l_1) + 2(l_0 - l_2) + \ldots + 2(l_0 - l_n) = 0$$

woraus erhalten wird:

$$l_0 = \frac{[l]}{n} = x;$$

d. h. der wahrscheinlichste Wert einer mit gleichbleibender Genauigkeit wiederholt beobachteten Größe ist das einfache arithmetische Mittel der Beobachtungsgrößen, und die von demselben zu erfüllende Bedingung lautet, daß die Summe der Quadrate der scheinbaren Fehler ein Minimum werde.

Es ist nichts merkwürdiges dabei, daß als Resultat das einfache arithmetische Mittel zum Vorschein kommt, wenn man sich erinnert, daß der Ableitung des Gaußschen Fehlergesetzes das arithmetische Mittel als wahrscheinlichster Wert einer mehrfach beobachteten Größe zu Grunde gelegt worden ist.

Haben die einzelnen Beobachtungen ungleiche Genauigkeiten $h_1, h_2, \ldots h_n$, so ist die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, daß das Fehlersystem $v_1, v_2, \ldots v_n$ gleichzeitig begangen werde, proportional dem Ausdrucke

$$\Omega' = e^{-h_1^2 v_1^2 - h_2^2 v_2^2 - \cdots - h_n^2 v_n^2} = e^{-[h^2 v^2]}.$$

Die Minimumsbedingung für den wahrscheinlichsten Wert der Unbekannten lautet demnach:

$$[h^2 v^2] = min,$$

oder, wenn statt der Genauigkeitsmaße die den Quadraten derselben proportionalen Genauigkeitsgewichte $p_1, p_2, \ldots p_n$ eingeführt werden,

$$[p\,v\,v] = min.$$

Wird wieder $v = l_0 - l$ gesetzt, nach l_0 differenziert und die hiedurch entstehende Gleichung zu Null gemacht, so erhält man:

$$\frac{d\,[p\,v\,v]}{d\,l_0} = 2\,p_1\,(l_0 - l_1) + 2\,p_2\,(l_0 - l_2) + \cdots + 2\,p_n\,(l_0 - l_n) = 0$$

und hieraus:

$$l_0 = \frac{[p\,l]}{[p]} = x;$$

d. h. der wahrscheinlichste Wert einer mit verschiedener Genauigkeit wiederholt beobachteten Größe ist das allgemeine arithmetische Mittel der Beobachtungsgrößen, und die von demselben zu erfüllende Bedingung lautet, daß die Summe der mit den zugehörigen Gewichten multiplizierten Quadrate der scheinbaren Fehler ein Minimum werde.

Da das wesentlichste in der Charakterisierung der wahrscheinlichsten Werte darin liegt, daß sie Summen zu einem Minimum machen, worin die Quadrate der Fehler die Hauptrolle spielen, so hat schon Legendre in dem im Jahre 1806 erschienenen „Appendice" zu der Schrift: „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes", worin dieser Gegenstand zum ersten Male publizistisch behandelt erscheint, diesem methodischen Ausgleichungsverfahren den Namen der „Methode der kleinsten Quadrate" beigelegt. Sie sollte aber zutreffender „Methode der kleinsten Summen" heißen.

Das Prinzip der Methode der kleinsten Quadrate ist also — wie Gauß an Gerling am 2. April 1840 schrieb — durchaus nicht, daß $[v\,v]$ ein Minimum werden soll, sondern daß $[p\,v\,v]$ ein Minimum werde. „Nur dadurch, daß in der Praxis so überwiegend oft solche Fälle vorkommen, wo $p_1 = p_2 = p_3$ etc. gesetzt werden kann oder muß, wird man verleitet, das erste Énoncé gelten zu lassen und zu vergessen, daß nur das zweite das allgemein gültige ist."

Aus der Minimumsbedingung in der einfachen Form:

$$[(x - l)^2] = [v\,v] = min.$$

oder in der allgemeineren Form:

$$[p\,(x - l)^2] = [p\,v\,v] = min,$$

ergeben sich durch Differenzieren nach x und Nullsetzen die zur Kontrolle des einfachen und des allgemeinen arithmetischen Mittels dienlichen Bedingungsgleichungen:

$$[x - l] = [v] = 0$$

$$[p\,(x - l)] = [p\,v] = 0,$$

wie sie auch schon in den §§ 7 und 38 auf elementarem Wege erhalten wurden.

§ 42. Gleichzeitige Bestimmung mehrerer Unbekannten.

Der einfache Fall, daß die Regel vom arithmetischen Mittel zur Bestimmung einer Unbekannten herangezogen werden kann, trifft nur dann zu, wenn die zu suchende Unbekannte einer direkten Messung oder Beobachtung zugänglich ist. In den meisten Fällen der Praxis können aber die zu suchenden, im allgemeinen in der Mehrzahl auftretenden Größen nicht unmittelbar beobachtet werden; es müssen andere Daten durch Beobachtung gewonnen werden, aus denen dann die zu suchenden Größen rechnerisch abzuleiten sind. Es wird dies fast immer möglich sein, wenn die gemessenen und die zu suchenden Größen in einem bekannten Zusammenhange stehen, der in Form von Gleichungen zum Ausdruck gebracht werden kann. Man sagt dann, die Bestimmung der unbekannten Elemente erfolge mit Hilfe indirekter oder vermittelnder Beobachtungen.

Um das Problem der gleichzeitigen Bestimmung mehrerer Unbekannten an einem Beispiele zu demonstrieren, betrachten wir die barometrische Höhenmessung. Der Theorie nach ist der Höhenunterschied H zwischen der Erdoberfläche und dem Beobachtungsorte

annähernd eine lineare Funktion des Barometerstandes B, welcher mit H mittels gewisser Koeffizienten x, y in folgenden Zusammenhang gebracht erscheint:

$$B = x + Hy.$$

Wären die Größen x, y bekannt, so würde für jeden abgelesenen Barometerstand B_1, B_2, B_3, . . . die entsprechende Höhe H_1, H_2, H_3, . . . sofort berechnet werden können. Um zur Kenntnis der unbekannten Konstanten x, y zu gelangen, wird man für bekannte, fehlerlos vorausgesetzte Argumente H die zugehörigen Funktionswerte B durch Beobachtung ermitteln. Es ist einleuchtend, daß hiebei mindestens zwei solcher Wertepaare erforderlich sind, um aus den beiden sodann bestimmten Gleichungen

$$B_1 = x + H_1 y$$
$$B_2 = x + H_2 y$$

die beiden Unbekannten x, y berechnen zu können. Diese Bestimmung wird dann zwar mit voller Schärfe möglich sein, allein die Resultate werden durch die bei Beobachtung der Barometerstände unvermeidlich eingetretenen Beobachtungsfehler gleichfalls entstellt sein, aber man wird kein Mittel besitzen, um über die Größe dieser Entstellung, d. i. über die Fehler der Unbekannten x, y irgend welchen Aufschluß zu geben. Eine wirksame Kontrolle ist eben nur dann möglich, wenn die Anzahl der Beobachtungen und daher auch die der Gleichungen größer ist als die Anzahl der Unbekannten. Wir wollen nun dieses an einem Beispiele erläuterte Verhältnis verallgemeinern.

Ist die Anzahl der zur Verfügung stehenden Gleichungen ebenso groß als die der Unbekannten, so wird die mit der Auflösung der Gleichungen verbundene Ermittlung der Unbekannten eine eindeutig bestimmte sein. Indem aber die begangenen Beobachtungsfehler hiebei verborgen bleiben, hat man mit der unkontrollierbaren Berechnung der Unbekannten sich zu begnügen. — Ist die Anzahl der Unbekannten größer als die der gegebenen Gleichungen, so können die Unbekannten überhaupt nicht berechnet werden, denn die Aufgabe ist dann unbestimmt. Wenn aber mehr Gleichungen als Unbekannte zur Verfügung stehen, so daß die Aufgabe überbestimmt erscheint, so sind die Unbekannten nicht eindeutig, sondern mehrfach bestimmt, denn man kann dann aus der überschüssigen Anzahl von Gleichungen die zur Berechnung der Unbekannten gerade notwendigen Gleichungen willkürlich herausgreifen und die Unbekannten so oft mal bestimmen als Gruppen von unbedingt erforderlichen Gleichungen zu bilden möglich sind.

Wenn alle Beobachtungsdaten fehlerlos wären, würden die Unbekannten nach jedmöglichem Berechnungswege gleichlautend ausfallen, so daß die überschüssigen Gleichungen eigentlich überflüssig wären und nur etwa zur Bestätigung für die Verläßlichkeit der Beobachtungen oder die Richtigkeit der Rechnung verwendet werden könnten. Da aber die Beobachtungen keine absolute Genauigkeit haben, so würden sich durch verschiedene Kombinationen sämtlicher Gleichungen mehr oder weniger differierende Resultate finden lassen. Aus dieser Mannigfaltigkeit von Kombinationen diejenige auszumitteln, welche die Unsicherheit der Resultate zu einem Minimum macht, ist die Hauptaufgabe der Ausgleichungsrechnung.

Sind die zu suchenden Größen einer unmittelbaren Beobachtung nicht zugänglich, wohl aber andere Größen, welchen die Aufgabe zufällt, die Kenntnis der Unbekannten zu vermitteln, so müssen die theoretischen Beziehungen zwischen den wahren Werten der zu bestimmenden Größen X, Y, Z, . . . und den wahren Werten der zu beobachtenden Größen L_1, L_2, L_3, . . . bekannt sein, wozu auch noch gewisse, fehlerfrei vorausgesetzte Parameter oder Koeffizienten a, b, c, . . . gehören, welche den einzelnen Beobachtungen entsprechen. Gewöhnlich sind diese theoretischen Beziehungen in der linearen Form

$$\begin{gathered} a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + \cdots = L_1 \\ a_2 X + b_2 Y + c_2 Z + \cdots = L_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n X + b_n Y + c_n Z + \cdots = L_n \end{gathered}$$

gegeben, oder allgemein, wenn zur Beobachtung L_i die Voraussetzungen a_i, b_i, c_i, . . . gehören:

$$a_i X + b_i Y + c_i Z + \cdots = L_i. \tag{1}$$

Diese Gleichungen werden nach Cappilleri „Vermittlungsgleichungen" genannt. Darin sind die Koeffizienten a, b, c, . . . als gegeben, also als genau bekannt anzusehen, während die Beobachtungsgrößen L mit zufälligen Fehlern behaftet erscheinen. Z. B. für die Höhe $\mathfrak{H}$ der Schneegrenze, welche eine Funktion der geographischen Breite $\mathfrak{B}$ ist, kann die Formel angesetzt werden:

$$\mathfrak{H} = X + Y \cos^2 \mathfrak{B},$$

worin $a = 1$, $b = \cos^2 \mathfrak{B}$ und $L = \mathfrak{H}$ gesetzt ist.

Um die zwei Konstanten X, Y zu bestimmen, wird man für verschiedene Breiten Höhenmessungen in überschüssiger Anzahl vornehmen, so daß die willkürlich gewählten $\mathfrak{B}$ als völlig genau, die gemessenen $\mathfrak{H}$ aber mit Messungsfehlern behaftet anzusehen sind.

Nicht immer aber sind die Vermittlungsgleichungen in Bezug auf die Unbekannten X, Y, Z, ... von der ersten Ordnung; in der allgemeinsten Form wird sich der theoretische Zusammenhang durch die Gleichung

$$L_i = f_i(X, Y, Z, \ldots) \qquad (2)$$

darbieten, wo der Index i auf die der i-ten Beobachtung L_i zukommenden Koeffizienten a_i, b_i, c_i hinweisen möge. Wurde für die Beobachtungsgröße L_i tatsächlich der Wert L_i' erhalten und ist dessen wahrer Fehler ε_i, so geht (2) über in

$$L_i' + \varepsilon_i = f_i(X, Y, Z, \ldots). \qquad (3)$$

In dieser Form sind aber die vorhandenen Gleichungen mit praktischem Vorteil zur Auflösung im allgemeinen nicht geeignet. Hiezu ist erforderlich, daß die einer Ausgleichung zu unterziehenden Gleichungen zunächst linear gemacht werden, denn soll die Ausgleichungsrechnung eindeutige Resultate liefern, so müssen sie aus Gleichungen erster Ordnung erhältlich sein.

Diese erforderliche Transformation kann durch Entwicklung der Gleichungen (3) nach der Taylorschen Reihe ermöglicht werden. Man verschaffe sich auf irgend eine Weise Näherungswerte X_0, Y_0, Z_0, ... der Unbekannten, etwa derart, daß man aus den vorhandenen Gleichungen so viele herausgreift, als Unbekannte vorkommen, und damit die vorläufige Auflösung anstellt. Unter der Voraussetzung, daß die zufälligen Beobachtungsfehler so klein sind, daß Glieder mit Potenzen und Produkten derselben unbedenklich vernachlässigt werden können, gilt dies auch von jenen unbekannten Verbesserungen ξ, η, ζ, welche an die Näherungswerte anzubringen sind, um sie auf die wahren Werte zu bringen. Man kann daher wie folgt entwickeln:

$$f_i(X, Y, Z, \ldots) = f_i(X_0 + \xi, Y_0 + \eta, Z_0 + \zeta, \ldots) =$$
$$= f_i(X_0, Y_0, Z_0, \ldots) + \frac{\partial f_i}{\partial X_0}\xi + \frac{\partial f_i}{\partial Y_0}\eta + \frac{\partial f_i}{\partial Z_0}\zeta + \cdots$$
$$\varepsilon_i = -L_i' + f_i(X_0, Y_0, Z_0, \ldots) + \frac{\partial f_i}{\partial X_0}\xi + \frac{\partial f_i}{\partial Y_0}\eta + \frac{\partial f_i}{\partial Z_0}\zeta + \cdots$$

Hierin sind alle Größen bis auf ξ, η, ζ bekannt. Setzt man der Kürze wegen

$$L_i' - f_i(X_0, Y_0, Z_0, \ldots) = l_i$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial X_0} = a_i, \qquad \frac{\partial f_i}{\partial Y_0} = b_i, \qquad \frac{\partial f_i}{\partial Z_0} = c_i, \ldots$$

so nimmt die Gleichung (3) die lineare Form an:

$$a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta + \cdots - l_i = \varepsilon_i. \qquad (4)$$

Hier sind die einzelnen Beobachtungen l_1, l_2, l_3, . . . und die denselben entsprechenden Koeffizienten a_1, b_1, c_1, . . . ; a_2, b_2, c_2, . . . bekannte Größen, während die wahren Verbesserungen ξ, η, ζ, . . . der Näherungswerte, sowie die wahren Beobachtungsfehler ε_1, ε_2, ε_3, . . . als Unbekannte erscheinen. Solche lineare Gleichungen, welche nach Gauß „Fehlergleichungen" genannt werden, können bei n voneinander unabhängig angestellten Beobachtungen — entweder direkt oder nach Einführung von Näherungswerten — in der Anzahl n angeschrieben werden.

Nebstbei sei hieran die Bemerkung geknüpft, daß sich die Einführung von Näherungswerten auch dann empfiehlt, wenn die Vermittlungsgleichungen von vornherein linear sind, weil hiedurch unter allen Umständen eine bequeme Vereinfachung der numerischen Rechnung erzielt werden kann, wenn die Koeffizienten und absoluten Glieder mehrzifferige Zahlen sind. Der hiebei erreichte Vorteil ist derselbe, wie bei der Bildung des arithmetischen Mittels, wo auch nur die nach Abzug der allen Beobachtungen gemeinsamen Zahl übrigbleibenden Reste in Rechnung gestellt werden.

Ist die Anzahl der Unbekannten u gleich der Anzahl der Fehlergleichungen n, so könnte man die Unbekannten durch Auflösung der Gleichungen eindeutig berechnen, wenn die wahren Fehler ε gleich Null angenommen werden. Infolge der Vernachlässigung der wahren Fehler würden sich aber für die Unbekannten nicht die richtigen, wahren Werte ergeben, ja man würde in diesem Falle überhaupt ein Urteil über die Güte der errechneten Resultate abzugeben nicht imstande sein. Ist n größer als u, so könnte man unter Vernachlässigung der wahren Fehler ε aus allen möglichen Verbindungen zu je u Gleichungen wohl auch zur Kenntnis der Unbekannten gelangen, und zwar auf so vielen Wegen, als Gruppenzusammenstellungen möglich sind. Allein alle diese Berechnungswege würden wegen der Unterdrückung der Beobachtungsfehler zu verschiedenen, einander widersprechenden Lösungen führen. Man könnte nun geneigt sein, alle auf diese Weise erhaltenen Lösungen zu einem arithmetischen Mittel zu vereinigen und die so erhaltenen Resultate als die besten zu betrachten; aber abgesehen davon, daß dieser Vorgang der zahlreichen Kombinationsmöglichkeiten wegen viel zu umständlich wäre, ist er auch aus dem Grunde zu verwerfen, weil er zu Resultaten führt, welche, in den Fehlergleichungen eingesetzt, Widersprüche erzeugen, die in ihrer Gesamtheit nicht den Anspruch des Minimums erheben können. Welche Werte diese Minimumsbedingung erfüllen und daher als die wahrscheinlichsten anzusehen sind, geht aus der Nutzanwendung der Methode der kleinsten Quadrate hervor.

Denkt man sich in die Fehlergleichungen (4) an Stelle der wahren Unbekannten ξ, η, ζ . . . irgend welche willkürlich gewählte Werte x, y, z . . . eingesetzt, so daß statt der wahren Fehler ε andere Fehler v auftauchen, so wird folgendes Gleichungssystem bestehen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots - l_1 = v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots - l_2 = v_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n x + b_n y + c_n z + \cdots - l_n = v_n \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Den in diesen Fehlergleichungen auftretenden Fehlern v kommen die unendlich kleinen Wahrscheinlichkeiten

$$\varphi(v_1)\,dv = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v_1^2} dv, \qquad \varphi(v_2)\,dv = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v_2^2} dv, \text{ usw.}$$

zu, folglich ist die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Zustandekommen des gesamten Fehlersystems, wenn sämtliche Beobachtungen von gleicher Genauigkeit vorausgesetzt werden, dargestellt durch das Produkt:

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} dv\right)^n e^{-h^2 [vv]}.$$

Dasjenige System von Unbekannten x, y, z, . . . welches durch Substitution in die Fehlergleichungen solche Fehler übrig läßt, die in ihrer Gesamtheit das Wahrscheinlichkeitsprodukt W zu einem Maximum macht, muß im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie als das wahrscheinlichste angesehen werden. Es wird aber W ein Maximum, wenn der veränderliche Faktor $[vv]$ des Exponenten ein Minimum ist, d. h.: das wahrscheinlichste Wertsystem der Unbekannten ist dasjenige, welches den Beobachtungen ein System von scheinbaren Fehlern zuschreibt, deren Quadratsumme ein Minimum ist.

Besitzen die Beobachtungen verschiedene Gewichte g, so wird — wie aus einer analogen Betrachtung hervorgeht — W zu einem Maximum, wenn $[gvv]$ ein Minimum ist.

§ 43. Ableitung der Normalgleichungen.

Wir setzen die Fehlergleichungen (5) des vorigen Paragraphen hier nochmals an, wobei wir ungleiche Gewichte g voraussetzen und der Einfachheit wegen uns auf drei Unbekannte beschränken wollen.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z - l_1 = v_1 \ldots g_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z - l_2 = v_2 \ldots g_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n y + c_n z - l_n = v_n \ldots g_n \end{array}\right| \quad (1)$$

Um $[g\,v\,v]$ zu einem Minimum zu machen, hat man zu beachten, daß die einzelnen v Funktionen der Größen x, y, z sind und daß daher die partiellen Differentialquotienten der Summe

$$[g\,v\,v] = g_1 v_1^2 + g_2 v_2^2 + \cdots + g_n v_n^2$$

nach den drei Veränderlichen x, y, z gleich Null gesetzt werden müssen. Die Erfüllung des Minimums der obigen Summe fordert daher auch die Befriedigung folgender Bedingungsgleichungen:

$$\frac{\partial [g\,v\,v]}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial [g\,v\,v]}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial [g\,v\,v]}{\partial z} = 0.$$

Die Ausführung der Differentiation liefert die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}\frac{\partial [g\,v\,v]}{\partial x} = g_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + g_2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + \cdots + g_n v_n \frac{\partial v_n}{\partial x} = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial [g\,v\,v]}{\partial y} = g_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + g_2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + \cdots + g_n v_n \frac{\partial v_n}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial [g\,v\,v]}{\partial z} = g_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} + g_2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} + \cdots + g_n v_n \frac{\partial v_n}{\partial z} = 0 \end{array}\right| \quad (2)$$

Bildet man die hier auftretenden partiellen Differentialquotienten aus den Fehlergleichungen (1), nämlich:

$$\begin{array}{llll} \frac{\partial v_1}{\partial x} = a_1, & \frac{\partial v_2}{\partial x} = a_2, & \ldots & \frac{\partial v_n}{\partial x} = a_n, \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} = b_1, & \frac{\partial v_2}{\partial y} = b_2, & \ldots & \frac{\partial v_n}{\partial y} = b_n, \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} = c_1, & \frac{\partial v_2}{\partial z} = c_2, & \ldots & \frac{\partial v_n}{\partial z} = c_n, \end{array}$$

so gehen die Gleichungen (2) durch Einführung derselben in folgende Bedingungsgleichungen über:

$$\left.\begin{array}{l} g_1 a_1 v_1 + g_2 a_2 v_2 + \cdots + g_n a_n v_n = [g\,a\,v] = 0 \\ g_1 b_1 v_1 + g_2 b_2 v_2 + \cdots + g_n b_n v_n = [g\,b\,v] = 0 \\ g_1 c_1 v_1 + g_2 c_2 v_2 + \cdots + g_n c_n v_n = [g\,c\,v] = 0 \end{array}\right| \quad (3)$$

Hienach kann das Ausgleichungsprinzip auch folgendermaßen ausgesprochen werden: Das wahrscheinlichste Wertsystem der Unbekannten ist dasjenige, für welches die Summe der mit

den Koeffizienten einer jeden Unbekannten multiplizierten Produkte aus den Gewichten und den Widersprüchen für jede Unbekannte gleich Null ist.

Um zu den wahrscheinlichsten Werten der Unbekannten selbst zu gelangen, quadriere man die einzelnen Fehlergleichungen (1), multipliziere sie mit ihren Gewichten und addiere, so daß die Summe entsteht:

$$[grr] = [gaa]\,x^2 + 2\,[gab]\,xy + [gbb]\,y^2 + 2\,[gac]\,xz + 2\,[gbc]\,yz + [gcc]\,z^2 - 2\,[gal]\,x - 2\,[gbl]\,y - 2\,[gcl]\,z + [gll].$$

Werden von dieser Summe die partiellen Differentialquotienten nach x, y, z gebildet und der Null gleich gesetzt, so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial\,[grr]}{\partial x} &= [gaa]\,x + [gab]\,y + [gac]\,z - [gal] = 0\\
\frac{1}{2}\frac{\partial\,[grr]}{\partial y} &= [gab]\,x + [gbb]\,y + [gbc]\,z - [gbl] = 0\\
\frac{1}{2}\frac{\partial\,[grr]}{\partial z} &= [gac]\,x + [gbc]\,y + [gcc]\,z - [gcl] = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Die Gleichungen (2), (3) und (4) sind offenbar identisch. In der Tat erhält man das Gleichungssystem (4) aus (3) durch Substitution der nach (1) zusammengesetzten Ausdrücke für die v.

Diese Gleichungen, von Legendre (1806) zum ersten Male, aber ohne nähere Begründung bekannt gegeben, werden nach Gerling „Normalgleichungen" genannt. Sie kommen, ihrer Entstehungsweise durch partielle Differentiation nach den Unbekannten zufolge, stets in der Anzahl der Unbekannten vor, enthalten sämtliche den n Beobachtungen zukommende Koeffizienten und können daher zur eindeutigen Berechnung der Unbekannten verwendet werden.

Weisen die Beobachtungen denselben Grad von Genauigkeit, also gleiche Gewichte auf, so hat die Minimumsbedingung $[vv] = min$ in Geltung zu kommen und die entsprechenden Gleichungen lauten:

Bedingungsgleichungen:

$$[av] = 0, \qquad [bv] = 0, \qquad [cv] = 0.$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z - [al] &= 0\\
[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z - [bl] &= 0\\
[ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z - [cl] &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Die Normalgleichungen enthalten quadratische Glieder $[aa]$, $[bb]$, . . . und nichtquadratische Glieder $[ab]$, $[ac]$, . . . Da letztere

doppelt vorkommen, so hat man bei Aufgaben mit mehreren Unbekannten, um die nichtquadratischen Glieder nicht zweimal schreiben zu müssen, eine abgekürzte Schreibweise eingeführt, welche darin besteht, daß man die Wiederholungen ausläßt und zum Zeichen dafür, daß die verbleibenden Ansätze nur Fragmente von wirklichen Gleichungen darstellen, welche auch noch alle Unbekannte enthalten, die in der Diagonalreihe befindlichen quadratischen Glieder unterstreicht. Die Normalgleichungen z. B. mit vier Unbekannten nehmen dann folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{array}{llll} \underline{[aa]\,x} + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,t - [al] = 0 \\ \qquad\quad \underline{[bb]\,y} + [bc]\,z + [bd]\,t - [bl] = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{[cc]\,z} + [cd]\,t - [cl] = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{[dd]\,t} - [dl] = 0 \end{array}\right\} \quad (6)$$

Zweckmäßiger und praktischer als diese von Jordan gewählte Schreibweise erscheint die von Hammer (in der Zeitschrift für Vermessungswesen, 1906, S. 250) in Vorschlag gebrachte Symbolik, wobei nur die erste Normalgleichung voll angeschrieben wird, um die Unbekannten anzuzeigen, für die folgenden aber nur die Koeffizienten vom quadratischen Gliede an aufgeführt werden, während die Bezeichnungen für die Unbekannten entfallen, wie dies auch bei der Zahlenrechnung üblich ist. Demnach hat man zu schreiben:

$$\left.\begin{array}{lllll} [aa]\,x + & [ab]\,y + & [ac]\,z + & [ad]\,t - & [al] = 0 \\ & [bb] & [bc] & [bd] & [bl] \\ & & [cc] & [cd] & [cl] \\ & & & [dd] & [dl] \end{array}\right\} \quad (7)$$

Die Normalgleichungen vermittelnder Beobachtungen gleicher Genauigkeit unterscheiden sich von denen ungleicher Genauigkeit dadurch, daß die ohnehin viel Rechenarbeit erfordernden Koeffizienten im letzteren Falle noch mit den Gewichten multipliziert erscheinen. Um in diesem Falle die numerische Berechnung der zweifachen Produkte zu erleichtern, kann man die Fehlergleichungen (1) von vornherein durch Multiplikation mit den Quadratwurzeln der entsprechenden Gewichte sozusagen „auf gleiches Gewicht reduzieren", wodurch anstatt der zweifachen Produkte $[g\,a\,b]$, $[g\,a\,c]$, . . . nur die einfachen Produkte $[a\sqrt{g}\,.\,b\sqrt{g}]$, $[a\sqrt{g}\,.\,c\sqrt{g}]$, . . . zu bilden erforderlich werden. Man kann die Zulässigkeit dieser Reduktion, worüber im § 36 einiges bereits gesagt worden ist, strenge beweisen. Wenn die Beobachtungen l_1 bis l_n ungleiche Genauigkeiten h_1 bis h_n besitzen und allgemein der Fehler v_i der Beobachtung l_i das Fehlergesetz

$$\frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 v_i^2}$$

befolgt, so wird der fingierte Fehler $v_i' = h_i v_i$, der entsprechend der Gleichung (6) des § 38 so gebaut ist, als gehöre er zur Genauigkeit $h_i' = 1$, das Gesetz

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-v_i' v_i'}$$

befolgen müssen. Dies ist aber das Fehlergesetz einer Beobachtung, welcher faktisch die Einheit der Genauigkeit entspricht (§ 10, S. 40). Wird nun die i-te Fehlergleichung

$$a_i x + b_i y + c_i z - l_i = v_i$$

mit h_i multipliziert, so erhält man:

$$h_i a_i x + h_i b_i y + h_i c_i z - h_i l_i = h_i v_i$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$a_i' x + b_i' y + c_i' z - l_i' = v_i',$$

man sieht also, daß sämtliche so modifizierten Fehlergleichungen beziehungsweise die Fehler v_i' einem und demselben Fehlergesetze gehorchen, nämlich einem solchen, welchem durchaus gleich genaue Beobachtungen entsprechen. Demnach ist man berechtigt, die modifizierten Fehlergleichungen so zu behandeln, wie wenn sie aus gleich genauen Beobachtungen stammen würden. Da aber die Genauigkeitsmaße den Quadratwurzeln der Gewichte direkt proportional sind, so kann man die Fehlergleichungen, um sie auf gleiche Genauigkeit oder, was dasselbe ist, auf gleiches Gewicht zu reduzieren, anstatt mit den Präzisionsmaßen auch mit den Quadratwurzeln aus den entsprechenden Gewichten multiplizieren oder auch durch die charakteristischen Fehlermaße dividieren.

Es ist aber einleuchtend, daß der unter Zugrundelegung der modifizierten Fehlergleichungen berechnete „mittlere Fehler einer Beobachtung" dann dem „mittleren Fehler der Gewichtseinheit" gleich kommen muß, weil ja die mit h_i oder $\sqrt{g_i}$ multiplizierten Beobachtungen auf die Gewichtseinheit reduziert erscheinen.

§ 44. Auflösung der Normalgleichungen.

Wenn die Anzahl der Unbekannten keine geringe ist, so gestaltet sich die Auflösung der Normalgleichungen nach den gewöhnlichen Regeln der Algebra zu umständlich. Rascher und sicherer zum Ziele führt dann das von Gauß (1810) empfohlene allmähliche Eli-

minationsverfahren unter Benützung der von ihm eingeführten symbolischen Bezeichnungsweise. Wie hiebei vorzugehen ist, kann aus Nachstehendem entnommen werden. Wird von den Normalgleichungen für vier Unbekannte

$$\left.\begin{array}{l} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,t = [al] \\ [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + [bd]\,t = [bl] \\ [ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + [cd]\,t = [cl] \\ [ad]\,x + [bd]\,y + [cd]\,z + [dd]\,t = [dl] \end{array}\right\} \qquad (1)$$

die erste durch $[aa]$ dividiert, so entsteht die erste reduzierte Normalgleichung:

$$x + \frac{[ab]}{[aa]}\,y + \frac{[ac]}{[aa]}\,z + \frac{[ad]}{[aa]}\,t = \frac{[al]}{[aa]}. \qquad (2)$$

Wird diese Gleichung mit $[ab]$ multipliziert und von der zweiten Normalgleichung abgezogen, sodann mit $[ac]$ multipliziert und von der dritten in Abzug gebracht und endlich mit $[ad]$ multipliziert und von der vierten abgezogen, so entsteht das Gleichungssystem:

$$\left\{[bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}\right\} y + \left\{[bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}\right\} z + \left\{[bd] - \frac{[ab]\,[ad]}{[aa]}\right\} t = \\ = \left\{[bl] - \frac{[ab]\,[al]}{[aa]}\right\}$$

$$\left\{[bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}\right\} y + \left\{[cc] - \frac{[ac]\,[ac]}{[aa]}\right\} z + \left\{[cd] - \frac{[ac]\,[ad]}{[aa]}\right\} t = \\ = \left\{[cl] - \frac{[ac]\,[al]}{[aa]}\right\}$$

$$\left\{[bd] - \frac{[ab]\,[ad]}{[aa]}\right\} y + \left\{[cd] - \frac{[ac]\,[ad]}{[aa]}\right\} z + \left\{[dd] - \frac{[ad]\,[ad]}{[aa]}\right\} t = \\ = \left\{[dl] - \frac{[ad]\,[al]}{[aa]}\right\}.$$

Dieses Gleichungssystem, welches die Unbekannte x nicht mehr enthält und auch um eine Gleichung weniger besitzt, als das System (1), wird abgekürzt wie folgt geschrieben:

$$\left.\begin{array}{l} [bb.1]\,y + [bc.1]\,z + [bd.1]\,t = [bl.1] \\ [bc.1]\,y + [cc.1]\,z + [cd.1]\,t = [cl.1] \\ [bd.1]\,y + [cd.1]\,z + [dd.1]\,t = [dl.1] \end{array}\right\} \qquad (3)$$

worin die symbolisch angeschriebenen Koeffizienten folgende Bedeutung haben:

$$[bb.1] = [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}$$

$$[bc.1] = [bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}$$
$$[bd.1] = [bd] - \frac{[ab]\,[ad]}{[aa]}$$
$$[bl.1] = [bl] - \frac{[ab]\,[al]}{[aa]}$$
$$[cc.1] = [cc] - \frac{[ac]\,[ac]}{[aa]}$$
$$[cd.1] = [cd] - \frac{[ac]\,[ad]}{[aa]}$$
$$[cl.1] = [cl] - \frac{[ac]\,[al]}{[aa]}$$
$$[dd.1] = [dd] - \frac{[ad]\,[ad]}{[aa]}$$
$$[dl.1] = [dl] - \frac{[ad]\,[al]}{[aa]}.$$

Die Gleichungen (3), welche völlig wie Normalgleichungen gestaltet sind, werden nunmehr wie solche auch weiter behandelt. Zunächst entsteht, wenn man die erste davon durch $[bb.1]$ dividiert, die zweite reduzierte Normalgleichung:

$$y + \frac{[bc.1]}{[bb.1]}z + \frac{[bd.1]}{[bb.1]}t = \frac{[bl.1]}{[bb.1]}. \tag{4}$$

Wird nun diese Gleichung zuerst mit $[bc.1]$ multipliziert und von der zweiten Gleichung der Gruppe (3) abgezogen und hierauf mit $[bd.1]$ multipliziert und von der dritten in Abzug gebracht, so entsteht das Gleichungssystem:

$$\left\{[cc.1] - \frac{[bc.1]\,[bc.1]}{[bb.1]}\right\}z + \left\{[cd.1] - \frac{[bc.1]\,[bd.1]}{[bb.1]}\right\}t = \left\{[cl.1] - \frac{[bc.1]\,[bl.1]}{[bb.1]}\right\}$$

$$\left\{[cd.1] - \frac{[bc.1]\,[bd.1]}{[bb.1]}\right\}z + \left\{[dd.1] - \frac{[bd.1]\,[bd.1]}{[bb.1]}\right\}t = \left\{[dl.1] - \frac{[bd.1]\,[bl.1]}{[bb.1]}\right\}.$$

Dieses abermals um eine Gleichung geringere Gleichungssystem, welches auch das y nicht mehr enthält, wird symbolisch wie folgt geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} [cc.2]\,z + [cd.2]\,t &= [cl.2] \\ [cd.2]\,z + [dd.2]\,t &= [dl.2] \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

wobei die abgekürzt geschriebenen Koeffizienten folgende Bedeutung haben:

$$[cc.2] = [cc.1] - \frac{[bc.1]\,[bc.1]}{[bb.1]}$$

$$[cd.2] = [cd.1] - \frac{[bc.1]\,[bd.1]}{[bb.1]}$$

$$[cl.2] = [cl.1] - \frac{[bc.1]\,[bl.1]}{[bb.1]}$$

$$[dd.2] = [dd.1] - \frac{[bd.1]\,[bd.1]}{[bb.1]}$$

$$[dl.2] = [dl.1] - \frac{[bd.1]\,[bl.1]}{[bb.1]}.$$

Wird die erste Gleichung von (5) durch $[cc.2]$ dividiert, so entsteht die **dritte reduzierte Normalgleichung**:

$$z + \frac{[cd.2]}{[cc.2]}\,t = \frac{[cl.2]}{[cc.2]}. \tag{6}$$

Durch Multiplikation derselben mit $[cd.2]$ und Subtraktion von der zweiten Gleichung der Gruppe (5) resultiert:

$$\left\{[dd.2] - \frac{[cd.2]\,[cd.2]}{[cc.2]}\right\} t = \left\{[dl.2] - \frac{[cd.2]\,[cl.2]}{[cc.2]}\right\}$$

oder in symbolischer Schreibweise:

$$[dd.3]\,t = [dl.3], \tag{7}$$

wobei die Bedeutung dieser abgekürzt geschriebenen Koeffizienten aus der darüber befindlichen Gleichung unmittelbar abgelesen werden kann. Aus (7) ergibt sich direkt die vierte Unbekannte:

$$t = \frac{[dl.3]}{[dd.3]}, \tag{8}$$

welche Gleichung die **vierte reduzierte Normalgleichung** repräsentiert. Die ursprünglichen Normalgleichungen (1) können daher durch folgendes System der „**reduzierten Normalgleichungen**", d. i. durch die Gleichungen (2), (4), (6), (8) ersetzt werden:

$$\left.\begin{aligned}
x + \frac{[ab]}{[aa]}\,y + \frac{[ac]}{[aa]}\,z + \frac{[ad]}{[aa]}\,t &= \frac{[al]}{[aa]} \\
y + \frac{[bc.1]}{[bb.1]}\,z + \frac{[bd.1]}{[bb.1]}\,t &= \frac{[bl.1]}{[bb.1]} \\
z + \frac{[cd.2]}{[cc.2]}\,t &= \frac{[cl.2]}{[cc.2]} \\
t &= \frac{[dl.3]}{[dd.3]}
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Hievon enthält jede folgende Gleichung um eine Unbekannte weniger als die vorhergehende, so daß man es hier nicht mit symbolischen Gleichungen wie Gruppe (6) im vorhergehenden Paragraphen, sondern mit wirklichen Gleichungen zu tun hat. Dieselben gestatten daher eine sichere Berechnung der Unbekannten durch fortgesetzte Substitution und schrittweises Aufsteigen von der letzten zur ersten. Da man das Eliminationsverfahren so einrichten kann, daß immer eine andere Unbekannte die letzte Stelle einnimmt, so kann man, ebenso wie nach (8) für t, auch für z, y und x ähnliche, einfach gebaute Ausdrücke erhalten, nämlich:

$$\left.\begin{array}{ll} x = \dfrac{[al.3]}{[aa.3]} & z = \dfrac{[cl.3]}{[cc.3]} \\ y = \dfrac{[bl.3]}{[bb.3]} & t = \dfrac{[dl.3]}{[dd.3]} \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Es ist zur numerischen Auflösung der reduzierten Normalgleichungen nicht notwendig, die zur Bildung der darin vorkommenden, abgekürzt geschriebenen Koeffizienten bestehenden Formeln zu kennen, denn die Zahlenwerte derselben ergeben sich durch das allmähliche Eliminationsgeschäft von selbst. Aber es gibt zwischen ihnen manche interessante Beziehungen, die auch später Anwendung finden werden, weshalb es angezeigt erscheint, die zur Bildung dieser Ausdrücke allgemein gültigen Schemata hier anzuschließen:

$$[ik.1] = [ik] - \frac{[ai]\,[ak]}{[aa]}$$

$$[ik.2] = [ik.1] - \frac{[bi.1]\,[bk.1]}{[bb.1]}$$

$$[ik.3] = [ik.2] - \frac{[ci.2]\,[ck.2]}{[cc.2]}$$

usw.

Aus denselben geht hervor, wie ein Koeffizient höherer Ordnung aus Koeffizienten der um 1 niedrigeren Ordnung erhalten wird.

§ 45. Reduktion von Fehlergleichungen.

Zur Erleichterung der im folgenden Paragraphen durchzuführenden Untersuchung seien die Fehlergleichungen von der Form

$$v = a\,(x - X) + b\,(y - Y) + c\,(z - Z) + \varepsilon \qquad (1)$$

einer Transformation unterzogen. Die erste Normalgleichung zu diesen Fehlergleichungen lautet:

$$[a\,a]\,(x - X) + [a\,b]\,(y - Y) + [a\,c]\,(z - Z) + [a\,\varepsilon] = 0.$$

Setzt man die hieraus abgeleitete Unbekannte $(x - X)$, nämlich

$$(x - X) = -\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,(y - Y) - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,(z - Z) - \frac{[a\,\varepsilon]}{[a\,a]}$$

in die allgemeine Fehlergleichung (1) ein, so erhält man die **erste reduzierte Fehlergleichung**:

$$v = \left\{b - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a\right\}(y - Y) + \left\{c - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,a\right\}(z - Z) + \left\{\varepsilon - \frac{[a\,\varepsilon]}{[a\,a]}\,a\right\},$$

oder in einfacherer Schreibweise:

$$v = b'\,(y - Y) + c'\,(z - Z) + \varepsilon', \tag{2}$$

wenn

$$\left.\begin{aligned} b' &= b - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a \\ c' &= c - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,a \\ \varepsilon' &= \varepsilon - \frac{[a\,\varepsilon]}{[a\,a]}\,a \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

gesetzt wird. Hiebei stehen die reduzierten Koeffizienten b', c', ε' mit den ursprünglichen Koeffizienten in folgenden Beziehungen: Es ist

$$\begin{array}{lll} [b'\,b'] = [b\,b\,.\,1] & [b'\,c'] = [b\,c\,.\,1] & [b'\,\varepsilon'] = [b\,\varepsilon\,.\,1] \\ & [c'\,c'] = [c\,c\,.\,1] & [c'\,\varepsilon'] = [c\,\varepsilon\,.\,1] \\ & & [\varepsilon'\,\varepsilon'] = [\varepsilon\,\varepsilon\,.\,1] \end{array}$$

was sich durch Entwicklung dieser Ausdrücke leicht beweisen läßt, denn es ist z. B.

$$b'_1 = b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_1 \qquad\qquad \varepsilon'_1 = \varepsilon_1 - \frac{[a\,\varepsilon]}{[a\,a]}\,a_1$$

$$b'_1\,\varepsilon'_1 = b_1\,\varepsilon_1 - a_1\,\varepsilon_1\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]} - a_1\,b_1\,\frac{[a\,\varepsilon]}{[a\,a]} + a_1^2\,\frac{[a\,b]\,[a\,\varepsilon]}{[a\,a]^2}$$

$$[b'\,\varepsilon'] = [b\,\varepsilon] - [a\,\varepsilon]\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]} - [a\,b]\,\frac{[a\,\varepsilon]}{[a\,a]} + [a\,a]\,\frac{[a\,b]\,[a\,\varepsilon]}{[a\,a]^2} =$$

$$= [b\,\varepsilon] - \frac{[a\,b]\,[a\,\varepsilon]}{[a\,a]} = [b\,\varepsilon\,.\,1].$$

Die reduzierte Fehlergleichung (2) kann nun mit Hilfe der zweiten reduzierten Normalgleichung

$$(y - Y) + \frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,(z - Z) + \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} = 0,$$

welcher nach obigem auch die Form

$$(y - Y) = -\frac{[b'c']}{[b'b']}(z - Z) - \frac{[b'\varepsilon']}{[b'b']} \tag{4}$$

gegeben werden kann, abermals reduziert werden, indem (4) in (2) eingesetzt wird. Es entsteht hiedurch die zweite reduzierte Fehlergleichung:

$$v = \left\{c' - \frac{[b'c']}{[b'b']}b'\right\}(z - Z) + \left\{\varepsilon' - \frac{[b'\varepsilon']}{[b'b']}b'\right\}$$

oder in einfacherer Schreibweise:

$$v = c''(z - Z) + \varepsilon'', \tag{5}$$

wenn

$$c'' = c' - \frac{[b'c']}{[b'b']}b' \quad \text{und} \quad \varepsilon'' = \varepsilon' - \frac{[b'\varepsilon']}{[b'b']}b' \tag{6}$$

gesetzt wird. Hiebei bestehen die Beziehungen:

$$[c''c''] = [cc.2] \qquad [c''\varepsilon''] = [c\varepsilon.2]$$
$$[\varepsilon''\varepsilon''] = [\varepsilon\varepsilon.2].$$

Auf diesem Wege fortschreitend erhält man schließlich

$$v = \varepsilon''' = \varepsilon'' - \frac{[c''\varepsilon'']}{[c''c'']}c'',$$

welche die dritte reduzierte Fehlergleichung repräsentiert und mit Rücksicht auf (6) und (3) wie folgt umgeschrieben werden kann:

$$v = \varepsilon''' = \varepsilon - \frac{[a\varepsilon]}{[aa]}a - \frac{[b'\varepsilon']}{[b'b']}b' - \frac{[c''\varepsilon'']}{[c''c'']}c''. \tag{7}$$

§ 46. Genauigkeitsbestimmung der ursprünglichen Beobachtungen.

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ die wahren Fehler der gleich genauen Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots l_n$, welche durch die Vermittlungsgleichungen mit den wahren Werten der Unbekannten X, Y, Z in Beziehung stehen, so sind die wahren Beobachtungsfehler durch folgende Fehlergleichungen definiert:

$$\varepsilon_1 = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z - l_1$$
$$\varepsilon_2 = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z - l_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varepsilon_n = a_n X + b_n Y + c_n Z - l_n.$$

Bildet man die Summe der Quadrate dieser Ausdrücke, so erhält man einerseits:

$$\left.\begin{aligned}[][\varepsilon\varepsilon] = [aa]\,X^2 + 2\,[ab]\,XY + 2\,[ac]\,XZ - 2\,[al]\,X +\\ [bb]\,Y^2 + 2\,[bc]\,YZ - 2\,[bl]\,Y +\\ + [cc]\,Z^2 - 2\,[cl]\,Z + [ll]\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Anderseits kann man $[\varepsilon\varepsilon]$ durch einen Ausdruck von der Form

$$[\varepsilon\varepsilon] = w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$$

darstellen, worin

$$\left.\begin{aligned} w_1\sqrt{[aa]} &= [aa]\,X + [ab]\,Y + [ac]\,Z - [al]\\ w_2\sqrt{[bb.1]} &= [bb.1]\,Y + [bc.1]\,Z - [bl.1]\\ w_3\sqrt{[cc.2]} &= [cc.2]\,Z - [cl.2]\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

also w_1 eine lineare Funktion von X, Y, Z, w_2 eine solche von Y, Z und w_3 eine Funktion von Z allein ist, und w_0 eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet. Um dies zu beweisen, bilden wir zunächst die Differenz $[\varepsilon\varepsilon] - w_1^2$, indem wir das Quadrat von w_1 aus (2) berechnen und von (1) subtrahieren, wobei die Bemerkung gemacht wird, daß aus dieser Differenz die Glieder mit X verschwinden. Man erhält

$$\begin{aligned}[][\varepsilon\varepsilon] - w_1^2 = &\left\{[bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}\right\} Y^2 + 2\left\{[bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}\right\} YZ +\\ &+ \left\{[cc] - \frac{[ac]\,[ac]}{[aa]}\right\} Z^2 - 2\left\{[bl] - \frac{[ab]\,[al]}{[aa]}\right\} Y -\\ &- 2\left\{[cl] - \frac{[ac]\,[al]}{[aa]}\right\} Z + \left\{[ll] - \frac{[al]\,[al]}{[aa]}\right\}\end{aligned}$$

oder unter Einführung der Gaußschen Symbole:

$$\begin{aligned}[][\varepsilon\varepsilon] - w_1^2 = [bb.1]\,Y^2 + 2\,[bc.1]\,YZ + [cc.1]\,Z^2 - 2\,[bl.1]\,Y -\\ - 2\,[cl.1]\,Z + [ll.1].\end{aligned}$$

Bilden wir jetzt die Differenz $[\varepsilon\varepsilon] - w_1^2 - w_2^2$, so erhält man in analoger Weise:

$$[\varepsilon\varepsilon] - w_1^2 - w_2^2 = [cc.2]\,Z^2 - 2\,[cl.2]\,Z + [ll.2],$$

eine Gleichung, welche nur mehr die Unbekannte Z enthält. Geht man noch einen Schritt weiter, so kommt man schließlich zu der Gleichung

$$[\varepsilon\varepsilon] - w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 = [ll.3],$$

welche weder X noch Y noch Z enthält, so daß die Größe

$$[ll.3] = w_0^2$$

eine Konstante darstellt und damit bewiesen ist, daß die Gleichung besteht:

$$[\varepsilon\varepsilon] = w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2. \quad (3)$$

Diese Gleichung besteht strenge nur für das System der wahren Unbekannten X, Y, Z, denn sobald hierin für die Unbekannten Näherungswerte x, y, z eingeführt werden, sind die ε keine wahren Beobachtungsfehler mehr. Da es unmöglich ist, die wahren Werte der Unbekannten zu berechnen, wird man sich mit den wahrscheinlichsten Werten derselben begnügen, welche aber nicht die wahren Beobachtungsfehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$, sondern die übrigbleibenden Widersprüche $v_1, v_2, \ldots v_n$, das sind die scheinbaren Beobachtungsfehler zurücklassen. Führt man aber das System der wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten ein, welche durch die Normalgleichungen definiert erscheinen, so vereinfacht sich der Ausdruck (3) für die Summe der Fehlerquadrate $[\varepsilon\varepsilon]$, welche dann in $[vv]$ übergeht, ganz wesentlich, denn nach den aus den Normalgleichungen hervorgehenden Eliminationsgleichungen für drei Unbekannte (Gl. 9, S. 169):

$$
\begin{aligned}
[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z - [al] &= 0 \\
[bb.1]\,y + [bc.1]\,z - [bl.1] &= 0 \\
[cc.2]\,z - [cl.2] &= 0
\end{aligned}
$$

stellt sich heraus, daß dann $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0$, also

$$[vv] = w_0^2 = [ll.3] \tag{4}$$

wird. Löst man $[ll.3]$ in seine Bestandteile auf, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
[ll.3] &= [ll.2] - \frac{[cl.2]\,[cl.2]}{[cc.2]} \\
[ll.2] &= [ll.1] - \frac{[bl.1]\,[bl.1]}{[bb.1]} \\
[ll.1] &= \quad [ll] - \frac{[al]\,[al]}{[aa]},
\end{aligned}
$$

somit ist auch:

$$[vv] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl.1]^2}{[bb.1]} - \frac{[cl.2]^2}{[cc.2]}. \tag{5}$$

Um nun den mittleren Fehler μ einer einzelnen Beobachtung als Funktion der scheinbaren Fehler auszudrücken, stelle man die Gleichungen für die wahren und scheinbaren Fehler gegenüber:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= a\,X + b\,Y + c\,Z - l \\
v &= a\,x + b\,y + c\,z - l
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt $v = a\,(x - X) + b\,(y - Y) + c\,(z - Z) + \varepsilon$.

Da diese Gleichung selbst wieder die Form einer Fehlergleichung besitzt, so lassen sich auf dieselbe alle in diesem und im vorigen

Paragraphen angestellten Transformationen anwenden. Somit ist zunächst nach (5), indem darin ε statt l gesetzt wird:

$$[r\,r] = [\varepsilon\,\varepsilon] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,\varepsilon\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]}$$

oder unter Einführung der reduzierten Koeffizienten nach § 45:

$$[r\,r] = [\varepsilon\,\varepsilon] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b'\,\varepsilon']^2}{[b'\,b']} - \frac{[c''\,\varepsilon'']^2}{[c''\,c'']} \cdot \tag{6}$$

Bei der Unmöglichkeit, den wahren Wert der Differenz $[\varepsilon\,\varepsilon] - [r\,r]$ zu erhalten, wird man sich, wie dies bei derartigen Untersuchungen bisher immer geschehen ist, mit der wahrscheinlichsten Differenz begnügen, welche folgendermaßen erhalten wird. Man greife zunächst das Glied $[a\,\varepsilon]^2$ heraus, welches in seiner Auflösung lautet:

$$[a\,\varepsilon]^2 = (a_1\,\varepsilon_1 + a_2\,\varepsilon_2 + \cdots + a_n\,\varepsilon_n)^2 = [a^2\,\varepsilon^2] + 2\,[a_i\,a_k\,\varepsilon_i\,\varepsilon_k].$$

Da die doppelten Produkte zufolge der charakteristischen Eigenschaft der zufälligen Beobachtungsfehler, gleichwahrscheinlich positiv und negativ aufzutreten, im Durchschnitt verschwinden, so wird

$$[a\,\varepsilon]^2 = [a^2\,\varepsilon^2] = a_1^2\,\varepsilon_1^2 + a_2^2\,\varepsilon_2^2 + \cdots + a_n^2\,\varepsilon_n^2.$$

Führt man hierin anstatt der Einzelfehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ das arithmetische Mittel derselben ein, welches, weil die ε wahre Fehler darstellen, nach der strengen Formel für die Durchschnittswerte gebildet wird, also

$$\mu^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n},$$

so folgt:

$$[a\,\varepsilon]^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\,\mu^2 = [a\,a]\,\mu^2,$$

somit ist das zweite Glied von (6):

$$\frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} = \mu^2. \tag{7}$$

Das nächste Glied $[b'\,\varepsilon']^2$ kann wie folgt umgeformt werden. Es ist

$$\varepsilon' = \varepsilon - \frac{[a\,\varepsilon]}{[a\,a]}\,a,$$

folglich:

$$[b'\,\varepsilon'] = [b'\,\varepsilon] - \frac{[a\,\varepsilon]}{[a\,a]}\,[a\,b'],$$

oder mit Rücksicht auf (7):

$$[b'\,\varepsilon'] = [b'\,\varepsilon] - \frac{\mu}{\sqrt{[a\,a]}}\,[a\,b'].$$

Da μ ebenso wahrscheinlich positiv als negativ sein kann, so ist im Mittel:

$$[b'\varepsilon'] = [b'\varepsilon]$$

und daher ist in Berücksichtigung der bei Ableitung von (7) getroffenen Erwägungen das dritte Glied von (6):

$$\frac{[b'\varepsilon']^2}{[b'b']} = \frac{[b'\varepsilon]^2}{[b'b']} = \mu^2.$$

Durch analoge Schlüsse findet man, daß auch das letzte Glied von (6) durch μ^2 dargestellt werden kann, so daß für drei Unbekannte die Beziehung besteht:

$$[v\,v] = [\varepsilon\,\varepsilon] - \mu^2 - \mu^2 - \mu^2$$

und

$$[\varepsilon\,\varepsilon] = [v\,v] + 3\,\mu^2. \tag{8}$$

Nun ist der mittlere Fehler einer Beobachtung nach der für wahre Beobachtungsfehler streng gültigen Formel bestimmt aus:

$$\mu^2 = \frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}.$$

Setzt man diesen Wert in (8), so erhält man:

$$\mu^2 = \frac{[v\,v] + 3\,\mu^2}{n},$$

woraus der mittlere Fehler einer Beobachtung als Funktion der scheinbaren Fehler wie folgt resultiert:

$$\mu = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-3}}.$$

Kommen die Unbekannten $X, Y, Z, \ldots$ in der Anzahl u vor, so liefert die Verallgemeinerung dieser Theorie für den mittleren Fehler einer Beobachtung die Formel:

$$\mu = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-u}}, \tag{9}$$

welche an Stelle der für wahre Fehler geltenden Formel

$$\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}},$$

wo im Nenner die Anzahl sämtlicher Beobachtungen fungiert, zu treten hat. Man sieht also, daß zur Berechnung des mittleren Fehlers einer Beobachtung aus den scheinbaren Fehlern, ebenso wie dies auch schon beim arithmetischen Mittel hervorgehoben wurde, die

Summe der Fehlerquadrate nicht durch die Gesamtanzahl der Beobachtungen, sondern durch die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen zu teilen ist.

Um von dem mittleren Fehler auf den durchschnittlichen und wahrscheinlichen Fehler überzugehen, bedient man sich des Verhältnisses

$$\frac{\mu_r}{\mu_\varepsilon} = \sqrt{\frac{n-u}{n}},$$

welches durch Division der beiden Definitionsformeln:

$$\mu_r = \sqrt{\frac{[rr]}{n}}, \quad \mu_\varepsilon = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{[rr]}{n-u}}$$

hervorgeht. Dementsprechend bestehen auch die Verhältnisse:

$$\frac{\mu_\varepsilon}{\mu_r} = \frac{\vartheta_\varepsilon}{\vartheta_r} = \frac{\varrho_\varepsilon}{\varrho_r} = \sqrt{\frac{n}{n-u}},$$

und es ist daher der durchschnittliche Fehler einer Beobachtung, bekannt unter dem Namen der Formel von Lüroth (1868):

$$\vartheta = \frac{[|\varepsilon|]}{n} = \frac{[|r|]}{n}\sqrt{\frac{n}{n-u}} = \frac{[|r|]}{\sqrt{n(n-u)}}. \tag{10}$$

Analog bilden wir die Formel für den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung:

$$\varrho = 0{\cdot}998\left(\frac{[\sqrt{|\varepsilon|}]}{n}\right)^2 = 0{\cdot}998\left(\frac{[\sqrt{|r|}]}{n}\right)^2\sqrt{\frac{n}{n-u}} = 0{\cdot}998\,\frac{[\sqrt{|r|}]^2}{n\sqrt{n(n-u)}}. \tag{11}$$

Bei ungleich genauen Beobachtungen sind die charakteristischen Fehler der Gewichtseinheit durch folgende Formeln bestimmt:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[grr]}{n-u}} \tag{12}$$

$$\vartheta_0 = \frac{[\sqrt{g}\,|r|]}{\sqrt{n(n-u)}} \tag{13}$$

$$\varrho_0 = 0{\cdot}998\,\frac{[\sqrt{\sqrt{g}\,|r|}]^2}{n\sqrt{n(n-u)}}. \tag{14}$$

Um die Unsicherheit in der Bestimmung dieser Fehlermaße näherungsweise anzugeben, kann man die mittleren, durchschnittlichen oder wahrscheinlichen Grenzen der charakteristischen Fehlermaße in ähnlicher Weise ableiten, wie im § 30 mit den Fehlern direkter Beobachtungen verfahren wurde. So ergeben sich mit Hinweis auf § 18 als mittlere Grenzen für den

$$\text{mittleren Fehler } \mu = \sqrt{\frac{[rr]}{n-u}}\left(1 \pm \frac{0{\cdot}707}{\sqrt{n-u}}\right) \tag{15}$$

$$\text{durchschnittlichen Fehler } \vartheta = \frac{[r]}{\sqrt{n(n-u)}}\left(1 \pm \frac{0{\cdot}756}{\sqrt{n-u}}\right) \tag{16}$$

$$\text{wahrscheinlichen Fehler } \varrho = 0{\cdot}998\,\frac{[\sqrt{r}]^2}{n\sqrt{n(n-u)}}\left(1 \pm \frac{0{\cdot}855}{\sqrt{n-u}}\right), \tag{17}$$

woraus zu ersehen ist, daß auch bei vermittelnden Beobachtungen die Zuverlässigkeit in der Bestimmung der charakteristischen Fehler mit der Anzahl der überschüssigen Beobachtungen wächst.

§ 47. Genauigkeitsbestimmung der Unbekannten.

Liegen zur Bestimmung der u Unbekannten x, y, z die n Fehlergleichungen mit den Gesamtgewichten g vor:

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 x + b_1 y + c_1 z + l_1 = r_1, & \text{Gewicht } g_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + l_2 = r_2, & \quad " \quad g_2 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_n x + b_n y + c_n z + l_n = r_n, & \quad " \quad g_n \end{array}\right\} \tag{1}$$

und ist $f = \varphi\,(l_1, l_2, \ldots l_n)$ eine lineare Funktion der von einander unabhängig beobachteten n Größen $l_1, l_2, \ldots l_n$; bezeichnet man die partiellen Differentialquotienten der Funktion nach den einzelnen Beobachtungsgrößen der Reihe nach mit

$$\frac{\partial f}{\partial l_1} = q_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial l_2} = q_2, \; \ldots \; \frac{\partial f}{\partial l_n} = q_n$$

und sind die den beobachteten Größen anhaftenden mittleren Fehler:

$$\pm \mu_1 \qquad \pm \mu_2 \; \ldots \; \pm \mu_n,$$

sohin die ihnen zukommenden Gewichte:

$$g_1 = \frac{\mu_0^2}{\mu_1^2} \qquad g_2 = \frac{\mu_0^2}{\mu_2^2} \; \ldots \; g_n = \frac{\mu_0^2}{\mu_n^2},$$

wo $\mu_0^2 = \frac{[g\,r\,r]}{n-u}$ das mittlere Fehlerquadrat einer Beobachtung vom Gewichte 1, also μ_0 den mittleren Fehler der Gewichtseinheit bedeutet, so ist der mittlere Fehler der Funktion f nach dem Fehlerübertragungsgesetze:

$$\mu_f = \pm \sqrt{(q_1\,\mu_1)^2 + (q_2\,\mu_2)^2 + \cdots + (q_n\,\mu_n)^2} = \pm \sqrt{[q^2\,\mu^2]} = \pm\,\mu_0 \sqrt{\left[\frac{q\,q}{g}\right]}$$

und das reziproke Gewicht der Funktion:

$$\frac{1}{g_x} = \left[\frac{q\,q}{g}\right].$$

Mit der Erfüllung der Minimumsbedingung $[g\,v\,v] = min$ wird auch den Normalgleichungen Genüge geleistet, welche lauten:

$$\left.\begin{aligned} [g\,a\,a]\,x + [g\,a\,b]\,y + [g\,a\,c]\,z &= [g\,a\,l] \\ [g\,a\,b]\,x + [g\,b\,b]\,y + [g\,b\,c]\,z &= [g\,b\,l] \\ [g\,a\,c]\,x + [g\,b\,c]\,y + [g\,c\,c]\,z &= [g\,c\,l] \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Um den mittleren Fehler oder das Gewicht der ersten Unbekannten x angeben zu können, hat man den Anteil jeder der Beobachtungswerte l_1, l_2, . . . l_n an dieser Unbekannten zu bestimmen, d. h. man hat diese Unbekannte als Funktion der direkt beobachteten Elemente l darzustellen. Zu diesem Behufe multipliziere man die Normalgleichungen (2) der Reihe nach mit den vorläufig noch unbestimmten Koeffizienten k'_x, k''_x, k'''_x und summiere sie, wodurch man erhält:

$$\left.\begin{aligned} &\left\{[g\,a\,a]\,k'_x + [g\,a\,b]\,k''_x + [g\,a\,c]\,k'''_x\right\}x \\ +&\left\{[g\,a\,b]\,k'_x + [g\,b\,b]\,k''_x + [g\,b\,c]\,k'''_x\right\}y \\ +&\left\{[g\,a\,c]\,k'_x + [g\,b\,c]\,k''_x + [g\,c\,c]\,k'''_x\right\}z \\ -&\left\{[g\,a\,l]\,k'_x + [g\,b\,l]\,k''_x + [g\,c\,l]\,k'''_x\right\} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Hieraus ermittelt man die „Gewichtskoeffizienten" k (so genannt, weil sie — wie in der Folge gelehrt wird — die Gewichte der Unbekannten bestimmen), indem der Koeffizient von x der Einheit gleich gesetzt wird, die Koeffizienten von y und z aber gleich Null gesetzt werden. Man stellt also folgende „Gewichtsgleichungen für die Unbekannte x" auf, welche ebenso wie die Normalgleichungen gebaut sind und sich außer in der Bezeichnung der Unbekannten nur noch in den absoluten Gliedern von jenen unterscheiden:

$$\left.\begin{aligned} [g\,a\,a]\,k'_x + [g\,a\,b]\,k''_x + [g\,a\,c]\,k'''_x &= 1 \\ [g\,a\,b]\,k'_x + [g\,b\,b]\,k''_x + [g\,b\,c]\,k'''_x &= 0 \\ [g\,a\,c]\,k'_x + [g\,b\,c]\,k''_x + [g\,c\,c]\,k'''_x &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Denkt man sich hieraus die Gewichtskoeffizienten k'_x, k''_x, k'''_x berechnet, so erhält man aus (3) mit Berücksichtigung von (4) die sogenannte „unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen":

$$x = [g\,a\,l]\,k'_x + [g\,b\,l]\,k''_x + [g\,c\,l]\,k'''_x,$$

welche durch Auflösung der Summenausdrücke wie folgt umgeformt wird:

$$x = (a_1\,k'_x + b_1\,k''_x + c_1\,k'''_x)\,g_1\,l_1 + (a_2\,k'_x + b_2\,k''_x + c_2\,k'''_x)\,g_2\,l_2 + \cdots$$

Setzt man für die Ausdrücke in den Parenthesen, da hierin alle Glieder bekannt sind, zur Abkürzung der Reihe nach die Faktoren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, so erscheint x als eine lineare Funktion der direkt beobachteten Größen $l_1, l_2, l_3, \ldots$ übersichtlich dargestellt, nämlich:

$$x = \alpha_1 g_1 l_1 + \alpha_2 g_2 l_2 + \cdots = [\alpha g l].$$

Sohin ist, da $q_1 = \alpha_1 g_1$, $q_2 = \alpha_2 g_2, \ldots$ ist, der mittlere Fehler von x:

$$\mu_x = \pm \mu_0 \sqrt{\left[\frac{q q}{g}\right]} = \pm \mu_0 \sqrt{[g \alpha \alpha]} = \pm \sqrt{\frac{[g v v]}{n - u} [g \alpha \alpha]}.$$

Die Summe $[g \alpha \alpha]$ wird direkt in folgender Weise erhalten: Multipliziert man die Ausdrücke für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ der Reihe nach mit $g_1 \alpha_1$, $g_2 \alpha_2$, $g_3 \alpha_3$, und bildet die Summe davon, so erhält man zunächst:

$$[g \alpha \alpha] = [g a \alpha] k_x + [g b \alpha] k'_x + [g c \alpha] k''_x. \tag{5}$$

Multipliziert man dieselben Ausdrücke der Reihe nach mit den ihnen zukommenden $g a$, $g b$, $g c$ und addiert jedesmal, so ergeben sich mit Hinweis auf (4) die Beziehungen:

$$[g a \alpha] = 1, \quad [g b \alpha] = 0, \quad [g c \alpha] = 0; \tag{6}$$

folglich erhält man durch Substitution von (6) in (5):

$$[g \alpha \alpha] = k_x$$

$$\mu_x = \pm \mu_0 \sqrt{k_x} \qquad\qquad g_x = \frac{\mu_0^2}{\mu_x^2} = \frac{1}{k_x}.$$

Analog ergeben sich auch die mittleren Fehler und Gewichte der übrigen Unbekannten y, z. In übersichtlicher Zusammenstellung hat man daher für drei Unbekannte:

1.) Das System der Gewichtskoeffizienten aus den drei Gruppen von Gewichtsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [g a a] k_x + [g a b] k'_x + [g a c] k''_x &= 1 \\ [g a b] k_x + [g b b] k'_x + [g b c] k''_x &= 0 \\ [g a c] k_x + [g b c] k'_x + [g c c] k''_x &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} [g a a] k_y + [g a b] k'_y + [g a c] k''_y &= 0 \\ [g a b] k_y + [g b b] k'_y + [g b c] k''_y &= 1 \\ [g a c] k_y + [g b c] k'_y + [g c c] k''_y &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} [g a a] k_z + [g a b] k'_z + [g a c] k''_z &= 0 \\ [g a b] k_z + [g b b] k'_z + [g b c] k''_z &= 0 \\ [g a c] k_z + [g b c] k'_z + [g c c] k''_z &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

2.) Die Darstellung der Unbekannten als lineare Funktionen der Beobachtungen:

$$x = [\alpha g l], \qquad y = [\beta g l], \qquad z = [\gamma g l],$$

worin die Faktoren α, β, γ wie folgt bestimmt sind:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = a_1 k'_x + b_1 k''_x + c_1 k'''_x \\ \alpha_2 = a_2 k'_x + b_2 k''_x + c_2 k'''_x \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right| \qquad (10)$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1 = a_1 k'_y + b_1 k''_y + c_1 k'''_y \\ \beta_2 = a_2 k'_y + b_2 k''_y + c_2 k'''_y \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right| \qquad (11)$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1 = a_1 k'_z + b_1 k''_z + c_1 k'''_z \\ \gamma_2 = a_2 k'_z + b_2 k''_z + c_2 k'''_z \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right| \qquad (12)$$

3.) Die mittleren Fehler der Unbekannten:

$$\left.\begin{array}{l} \mu_x = \mu_0 \sqrt{[g\alpha\alpha]} = \mu_0 \sqrt{k'_x} \\ \mu_y = \mu_0 \sqrt{[g\beta\beta]} = \mu_0 \sqrt{k''_y} \\ \mu_z = \mu_0 \sqrt{[g\gamma\gamma]} = \mu_0 \sqrt{k'''_z} \end{array}\right| \qquad (13)$$

4.) Die Gewichte der Unbekannten:

$$\left.\begin{array}{l} g_x = \dfrac{1}{[g\alpha\alpha]} = \dfrac{1}{k'_x} \\ g_y = \dfrac{1}{[g\beta\beta]} = \dfrac{1}{k''_y} \\ g_z = \dfrac{1}{[g\gamma\gamma]} = \dfrac{1}{k'''_z} \end{array}\right| \qquad (14)$$

5.) Die Genauigkeitsmaße der Unbekannten, wenn h das Genauigkeitsmaß der Gewichtseinheit darstellt:

$$\left.\begin{array}{l} h_x = \dfrac{h}{\sqrt{[g\alpha\alpha]}} = \dfrac{h}{\sqrt{k'_x}} \\ h_y = \dfrac{h}{\sqrt{[g\beta\beta]}} = \dfrac{h}{\sqrt{k''_y}} \\ h_z = \dfrac{h}{\sqrt{[g\gamma\gamma]}} = \dfrac{h}{\sqrt{k'''_z}} \end{array}\right| \qquad (15)$$

Die Auflösung der Normalgleichungen nach den gewöhnlichen Regeln der Algebra ist nur dann bequem, wenn nur wenige Unbe-

kannte vorhanden und die Koeffizienten der Gleichungen runde oder geringzifferige Zahlen sind. Ist dies jedoch nicht der Fall, so erscheint es einfacher, sich des Gaußschen Eliminationsverfahrens zu bedienen, wie es im § 44 für vier Unbekannte durchgeführt worden ist. In ähnlicher Weise können auch nach Hansens Vorschlag (1831) die Gewichtsgleichungen aufgelöst werden. Man erhält so unter Anwendung des Eliminationsverfahrens zuerst immer das Gewicht derjenigen Unbekannten, der in den Gewichtsgleichungen der letzte Platz angewiesen ist, und hierauf die Gewichte der übrigen Unbekannten durch schrittweises Rückwärtseinsetzen der bereits ermittelten Gewichte. Encke (1834) hat durch Umstellungen in den Gewichtsgleichungen die direkte Berechnung aller Gewichte ermöglicht. Wird nämlich eine zyklische Vertauschung der Gleichungen und zugleich eine entsprechende Veränderung in der Reihenfolge der Unbekannten vorgenommen, so ergeben sich für drei Unbekannte folgende drei Gruppen von reduzierten Gewichtsgleichungen:

$$k''_x - \frac{[g\,b\,c]}{[g\,b\,b]}\,k'''_x + \frac{[g\,a\,b]}{[g\,b\,b]}\,k_x = 0$$

$$k'''_x + \frac{[g\,a\,c\,.\,1]}{[g\,c\,c\,.\,1]}\,k'_x = 0$$

$$k'_x = \frac{1}{[g\,a\,a\,.\,2]}$$

$$k'''_y - \frac{[g\,a\,c]}{[g\,c\,c]}\,k'_y - \frac{[g\,b\,c]}{[g\,c\,c]}\,k''_y = 0$$

$$k'_y + \frac{[g\,a\,b\,.\,1]}{[g\,a\,a\,.\,1]}\,k''_y = 0$$

$$k''_y = \frac{1}{[g\,b\,b\,.\,2]}$$

$$k'_z - \frac{[g\,a\,b]}{[g\,a\,a]}\,k''_z - \frac{[g\,a\,c]}{[g\,a\,a]}\,k'''_z = 0$$

$$k''_z + \frac{[g\,b\,c\,.\,1]}{[g\,b\,b\,.\,1]}\,k'''_z = 0$$

$$k'''_z = \frac{1}{[g\,c\,c\,.\,2]}\,.$$

Aus den letzten Gleichungen einer jeden Gruppe resultieren direkt die reziproken Gewichte der drei Unbekannten, so daß man hat:

$$\left.\begin{aligned} g_x &= [g\,a\,a\,.\,2] = 1 : [g\,\alpha\,\alpha] \\ g_y &= [g\,b\,b\,.\,2] = 1 : [g\,\beta\,\beta] \\ g_z &= [g\,c\,c\,.\,2] = 1 : [g\,\gamma\,\gamma] \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Indessen wird durch dieses „kunstlose" Verfahren — wie Gauß (1821) sich ausdrückt — mit Bezug auf Kürze der Rechnung nichts gewonnen, und verdient daher vom Standpunkte des praktischen Rechners die **Hansensche** Methode den Vorzug.

Wirft man einen Blick auf die Gleichungen (10) des § 44 zurück, die man sich für ungleiche Gewichte und für drei Unbekannte geschrieben denken mag, so erkennt man, daß bei Auflösung der Normalgleichungen nach dem Eliminationsverfahren in den letzten Gleichungen, welche immer nur eine Unbekannte enthalten, **der Nenner des für diese Unbekannte erhaltenen Bruches zugleich das Gewicht der Unbekannten angibt.**

Die Gewichtsgleichungen enthalten neben den Koeffizienten k'_x, k''_y, k'''_z, welche die Gewichte bestimmen, auch noch andere Koeffizienten, die zur Gewichtsbestimmung der Unbekannten nicht benötigt werden, worunter jedoch die als Rechenprobe dienlichen Beziehungen bestehen:

$$k''_x = k'_y, \qquad k'''_x = k'_z, \qquad k'''_y = k''_z.$$

Um dies zu beweisen, möge gezeigt werden, daß z. B. $k''_x = k'_y$ ist. Multipliziert man die Gleichungen (7), worin der Einfachheit wegen $g = 1$ gesetzt werden möge, der Reihe nach mit k'_y, k''_y, k'''_y und addiert sie, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&([a\,a]\,k'_x + [a\,b]\,k''_x + [a\,c]\,k'''_x)\,k'_y + \\
&+ ([a\,b]\,k'_x + [b\,b]\,k''_x + [b\,c]\,k'''_x)\,k''_y + \\
&+ ([a\,c]\,k'_x + [b\,c]\,k''_x + [c\,c]\,k'''_x)\,k'''_y = k'_y,
\end{aligned}$$

welche Summe durch Umstellung auch so geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}
&([a\,a]\,k'_y + [a\,b]\,k''_y + [a\,c]\,k'''_y)\,k'_x + \\
&+ ([a\,b]\,k'_y + [b\,b]\,k''_y + [b\,c]\,k'''_y)\,k''_x + \\
&+ ([a\,c]\,k'_y + [b\,c]\,k''_y + [c\,c]\,k'''_y)\,k'''_x = k'_y.
\end{aligned}$$

Nun ist aber mit Bezug auf (8) der erste und dritte Klammerausdruck gleich Null, der mittlere Klammerausdruck gleich Eins, folglich ist

$$k''_x = k'_y,$$

und analog auch $\qquad k'''_x = k'_z$ und $k'''_y = k''_z$.

Multipliziert man die Gleichungen (10) mit den korrespondierenden Koeffizienten β_1, β_2, . . . und addiert sie, so erhält man

$$[\alpha\,\beta] = [a\,\beta]\,k'_x + [b\,\beta]\,k''_x + [c\,\beta]\,k'''_x$$

oder mit Rücksicht auf die den Relationen (6) entsprechenden Beziehungen:

$$[a\,\beta] = 0, \qquad [b\,\beta] = 1, \qquad [c\,\beta] = 0:$$

$$[\alpha\beta] = k'_2 = k''_1$$

und analog:

$$[\alpha\gamma] = k'_3 = k'''_1$$

$$[\beta\gamma] = k''_3 = k'''_2.$$

Um die Beziehungen zwischen den Gewichtskoeffizienten $k'_1 = [\alpha\alpha]$, $k'_2 = k''_1 = [\alpha\beta]$, $k''_2 = [\beta\beta]$ und den Normalgleichungskoeffizienten $[aa]$, $[ab]$, $[bb]$ für zwei Unbekannte und gleiche Gewichte direkt aufzustellen, wie sie zum Teil schon aus der Vergleichung der Gruppe (14) mit (16) hervorgehen, vergleiche man die Darstellung der Unbekannten x, y als lineare Funktionen der Beobachtungen nach § 47, *ad* 2):

$$x = [\alpha l] = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots$$

$$y = [\beta l] = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \cdots$$

mit den Auflösungen der Normalgleichungen nach § 44, Gleichung (10):

$$x = \frac{[a\,l.1]}{[a\,a.1]} \qquad y = \frac{[b\,l.1]}{[b\,b.1]}.$$

Entwickelt man zunächst den Zähler des Ausdruckes für x, so wird:

$$[a\,l.1] = [a\,l] - \frac{[a\,b]}{[b\,b]}[b\,l] = a_1 l_1 + a_2 l_2 + \cdots - \frac{[a\,b]}{[b\,b]}(b_1 l_1 + b_2 l_2 + \cdots)$$

und

$$x = \frac{1}{[a\,a.1]}\left\{\left(a_1 - \frac{[a\,b]}{[b\,b]}b_1\right)l_1 + \left(a_2 - \frac{[a\,b]}{[b\,b]}b_2\right)l_2 + \cdots\right\}.$$

Die oben ausgesprochene Vergleichung der Koeffizienten von l gibt:

$$\alpha_1 = \frac{1}{[a\,a.1]}\left(a_1 - \frac{[a\,b]}{[b\,b]}b_1\right), \qquad \alpha_2 = \frac{1}{[a\,a.1]}\left(a_2 - \frac{[a\,b]}{[b\,b]}b_2\right) \text{ usw.}$$

Geht man analog mit der zweiten Unbekannten y vor, so erhält man:

$$\beta_1 = \frac{1}{[b\,b.1]}\left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\right), \qquad \beta_2 = \frac{1}{[b\,b.1]}\left(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2\right) \text{ usw.}$$

Bildet man die Summe der Quadrate beziehungsweise Produkte dieser Ausdrücke, so bekommt man schließlich:

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{[a\,a.1]^2}\left\{[a\,a] - \frac{2[a\,b]}{[b\,b]}[a\,b] + \frac{[a\,b]^2}{[b\,b]^2}[b\,b]\right\} =$$

$$= \frac{1}{[a\,a.1]^2}\left([a\,a] - \frac{[a\,b]}{[b\,b]}[a\,b]\right)$$

$$\left.\begin{aligned} [\alpha\alpha] &= \frac{1}{[a\,a.1]} = \frac{[b\,b]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \\ [\beta\beta] &= \frac{1}{[b\,b.1]} = \frac{[a\,a]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \\ [\alpha\beta] &= \frac{1}{[a\,b.1]} = \frac{-[a\,b]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Da in den Ausdrücken (13) für die mittleren Fehler die Koeffizienten k bei vorliegenden Beobachtungen konstante Größen sind, die Unbekannten aber so bestimmt wurden, daß der zweite Faktor in den Ausdrücken für die mittleren Fehler, nämlich $\mu_0 = \sqrt{\frac{[g v v]}{n - u}}$, zu einem Minimum wird, so sieht man, daß das Prinzip der kleinsten Summen nicht nur den Beobachtungen, sondern auch den Unbekannten in ihrer Gesamtheit die kleinsten mittleren Fehler zuteilt.

§ 48. Ausgleichung nach dem Prinzip der größten Gewichte.

Nach dem im vorigen Paragraphe der Bestimmung der mittleren Fehler zu Grunde gelegten Ausgleichungsprinzip erscheinen die Beobachtungen so ausgeglichen, daß die Summe der mit den Beobachtungsgewichten multiplizierten Quadrate der übrigbleibenden Widersprüche und damit auch die mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen und der berechneten Unbekannten zu einem Minimum werden. Damit ist aber noch nicht dargetan, daß durch die Ausgleichung nach dem Prinzip der kleinsten Summen auch die Gewichte der Unbekannten am größten werden, da aus den Ansätzen für die Gewichte der zu einem Minimum gemachte mittlere Fehler der Gewichtseinheit durch Kürzung hinausgefallen ist. Es bietet sich nun die Frage dar, wie die Unbekannten zu berechnen sind, damit die Gewichte derselben den möglich größten Wert erlangen. Offenbar so, daß die Summen

$$[g \alpha \alpha], \qquad [g \beta \beta], \qquad [g \gamma \gamma],$$

welche den Gewichtsreziproken gerade proportional sind, je für sich Minima werden.

Ausgehend von den wahren Werten der Unbekannten X, Y, Z setzen wir die Gleichungen für die wahren Fehler an:

$$\begin{array}{ll} a_1 X + b_1 Y + c_1 Z - l_1 = \varepsilon_1, & \text{Anzahl } g_1 \\ a_2 X + b_2 Y + c_2 Z - l_2 = \varepsilon_2, & \quad " \quad g_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_n X + b_n Y + c_n Z - l_n = \varepsilon_n & \quad " \quad g_n. \end{array}$$

Führen wir die Untersuchung zunächst für die Unbekannte X durch, so multiplizieren wir diese Fehlergleichungen der Reihe nach mit den vorläufig noch unbestimmt gelassenen Multiplikatoren α_1, α_2, α_3, . . . und addieren sie unter Berücksichtigung ihrer „Anzahl", so daß wir die Summengleichung erhalten:

$$[g a \alpha] X + [g b \alpha] Y + [g c \alpha] Z - [g l \alpha] = [g \varepsilon \alpha]. \quad (1)$$

Um die darin vorkommenden Multiplikatoren α so zu bestimmen, daß X eine lineare Funktion aller l werde, müssen hiefür solche Werte aufgesucht werden, welche die Glieder mit Y und Z zum Verschwinden bringen und den Koeffizienten von X zur Einheit machen. Unterwirft man daher die Multiplikatoren den Bedingungsgleichungen:

$$[g\,a\,\alpha] - 1 = 0, \qquad [g\,b\,\alpha] = 0, \qquad [g\,c\,\alpha] = 0. \qquad (2)$$

so reduziert sich die Summengleichung (1) auf die einfache Form:

$$X - [g\,l\,\alpha] = [g\,\varepsilon\,\alpha].$$

Wird hierin das Fehlerglied $[g\,\varepsilon\,\alpha] = 0$ gesetzt, so geht der wahre Wert X in den Näherungswert x über, welcher als eine lineare Funktion der direkten Beobachtungen ausgedrückt erscheint, nämlich:

$$x = [\alpha\,g\,l] = \alpha_1\,g_1\,l_1 + \alpha_2\,g_2\,l_2 + \cdots$$

Es wird nun offenbar derjenige Wert von x der beste sein, dessen mittlerer Fehler von der Form $\mu_x = \mu_0 \sqrt{[g\,\alpha\,\alpha]}$ ein Minimum ist. Damit nun μ_x ein Minimum werde, müssen, da jetzt μ_0 bei gegebenen Beobachtungen als eine unveränderliche Größe anzunehmen ist, die Multiplikatoren so gewählt werden, daß $[g\,\alpha\,\alpha] = min$ wird. Um dieser Bedingung zu genügen, geht man nach Lagrange so vor, daß man zunächst die der Reihe nach mit den Korrelaten $-2\,k'_x$, $-2\,k''_x$, $-2\,k'''_x$ multiplizierten Bedingungsgleichungen (2) zu der aufgelösten Summe $[g\,\alpha\,\alpha]$ hinzufügt, wodurch an der Summe $[g\,\alpha\,\alpha]$ offenbar nichts geändert wird, so daß man hat:

$$[g\,\alpha\,\alpha] = g_1\,\alpha_1^2 + g_2\,\alpha_2^2 + \cdots - 2\,k'_x\,([g\,a\,\alpha] - 1) - 2\,k''_x\,[g\,b\,\alpha] - \\ - 2\,k'''_x\,[g\,c\,\alpha] = min.$$

Durch Nullsetzen der nach allen α genommenen partiellen Differentialquotienten und Kürzung um die Konstanten g erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1\,k'_x + b_1\,k''_x + c_1\,k'''_x \\ \alpha_2 &= a_2\,k'_x + b_2\,k''_x + c_2\,k'''_x \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n &= a_n\,k'_x + b_n\,k''_x + c_n\,k'''_x \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

und durch Substituierung dieser Ausdrücke in (2) die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [g\,a\,a]\,k'_x + [g\,a\,b]\,k''_x + [g\,a\,c]\,k'''_x &= 1 \\ [g\,a\,b]\,k'_x + [g\,b\,b]\,k''_x + [g\,b\,c]\,k'''_x &= 0 \\ [g\,a\,c]\,k'_x + [g\,b\,c]\,k''_x + [g\,c\,c]\,k'''_x &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

womit die Korrelaten k und weiters die Multiplikatoren α, sowie die Summe $[g\,\alpha\,\alpha]$ berechnet werden können. Durch die Erfüllung der

Minimumsbedingung $[g\varepsilon\varepsilon] = min$ hat die Unbekannte x die geringste Abweichung von der Wahrheit oder das größte Gewicht erhalten, was in analoger Weise auch von den übrigen Elementen y, z nachgewiesen werden kann.

Vergleicht man nun die Multiplikatoren α und die Korrelaten k des § 48 mit den Faktoren α und den Koeffizienten k des § 47, so ergibt sich aus der Identität der voneinander unabhängig eingeführten Zahlengrößen die Tatsache, daß der hier eingeschlagene Vorgang bei der Ausgleichung von beobachteten Elementen mit den Vorschriften der Methode der kleinsten Quadrate vollkommen übereinstimmt. Man ist daher zu dem Schlusse berechtigt:

„Diejenigen Werte der Unbekannten, die aus einer Kombination der Beobachtungen hervorgehen, welche die Summen $[g\alpha\alpha]$, $[g\beta\beta]$, $[g\gamma\gamma]$ zu einem Minimum machen, sind mit denjenigen Werten identisch, welche die Summe $[gvv]$ auf ein kleinstes Maß bringen."

Oder:

„Das Ausgleichungsverfahren, welches die Unbekannten so bestimmt, daß die Summe der mit den Beobachtungsgewichten multiplizierten Quadrate der übrigbleibenden Widersprüche ein Minimum wird, ist identisch mit jenem Ausgleichungsverfahren, welches den Resultaten die kleinsten mittleren Fehler oder die größten Gewichte zuteilt."

§ 49. Zusammenhang zwischen direkten und vermittelnden Beobachtungen.

Für den Fall, daß nur eine Unbekannte x zu bestimmen ist, bestehen die Fehlergleichungen:

$$\begin{array}{ll} a_1 x - l_1 = v_1 & \text{mit dem Gewicht } g_1 \\ a_2 x - l_2 = v_2 & \text{„ \quad „ \quad „ } g_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_n x - l_n = v_n & \text{„ \quad „ \quad „ } g_n \end{array}$$

und es lautet die einzige Normalgleichung:

$$[gaa]\, x = [gal],$$

sohin ist das Resultat:

$$x = \frac{[gal]}{[gaa]}.$$

Im Sinne der Theorie der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen geht aus der einzigen Gewichtsgleichung

$$[gaa]\, k_x = 1$$

das Gewicht von x hervor: $g_x = \frac{1}{k_x} = [g\,a\,a]$.

Da der mittlere Fehler der Gewichtsheit $\mu_0 = \sqrt{\frac{[g\,v\,v]}{n-1}}$ ist, so ist der mittlere Fehler von x:

$$\mu_x = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_x}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{[g\,a\,a]}} = \sqrt{\frac{[g\,v\,v]}{[g\,a\,a]\,(n-1)}}.$$

Für gleich genaue Beobachtungen ist das Resultat $x = \frac{[a\,l]}{[a\,a]}$ mit dem Gewichte $g_x = [a\,a]$ und dem mittleren Fehler

$$\mu_x = \sqrt{\frac{[v\,v]}{[a\,a]\,(n-1)}}.$$

Für den speziellen Fall, daß sämtliche Koeffizienten a der Einheit gleich sind, bestehen die Fehlergleichungen:

$$\begin{array}{llll} x - l_1 = v_1 & \text{mit dem Gewicht} & g_1 \\ x - l_2 = v_2 & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & g_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ x - l_n = v_n & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & g_n. \end{array}$$

Die Normalgleichung heißt: $[g]\,x = [g\,l]$ und die Gewichtsgleichung: $[g]\,k_x = 1$; somit ist das wahrscheinlichste Resultat

$$x = \frac{[g\,l]}{[g]}$$

gleich dem allgemeinen arithmetischen Mittel mit dem Gewichte

$$g_x = \frac{1}{k_x} = [g]$$

und dem mittleren Fehler $\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{[g]}} = \sqrt{\frac{[g\,v\,v]}{[g]\,(n-1)}}$.

Sind alle Gewichte gleich, so ist der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten $x = \frac{[l]}{n}$ gleich dem einfachen arithmetischen Mittel mit dem Gewichte $g_x = n$ und dem mittleren Fehler

$$\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n\,(n-1)}}.$$

Man sieht also, daß das Problem der Ausgleichung direkter Beobachtungen der Form nach als ein spezieller Fall der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen aufgefaßt werden kann.

§ 50. Genauigkeitsbestimmung der ausgeglichenen Beobachtungen.

Liegen n Fehlergleichungen vermittelnder Beobachtungen mit u Unbekannten vor, wovon die i-te allgemein wie folgt lautet:

$$a_i x + b_i y + c_i z + \cdots - l_i = v_i, \quad \text{Gewicht } g_i,$$

so erhält man den mittleren Fehler der i-ten Beobachtung vor der Ausgleichung nach der Formel: $\mu_i = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_i}}$, wo $\mu_0 = \sqrt{\frac{[g v v]}{n - u}}$ den mittleren Fehler der Gewichtseinheit bedeutet. Um den mittleren Fehler der Beobachtungen nach der Ausgleichung zu bestimmen, muß man die Unbekannten in einer linearen Funktion der Beobachtungen ausdrücken, also wie im § 47, ad 2 in die Form kleiden:

$$x = \alpha_1 g_1 l_1 + \alpha_2 g_2 l_2 + \cdots = [\alpha g l]$$
$$y = \beta_1 g_1 l_1 + \beta_2 g_2 l_2 + \cdots = [\beta g l]$$
$$z = \gamma_1 g_1 l_1 + \gamma_2 g_2 l_2 + \cdots = [\gamma g l].$$

Setzt man diese Werte in die Fehlergleichungen ein, so erhält man:

$$l_i + v_i = (a_i \alpha_1 + b_i \beta_1 + c_i \gamma_1) g_1 l_1 +$$
$$+ (a_i \alpha_2 + b_i \beta_2 + c_i \gamma_2) g_2 l_2 +$$
$$+ (a_i \alpha_3 + b_i \beta_3 + c_i \gamma_3) g_3 l_3 + \cdots$$

oder übersichtlicher:

$$l_i + v_i = A_1 l_1 + A_2 l_2 + A_3 l_3 + \cdots$$

Sind nun $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ die mittleren Fehler der ursprünglichen, unausgeglichenen Beobachtungen $l_1, l_2, l_3, \ldots$, so ist nach dem Fehlerübertragungsgesetze, Gl. (8), S. 94, der mittlere Fehler M_i der ausgeglichenen Beobachtung $l_i + v_i$:

$$M_i = \sqrt{A_1^2 \mu_1^2 + A_2^2 \mu_2^2 + \cdots} = \sqrt{[A^2 \mu^2]}.$$

Nun ist $A_1^2 \mu_1^2 = (a_i \alpha_1 + b_i \beta_1 + c_i \gamma_1)^2 g_1^2 \mu_1^2$ oder, wenn hierin für $g_1 = \frac{\mu_0^2}{\mu_1^2}$ eingeführt wird:

$$A_1^2 \mu_1^2 = (a_i \alpha_1 + b_i \beta_1 + c_i \gamma_1)^2 g_1 \mu_0^2$$

und analog:

$$A_2^2 \mu_2^2 = (a_i \alpha_2 + b_i \beta_2 + c_i \gamma_2)^2 g_2 \mu_0^2$$
$$A_3^2 \mu_3^2 = (a_i \alpha_3 + b_i \beta_3 + c_i \gamma_3)^2 g_3 \mu_0^2 \text{ usw.}$$

Folglich ist:

$$M_i^2 = [(a_i \alpha + b_i \beta + c_i \gamma)^2 g] \, \mu_0^2$$

und das reziproke Gewicht der i-ten Beobachtung nach der Ausgleichung mit Rücksicht auf die Definitionsgleichung $M_i^2 = \frac{\mu_0^2}{G_i}$:

$$\frac{1}{G_i} = [(a_i\alpha + b_i\beta + c_i\gamma)^2 g].$$

Wird die Quadrierung ausgeführt, so ergibt sich:

$$\frac{1}{G_i} = a_i^2\,[g\,\alpha\,\alpha] + 2\,a_i b_i\,[g\,\alpha\,\beta] + b_i^2\,[g\,\beta\,\beta] +$$
$$+ 2\,a_i c_i\,[g\,\alpha\,\gamma] + 2\,b_i c_i\,[g\,\beta\,\gamma] + c_i^2\,[g\,\gamma\,\gamma].$$

Nun führen wir für die hier enthaltenen Summen die im § 47 ermittelten Größen ein, nämlich:

$$\begin{array}{lll} [g\,\alpha\,\alpha] = k'_x & [g\,\alpha\,\beta] = k''_x & [g\,\alpha\,\gamma] = k'''_x \\ [g\,\alpha\,\beta] = k'_y & [g\,\beta\,\beta] = k''_y & [g\,\beta\,\gamma] = k'''_y \\ [g\,\alpha\,\gamma] = k'_z & [g\,\beta\,\gamma] = k''_z & [g\,\gamma\,\gamma] = k'''_z. \end{array}$$

Damit erhält man, wenn die gemeinsamen Faktoren gleichzeitig herausgehoben werden:

$$\frac{1}{G_i} = (a_i k'_x + b_i k''_x + c_i k'''_x)\,a_i + (a_i k'_y + b_i k''_y + c_i k'''_y)\,b_i +$$
$$+ (a_i k'_z + b_i k''_z + c_i k'''_z)\,c_i.$$

Es sind aber die Klammerausdrücke nach den Gleichungen (10), (11) und (12) des § 47 nichts anderes, als die Faktoren α_i, β_i, γ_i, folglich kann man auch schreiben:

$$\frac{1}{G_i} = a_i\,\alpha_i + b_i\,\beta_i + c_i\,\gamma_i; \qquad (1)$$

der mittlere Fehler der i-ten Beobachtung nach der Ausgleichung ist demnach:

$$M_i = \mu_0 \sqrt{a_i\,\alpha_i + b_i\,\beta_i + c_i\,\gamma_i}. \qquad (2)$$

Hiezu ist folgende Bemerkung zu machen: Die Koeffizienten α_i, β_i, γ_i richten ihr Vorzeichen stets nach den korrespondierenden Koeffizienten a_i, b_i, c_i; daher erscheinen die Produkte $a_i\alpha_i$, $b_i\beta_i$, $c_i\gamma_i$ und die Summe dieser Produkte stets p o s i t i v, und da diese Summe mal g_i immer kleiner als 1 bleibt (vergl. S. 191), so muß sich der mittlere Fehler M_i nach der Ausgleichung stets kleiner als der mittlere Fehler μ_i vor der Ausgleichung ergeben, denn es ist, wie aus der Vergleichung der Formeln für M_i und μ_i hervorgeht:

$$M_i = \mu_i \sqrt{g_i\,(a_i\,\alpha_i + b_i\,\beta_i + c_i\,\gamma_i)}.$$

Spezielle Fälle.

a) Für den Fall, daß nur e i n e Unbekannte x vorkommt, d. i. bei Ausgleichungen von Beobachtungen, welche Vielfache einer Unbekannten sind, also für $a_i x - l_i = v_i$ mit dem Gewichte g_i ist

$$\frac{1}{G_i} = a_i\,\alpha_i = a_i\,a_i\,k_x = \frac{a_i^2}{[g\,a\,a]}$$

und der mittlere Fehler nach der Ausgleichung:

$$M_i = \frac{\mu_0\,a_i}{\sqrt{[g\,a\,a]}} \tag{3}$$

gegenüber dem mittleren Fehler vor der Ausgleichung: $\mu_i = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_i}}$.

Da der mittlere Fehler der Unbekannten x gleich ist:

$$\mu_x = \frac{\mu_0}{\sqrt{[g\,a\,a]}},$$

so besteht auch die Beziehung:

$$M_i = a_i\,\mu_x. \tag{4}$$

b) Für den Fall des arithmetischen Mittels sind sämtliche a der Einheit gleich, somit lauten die Formeln für das allgemeine arithmetische Mittel:

$$\frac{1}{G_i} = \alpha_i = k = \frac{1}{[g]}, \quad M_i = \frac{\mu_0}{\sqrt{[g]}} = \mu_x$$

und für das einfache arithmetische Mittel:

$$\frac{1}{G_i} = \frac{1}{n}, \quad M_i = \frac{\mu_0}{\sqrt{n}} = \mu_x,$$

d. h. die einzelnen Beobachtungen haben nach der Ausgleichung die Genauigkeit des arithmetischen Mittels, was eigentlich selbstverständlich ist, da das arithmetische Mittel der Beobachtungen die ausgeglichenen Beobachtungen darstellt.

Vergleicht man die Formeln für die mittleren Fehler vor und nach der Ausgleichung, so erkennt man, daß die mittleren Fehler durch den Ausgleichungsprozeß eine Verminderung erfahren, daß also die einzelnen Beobachtungen durch Anbringung der „Verbesserungen" tatsächlich an Genauigkeit gewonnen haben. Wir wollen diesen Satz für den Spezialfall *a)* ausführlich beweisen. Wenn dieser Satz richtig ist, so muß stets M_i kleiner als μ_i ausfallen, es muß also die Ungleichung bestehen:

$$M_i = \frac{\mu_0\,a_i}{\sqrt{[g\,a\,a]}} < \frac{\mu_0}{\sqrt{g_i}} = \mu_i$$

oder:

$$g_i\,a_i^2 < [g\,a\,a].$$

Da $g_i\,a_i^2$ nur einen Teil von $[g\,a^2]$ bildet, so findet diese Ungleichung tatsächlich immer statt.

Beispiel:

$$
\begin{array}{rrr}
\underline{a\,x - l = 0} & & \\
3\,x - 30 = 0 & a\,a = 9 & a\,l = 90 \\
2\,x - 21 = 0 & 4 & 42 \\
0{\cdot}5\,x - 4{\cdot}8 = 0 & \underline{0{\cdot}25} & \underline{2{\cdot}4} \\
 & [a\,a] = 13{\cdot}25 & [a\,l] = 134{\cdot}4
\end{array}
$$

$$x = 134{\cdot}4 : 13{\cdot}25 = 10{\cdot}14$$

$$
\begin{array}{rr}
v = -0{\cdot}42 & v\,v = 0{\cdot}1764 \\
-0{\cdot}72 & 0{\cdot}5184 \\
+0{\cdot}27 & \underline{0{\cdot}0729} \\
 & [v\,v] = 0{\cdot}7679
\end{array}
$$

mittlerer Fehler einer ursprünglichen Beobachtung:

$$\mu = \sqrt{\frac{0{\cdot}7677}{2}} = 0{\cdot}62,$$

mittlerer Fehler der Unbekannten x: $\mu_x = \frac{0{\cdot}62}{\sqrt{13{\cdot}25}} = 0{\cdot}17,$

mittlere Fehler der ausgeglichenen Beobachtungen:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= 0{\cdot}17\,.\,3 \quad = 0{\cdot}51 \\
M_2 &= 0{\cdot}17\,.\,2 \quad = 0{\cdot}34 \\
M_3 &= 0{\cdot}17\,.\,0{\cdot}5 = 0{\cdot}09.
\end{aligned}
$$

§ 51. Genauigkeitsbestimmung einer Funktion der Unbekannten.

Die Problemstellung ist folgende: Aus den bekannten mittleren Fehlern μ_x, μ_y der durch Ausgleichung hervorgegangenen Unbekannten x, y soll der mittlere Fehler M_F einer linearen Funktion der Unbekannten bestimmt werden. Ist die Funktion in Bezug auf die Unbekannten nicht linear, so kann sie unter Einführung von Näherungswerten durch Entwicklung nach der Taylorschen Reihe immer linear gemacht werden. Die Funktion habe also die Form:

$$F = f_1\,x + f_2\,y. \tag{1}$$

Der Problemstellung zufolge sind sowohl die x, y als auch die μ_x, μ_y voneinander nicht unabhängig, indem die Unbekannten mit den vermittelnden Beobachtungen $l_1, l_2, l_3, \ldots$ durch folgende Gleichungen zusammenhängen:

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= \alpha_1\,g_1\,l_1 + \alpha_2\,g_2\,l_2 + \cdots = [\alpha\,g\,l] \\
y &= \beta_1\,g_1\,l_1 + \beta_2\,g_2\,l_2 + \cdots = [\beta\,g\,l].
\end{aligned}
\right\} \tag{2}
$$

Man darf daher in diesem Falle das Fehlerübertragungsgesetz, welches unabhängige Argumente voraussetzt, nicht ohne weiteres anwenden und nicht etwa die Formel

$$M_F^2 = (f_1 \mu_x)^2 + (f_2 \mu_y)^2 \tag{3}$$

direkt gebrauchen, sondern man hat zunächst in (1) die Werte von (2) einzusetzen, damit F eine lineare Funktion der voneinander unabhängigen Beobachtungen werde. Es ist also zu setzen:

$$\begin{aligned} F = f_1 [\alpha g l] + f_2 [\beta g l] = (f_1 \alpha_1 &+ f_2 \beta_1) g_1 l_1 + \\ (f_1 \alpha_2 &+ f_2 \beta_2) g_2 l_2 + \\ + (f_1 \alpha_3 &+ f_2 \beta_3) g_3 l_3 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nunmehr kann das Fehlerübertragungsgesetz anstandslos in Anwendung kommen. Sind

$$\mu_1 = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_1}}, \qquad \mu_2 = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_2}}, \qquad \mu_3 = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_3}}, \quad \ldots$$

die mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen, so ergibt sich der mittlere Fehler der Funktion aus

$$\begin{aligned} M_F^2 &= (f_1 \alpha_1 + f_2 \beta_1)^2 g_1^2 \frac{\mu_0^2}{g_1} + (f_1 \alpha_2 + f_2 \beta_2)^2 g_2^2 \frac{\mu_0^2}{g_2} + \cdots = \\ &= \mu_0^2 \left| \begin{aligned} &(f_1^2 \alpha_1^2 + 2 f_1 f_2 \alpha_1 \beta_1 + f_2^2 \beta_1^2) g_1 + \\ &+ (f_1^2 \alpha_2^2 + 2 f_1 f_2 \alpha_2 \beta_2 + f_2^2 \beta_2^2) g_2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right| = \\ M_F^2 &= \mu_0^2 \{ f_1^2 [g\alpha\alpha] + 2 f_1 f_2 [g\alpha\beta] + f_2^2 [g\beta\beta] \} \end{aligned} \tag{4}$$

oder, da nach (13), § 47, S. 181:

$$\mu_x = \mu_0 \sqrt{[g\alpha\alpha]} \qquad \mu_y = \mu_0 \sqrt{[g\beta\beta]}$$

$$M_F^2 = f_1^2 \mu_x^2 + 2 f_1 f_2 [g\alpha\beta] \mu_0^2 + f_2^2 \mu_y^2. \tag{5}$$

Man erkennt also, daß durch Anwendung der Formel (3) das mittlere Glied ganz übergangen worden wäre. Setzt man nach (17) des § 47, S. 184:

$$[g\alpha\alpha] = \frac{1}{[gaa.1]}, \qquad [g\alpha\beta] = -\frac{1}{[gab.1]}, \qquad [g\beta\beta] = \frac{1}{[gbb.1]},$$

so erhält man (4) in der Form:

$$M_F^2 = \mu_0^2 \left\{ \frac{f_1^2}{[gaa.1]} - \frac{2 f_1 f_2}{[gab.1]} + \frac{f_2^2}{[gbb.1]} \right\}, \tag{6}$$

somit ist das reziproke Gewicht der Funktion:

$$\frac{1}{g_F} = \frac{M_F^2}{\mu_0^2} = \frac{f_1^2}{[gaa.1]} + \frac{2 f_1 f_2}{[gab.1]} + \frac{f_2^2}{[gbb.1]}. \qquad (7)$$

Die analoge Untersuchung für eine Funktion von drei Unbekannten, nämlich für

$$F = f_1 x + f_2 y + f_3 z,$$

führt, wenn jetzt der Einfachheit halber durchaus gleiche Genauigkeit, also $g = 1$ angenommen wird, zu der Formel:

$$M_F^2 = \mu_0^2 \left\{ \frac{f_1^2}{[aa.2]} + \frac{2 f_1 f_2}{[ab.2]} + \frac{2 f_1 f_3}{[ac.2]} + \frac{f_2^2}{[bb.2]} + \frac{2 f_2 f_3}{[bc.2]} + \frac{f_3^2}{[cc.2]} \right\}. \qquad (8)$$

Dieselbe erscheint als eine Verallgemeinerung der Formel (2) des § 50, denn vergleicht man die Fehlergleichung (S. 189)

$$l_i + v_i = a_i x + b_i y + c_i z$$

mit der allgemeinen Form

$$F = f_1 x + f_2 y + f_3 z,$$

so geht mit Rücksicht auf die Beziehungen:

$$[aa.2] = \frac{1}{k'_x} \qquad [ab.2] = \frac{1}{k''_x} \qquad [ac.2] = \frac{1}{k'''_x}$$

$$[ab.2] = \frac{1}{k'_y} \qquad [bb.2] = \frac{1}{k''_y} \qquad [bc.2] = \frac{1}{k'''_y}$$

$$[ac.2] = \frac{1}{k'_z} \qquad [bc.2] = \frac{1}{k''_z} \qquad [cc.2] = \frac{1}{k'''_z}$$

die Formel (8) über in:

$$M_F^2 = \mu_0^2 \{ a_i^2 k'_x + 2 a_i b_i k''_x + 2 a_i c_i k'''_x + b_i^2 k''_y + 2 b_i c_i k'''_y + c_i^2 k'''_z \} \qquad (9)$$

$$M_F^2 = \mu_0^2 \left\{ \begin{array}{l} a_i (a_i k'_x + b_i k''_x + c_i k'''_x) \\ b_i (a_i k'_y + b_i k''_y + c_i k'''_y) \\ c_i (a_i k'_z + b_i k''_z + c_i k'''_z) \end{array} \right\}$$

oder mit Rücksicht auf (10), (11) und (12) des § 47:

$$M_F^2 = \mu_0^2 (a_i \alpha_i + b_i \beta_i + c_i \gamma_i).$$

Dehnt man die Formel (4) auf vier Unbekannte aus, so wird für $g = 1$:

$$M_F^2 = \mu^2 \left\{ \begin{array}{r} f_1 f_1 [\alpha\alpha] + 2 f_1 f_2 [\alpha\beta] + 2 f_1 f_3 [\alpha\gamma] + 2 f_1 f_4 [\alpha\delta] \\ + f_2 f_2 [\beta\beta] + 2 f_2 f_3 [\beta\gamma] + 2 f_2 f_4 [\beta\delta] \\ + f_3 f_3 [\gamma\gamma] + 2 f_3 f_4 [\gamma\delta] \\ + f_4 f_4 [\delta\delta] \end{array} \right\} \qquad (10)$$

oder unter Einführung der Gewichtskoeffizienten k:

$$M_F^2 = \mu_0^2 \left\{ \begin{array}{r} f_1^2 k_x + 2 f_1 f_2 k_x' + 2 f_1 f_3 k_x'' + 2 f_1 f_4 k_x^{IV} \\ f_2^2 k_y + 2 f_2 f_3 k_y'' + 2 f_2 f_4 k_y^{IV} \\ f_3^2 k_z + 2 f_3 f_4 k_z^{IV} \\ f_4^2 k_t^{IV} \end{array} \right\} \qquad (11)$$

Man kann diese Formel noch zweckmäßig umformen. Setzt man

$$\left. \begin{array}{l} f_1 k_x' + f_2 k_x'' + f_3 k_x''' + f_4 k_x^{IV} = \lambda_1 \\ f_1 k_y' + f_2 k_y'' + f_3 k_y''' + f_4 k_y^{IV} = \lambda_2 \\ f_1 k_z' + f_2 k_z'' + f_3 k_z''' + f_4 k_z^{IV} = \lambda_3 \\ f_1 k_t' + f_2 k_t'' + f_3 k_t''' + f_4 k_t^{IV} = \lambda_4 \end{array} \right\} \qquad (12)$$

so kann man auch schreiben:

$$M_F^2 = \mu_0^2 (f_1 \lambda_1 + f_2 \lambda_2 + f_3 \lambda_3 + f_4 \lambda_4). \qquad (13)$$

Nun stellen die Gleichungen (12) nach § 47 die unbestimmten Auflösungen folgender, den Normalgleichungen analog gebauter Gleichungen dar:

$$\begin{array}{l} [aa]\,\lambda_1 + [ab]\,\lambda_2 + [ac]\,\lambda_3 + [ad]\,\lambda_4 = f_1 \\ [ab]\,\lambda_1 + [bb]\,\lambda_2 + [bc]\,\lambda_3 + [bd]\,\lambda_4 = f_2 \\ [ac]\,\lambda_1 + [bc]\,\lambda_2 + [cc]\,\lambda_3 + [cd]\,\lambda_4 = f_3 \\ [ad]\,\lambda_1 + [bd]\,\lambda_2 + [cd]\,\lambda_3 + [dd]\,\lambda_4 = f_4. \end{array}$$

Löst man dieselben nach dem Gaußschen Algorithmus auf, so erhält man nach (9) des § 44 die reduzierten Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 + \dfrac{[ab]}{[aa]}\lambda_2 + \dfrac{[ac]}{[aa]}\lambda_3 + \dfrac{[ad]}{[aa]}\lambda_4 = \dfrac{f_1}{[aa]} \\ \qquad \lambda_2 + \dfrac{[bc.1]}{[bb.1]}\lambda_3 + \dfrac{[bd.1]}{[bb.1]}\lambda_4 = \dfrac{[f_2.1]}{[bb.1]} \\ \qquad\qquad \lambda_3 + \dfrac{[cd.2]}{[cc.2]}\lambda_4 = \dfrac{[f_3.2]}{[cc.2]} \\ \qquad\qquad\qquad \lambda_4 = \dfrac{[f_4.3]}{[dd.3]} \end{array} \right\} \qquad (14)$$

Eliminiert man aus (13) die λ mit Hilfe des Systems (14), so erhält man schrittweise:

$$\frac{M_F^2}{\mu_0^2} = \frac{f_1^2}{[aa]} + \left(f_2 - \frac{[ab]}{[aa]} f_1\right)\lambda_2 + \left(f_3 - \frac{[ac]}{[aa]} f_1\right)\lambda_3 + \left(f_4 - \frac{[ad]}{[aa]} f_1\right)\lambda_4$$

$$= \frac{f_1^2}{[aa]} + [f_2.1]\,\lambda_2 + [f_3.1]\,\lambda_3 + [f_4.1]\,\lambda_4$$

$$= \frac{f_1^2}{[aa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \left([f_3 \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [f_2 \cdot 1]\right) \lambda_3$$

$$+ \left([f_4 \cdot 1] - \frac{[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [f_2 \cdot 1]\right) \lambda_4$$

$$= \frac{f_1^2}{[aa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + [f_3 \cdot 2] \lambda_3 + [f_4 \cdot 2] \lambda_4$$

$$= \frac{f_1^2}{[aa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[f_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} + \left([f_4 \cdot 2] - \frac{[cd \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} [f_3 \cdot 2]\right) \lambda_4$$

$$= \frac{f_1^2}{[aa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[f_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} + [f_4 \cdot 3] \lambda_4$$

und schließlich:

$$M_F^2 = \mu_0^2 \left\{ \frac{f_1^2}{[aa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[f_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} + \frac{[f_4 \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]} \right\} \quad (15)$$

oder für ungleiche Gewichte:

$$M_F^2 = \mu_0^2 \left\{ \frac{f_1^2}{[gaa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[gbb \cdot 1]} + \frac{[f_3 \cdot 2]^2}{[gcc \cdot 2]} + \frac{[f_4 \cdot 3]^2}{[gdd \cdot 3]} \right\}, \quad (16)$$

wobei folgende Beziehungen bestehen:

$$[f_2 \cdot 1] = f_2 - \frac{[gab]}{[gaa]} f_1$$

$$[f_3 \cdot 2] = f_3 - \frac{[gbc \cdot 1]}{[gbb \cdot 1]} [f_2 \cdot 1] - \frac{[gac]}{[gaa]} f_1$$

$$[f_4 \cdot 3] = f_4 - \frac{[gcd \cdot 2]}{[gcc \cdot 2]} [f_3 \cdot 2] - \frac{[gbd \cdot 1]}{[gbb \cdot 1]} [f_2 \cdot 1] - \frac{[gad]}{[gaa]} f_1.$$

§ 52. Beispiele.

a) Gaußsche Gleichungen in der „Theoria motus, art. 184."

Durch Beobachtung seien folgende Vermittlungsgleichungen erhalten:

$$\begin{aligned} + x - y + 2z &= 3 \\ + 3x + 2y - 5z &= 5 \\ + 4x + y + 4z &= 21 \\ - x + 3y + 3z &= 14. \end{aligned}$$

Die Berechnung der zur Aufstellung der Normalgleichungen erforderlichen Koeffizienten geschieht mit Vorteil tabellarisch in folgender Weise:

a	b	c	l	aa	ab	ac	al	bb	bc	bl	cc	cl	ll
+ 1	− 1	+ 2	+ 3	1	− 1	+ 2	+ 3	1	− 2	− 3	4	+ 6	9
+ 3	+ 2	− 5	+ 5	9	+ 6	− 15	+ 15	4	− 10	+ 10	25	− 25	25
+ 4	+ 1	+ 4	+ 21	16	+ 4	+ 16	+ 84	1	+ 4	+ 21	16	+ 84	441
− 1	+ 3	+ 3	+ 14	1	− 3	− 3	− 14	9	+ 9	+ 42	9	+ 42	196
				27	+ 6	0	+ 88	15	− 1	+ 70	54	+ 107	671

Die Normalgleichungen lauten:

$$
\begin{aligned}
27x + 6y \quad &= 88 \\
6x + 15y - z &= 70 \\
y + 54z &= 107.
\end{aligned}
$$

Deren Auflösung ergibt als wahrscheinlichste Werte der Unbekannten:

$$x = 2{\cdot}470, \qquad y = 3{\cdot}551, \qquad z = 1{\cdot}916.$$

Substituiert man diese Werte in die Vermittlungsgleichungen, so bleiben die scheinbaren Fehler v übrig. Deren erste und zweite Potenzen sind:

v	vv
$v = -0{\cdot}249$	$vv = 0{\cdot}062001$
$-0{\cdot}068$	$0{\cdot}004624$
$+0{\cdot}095$	$0{\cdot}009025$
$-0{\cdot}069$	$0{\cdot}004761$
	$[vv] = 0{\cdot}080411$

Der mittlere Fehler einer Gleichung, welche eine Beobachtung repräsentiert, ist:

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-u}} = \sqrt{\frac{0{\cdot}080411}{4-3}} = \pm 0{\cdot}284.$$

Die weitere Genauigkeitsuntersuchung erfordert die Aufstellung folgender Gewichtsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
27k'_x + 6k''_x \quad &= 1 \\
6k'_x - 15k''_x - k'''_x &= 0 \\
k''_x + 54k'''_x &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
27k'_y + 6k''_y \quad &= 0 \\
6k'_y + 15k''_y - k'''_y &= 1 \\
k''_y - 54k'''_y &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
27k'_z + 6k''_z \quad &= 0 \\
6k'_z + 15k''_z + k'''_z &= 0 \\
k''_z + 54k'''_z &= 1
\end{aligned}
$$

Besteht nur die Absicht, die Genauigkeitsbestimmung der Unbekannten x, y, z allein vorzunehmen, so genügt die Berechnung der Gewichte der Unbekannten durch Auflösung der Normalgleichungen nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren. Wird aber auch die Genauigkeitsbestimmung der ausgeglichenen Beobachtungen verlangt, so empfiehlt es sich, die Ermittlung sämtlicher Gewichtskoeffizienten vorzunehmen. Die Auflösung der Gewichtsgleichungen ergibt, wobei die doppelt erhaltenen Koeffizienten eine Rechenkontrolle*) bieten:

$k'_x = + 0{\cdot}040656$	$k'_y = - 0{\cdot}016282 = k''_x$	$k'_z = + 0{\cdot}000302 = k'''_x$
$k''_x = - 0{\cdot}016282 = k'_y$	$k''_y = + 0{\cdot}073270$	$k''_z = - 0{\cdot}001357 = k'''_y$
$k'''_x = + 0{\cdot}000302 = k'_z$	$k'''_y = - 0{\cdot}001357 = k''_z$	$k'''_z = + 0{\cdot}018544.$

Die Gewichte der Unbekannten sind daher:

$$g_x = \frac{1}{k'_x} = 24{\cdot}5966, \quad g_y = \frac{1}{k''_y} = 13{\cdot}6482, \quad g_z = \frac{1}{k'''_z} = 53{\cdot}9268.$$

Dieselben Resultate erhält man durch Auflösung der Normalgleichungen nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren, indem

$$g_x = [a\,a\,.\,2] = 24{\cdot}5966; \; g_y = [b\,b\,.\,2] = 13{\cdot}6482; \; g_z = [c\,c\,.\,2] = 53{\cdot}9268$$

gefunden wird. Z. B.

$$g_z = [c\,c\,.\,2] = [c\,c\,.\,1] - \frac{[b\,c\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]}$$

$$[c\,c\,.\,1] = [c\,c] - \frac{[a\,c]^2}{[a\,a]} = 54$$

$$[b\,c\,.\,1] = [b\,c] - \frac{[a\,b][a\,c]}{[a\,a]} = 1$$

$$[b\,b\,.\,1] = [b\,b] - \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]} = 13{\cdot}\dot{6}$$

$$g_z = 54 - \frac{1}{13{\cdot}\dot{6}} = 53{\cdot}9268 \text{ wie oben.}$$

Wird die Genauigkeit der ursprünglichen Beobachtungen gleich 1 gesetzt, so besitzen die Unbekannten folgende relative Genauigkeiten:

*) Unter Verzichtleistung auf diese Kontrolle kann man, nachdem aus der ersten Gruppe von Gewichtsgleichungen alle drei Gewichtskoeffizienten k'_x, k''_x, k'''_x berechnet wurden, die zweite Gruppe von Gewichtsgleichungen durch Substitution von $k'_y = k''_x$ auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten und hierauf die dritte Gruppe durch Substitution von $k'_z = k'''_x$ und $k''_z = k'''_y$ auf eine Gleichung mit einer Unbekannten reduzieren.

$$h_x = \sqrt{g_x} = 4\cdot96, \quad h_y = \sqrt{g_y} = 3\cdot69, \quad h_z = \sqrt{g_z} = 7\cdot31.$$

Somit sind die mittleren Fehler der Unbekannten:

$$\mu_x = \frac{\mu}{h_x} = 0\cdot057, \quad \mu_y = \frac{\mu}{h_y} = 0\cdot077, \quad \mu_z = \frac{\mu}{h_z} = 0\cdot039.$$

Die Genauigkeitsbestimmung der ausgeglichenen Beobachtungen geschieht nach der Formel (2) des § 50:

$$M_i = \mu\sqrt{a_i\alpha_i + b_i\beta_i + c_i\gamma_i} = \mu\sqrt{S}$$

schematisch wie folgt. Es ist:

$$\alpha_i = a_i k'_1 + b_i k''_1 + c_i k'''_1$$
$$\beta_i = a_i k'_2 + b_i k''_2 + c_i k'''_2$$
$$\gamma_i = a_i k'_3 + b_i k''_3 + c_i k'''_3.$$

α	β	γ	$a\alpha$	$b\beta$	$c\gamma$	S	$\sqrt{S}$
+ 0·0575	− 0·0923	+ 0·0387	0·0575	0·0923	0·0774	0·2272	0·477
+ 0·0879	+ 0·1045	− 0·0945	0·2637	0·2090	0·4725	0·9452	0·972
+ 0·1476	+ 0·0027	+ 0·0740	0·5904	0·0027	0·2960	0·8891	0·943
− 0·0886	+ 0·2320	+ 0·0513	0·0886	0·6960	0·1539	0·9385	0·969

Die mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen nach der Ausgleichung sind daher:

$$M_1 = 0\cdot477\,\mu = 0\cdot135$$
$$M_2 = 0\cdot972\,\mu = 0\cdot276$$
$$M_3 = 0\cdot943\,\mu = 0\cdot268$$
$$M_4 = 0\cdot969\,\mu = 0\cdot275.$$

Die Anwendung der Formel (15) des § 51 führt auf umständlicherem Wege zu denselben Ergebnissen. Um z. B. den mittleren Fehler der ersten Gleichung nach erfolgter Ausgleichung zu erhalten, berechne man für $f_1 = -1$, $f_2 = -1$, $f_3 = -2$:

$$[f_2 \,.\, 1] = -1 - \frac{6}{27} = -1\cdot\dot{2},$$

$$[f_3 \,.\, 2] = -2 - \frac{1\cdot\dot{2}}{13\cdot\dot{6}} = 2\cdot0894,$$

$$M_1^2 = \mu^2 \left\{\frac{1}{27} - \frac{1\cdot\dot{2}^2}{13\cdot\dot{6}} + \frac{2\cdot0894^2}{53\cdot9268}\right\},$$

$$M_1 = \mu\sqrt{0\cdot2272} = 0\cdot284 \,.\, 0\cdot477 = 0\cdot135.$$

Die Rechnung nach der Formel (9) des § 51 wird schematisch in folgender Weise geführt:

Gleichung:	1	2	3	4
a_i^2	+ 1	+ 9	+ 16	+ 1
$2a_ib_i$	− 2	+ 12	+ 8	− 6
$2a_ic_i$	+ 4	− 30	+ 32	− 6
b_i^2	+ 1	+ 4	+ 1	+ 9
$2b_ic_i$	− 4	− 20	+ 8	+ 18
c_i^2	+ 4	+ 25	+ 16	+ 9
$a_i^2 k_x$	+ 0·0407	+ 0·3659	+ 0·6505	+ 0·0407
$2a_ib_ik_x'$	+ 0·0326	− 0·1954	− 0·1303	+ 0·0977
$2a_ic_ik_x''$	+ 0·0012	− 0·0091	+ 0·0097	− 0·0018
$b_i^2 k_y$	+ 0·0733	+ 0·2931	+ 0·0733	+ 0·6594
$2b_ic_ik_y'$	+ 0·0054	+ 0·0271	− 0·0109	− 0·0244
$c_i^2 k_z$	+ 0·0742	+ 0·4636	+ 0·2967	+ 0·1669
S	+ 0·2274	+ 0·9452	+ 0·8890	+ 0·9385
$\sqrt{S}$	0·477	0·972	0·943	0·969
M_i	0·135	0·276	0·268	0·275

Von den hier angewendeten Formeln zur Genauigkeitsbestimmung nach der Ausgleichung ist die neue Formel (2) des § 50 die bequemste.

b) Interpolationsformel für die Schwerkraft.

Bedeutet L die wahre mathematische Länge des Sekundenpendels am Meeresniveau und unter der geographischen Breite B, so besteht zwischen den Größen L und B eine Beziehung, welche durch die empirische Formel

$$L = X - Y \cos 2B$$

dargestellt ist. Hierin bedeuten X und Y Konstante, und zwar stellt, da für $B = 45^\circ$ der Subtrahend der rechten Seite verschwindet, X die auf 45° reduzierte Pendellänge und Y eine Konstante dar, mittels welcher die für eine beliebige Breite geltende Pendellänge auf die Breite von 45° bezogen wird. Um die beiden unbekannten Konstanten zu bestimmen, würde es genügen, an zwei Orten mit verschiedenen

geographischen Breiten die Pendellängen zu messen und aus den damit gebildeten zwei Gleichungen die Unbekannten zu berechnen. Mit Rücksicht auf die zufälligen Beobachtungsfehler bei der Bestimmung der Pendellängen wird man es aber vorziehen, überschüssige Beobachtungen anzustellen.

Wurden nun unter verschiedenen Breiten B_1 bis B_n die Pendellängen l_1 bis l_n gemessen, so kann man n Fehlergleichungen vermittelnder Beobachtungen aufstellen, welche, wenn x, y die wahrscheinlichsten Werte von X, Y bezeichnen, die Form

$$x - y \cos 2 B_i - l_i = v_i$$

haben werden. Um die numerische Berechnung zu erleichtern, führt man für y den aus vorläufigen Berechnungen herrührenden Näherungswert 0·002636 in Metern oder 2636 in Mikrons ein. Setzt man

$$y = 2636 \left(1 - \frac{\eta}{100}\right), \tag{1}$$

worin η die prozentische Verbesserung von y bedeutet, und wird dieser Ausdruck in die obige Gleichung eingesetzt, so erhält man:

$$x - 2636 \left(1 - \frac{\eta}{100}\right) \cos 2 B_i - l_i = v_i$$

oder wenn

$$l_i + 2636 \cos 2 B_i = l_i'$$

und

$$26{\cdot}36 \cos 2 B_i = b_i$$

geschrieben wird:

$$x - b_i \eta - l_i = v_i \,. \tag{2}$$

Nachstehend sind die für 8 verschiedene Breiten ermittelten Fehlergleichungen nach Helmert angesetzt: (die mathem. u. physik. Theorien der höheren Geodäsie. II. Band, 1884, S. 239):

$$\left.\begin{array}{l}
x - 25{\cdot}5\,\eta - 993568 = v_1 \\
x - 22{\cdot}9\,\eta - 559 = v_2 \\
x - 17{\cdot}5\,\eta - 528 = v_3 \\
x - 10{\cdot}4\,\eta - 552 = v_4 \\
x - 1{\cdot}5\,\eta - 551 = v_5 \\
x - 8{\cdot}0\,\eta - 555 = v_6 \\
x - 16{\cdot}2\,\eta - 540 = v_7 \\
x - 22{\cdot}5\,\eta - 993549 = v_8
\end{array}\right\} \tag{3}$$

Gleiche Gewichte vorausgesetzt, stellt sich die Rechnung wie folgt:

a	b	l'	$b\,b$	$b\,l'$
1	+ 25·5	993568	650·25	+ 25335984·0
1	+ 22·9	993559	524·41	+ 22752501·1
1	+ 17·5	993528	306·25	+ 17386740·0
1	+ 10·4	993552	108·16	+ 10332940·8
1	— 1·5	993551	2·25	— 1490326·5
1	— 8·0	993555	64·00	— 7948440·0
1	— 16·2	993540	262·44	— 16095348·0
1	— 22·5	993549	506·25	— 22354852·5
8	+ 31·1	7948402	2424·01	+ 30899851·9
$[a]$	$[a\,b] = [b]$	$[a\,l'] = [l']$	$[b\,b]$	$[b\,l']$

Die Normalgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} 8\,x + 31{\cdot}1\,\eta &= 7948402 \\ 31{\cdot}1\,x + 2424{\cdot}0\,\eta &= 30899852 \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste der Normalgleichungen mit $\frac{31{\cdot}1}{8}$ und subtrahiert sie von der zweiten, so erhält man:

$$\eta = \frac{439}{2303} = + 0{\cdot}19_{07}$$

mit dem Gewichte $g_\eta = 2303$.

Schreibt man die Normalgleichungen durch Umstellungen wie folgt:

$$\begin{aligned} 2424{\cdot}0\,\eta + 31{\cdot}1\,x &= 30899852 \\ 31{\cdot}1\,\eta + 8\,x &= 7948402 \end{aligned}$$

und subtrahiert die mit $\frac{31{\cdot}1}{2424{\cdot}0}$ multiplizierte erste Gleichung von der zweiten, so folgt:

$$x = \frac{7551958}{7{\cdot}6} = 993549{\cdot}_3$$

mit dem Gewichte $g_x = 7{\cdot}6$.

Berechnet man nach (1) aus η den Wert für y in Mikrons:

$$y = 2636\,(1 - 0{\cdot}0019) = 2631,$$

so lautet die wahrscheinlichste Gleichung in Mikrons:

$$L = 993549 - 2631 \cos 2\,B$$

oder in Metern:

$$L = 0{\cdot}993549 - 0{\cdot}002631 \cos 2\,B.$$

Damit wäre die Hauptaufgabe erledigt. Als Nebenaufgabe tritt jetzt noch die Genauigkeitsbestimmung hinzu. Zu diesem Behufe be-

rechne man mit Hilfe der wahrscheinlichsten Werte für x und η und den Gleichungen (3) die scheinbaren Fehler r_1 bis r_8, welche nebst den zur weiteren Berechnung erforderlichen Daten in der folgenden Tabelle zusammengestellt erscheinen.

Nr	r	rr	$\sqrt{r}$
1	− 13·8	190·44	3·71
2	− 5·3	28·09	2·30
3	+ 24·6	605·16	4·96
4	− 0·7	0·49	0·84
5	− 1·4	1·96	1·18
6	− 7·2	51·84	2·68
7	+ 6·2	38·44	2·49
8	− 4·0	16·00	2·00
	63·2	932·42	20·16
	$[r]$	$[rr]$	$[\sqrt{r}]$

So ist z. B. $993549{\cdot}_3 - 993568 + 25{\cdot}5 \, . \, 0{\cdot}1907 = -13{\cdot}8$.

Die charakteristischen Fehler einer Gleichung sind:

mittlerer Fehler: $$\mu = \sqrt{\frac{932{\cdot}42}{8-2}} = \pm 12{\cdot}5 \text{ Mikrons}$$

durchschnittlicher Fehler: $$\vartheta = \frac{63{\cdot}2}{\sqrt{8\,(8-2)}} = \pm 9{\cdot}1 \quad "$$

wahrscheinlicher Fehler: $$\varrho = \frac{20{\cdot}16^2}{8\sqrt{8\,(8-2)}} = \pm 7{\cdot}3 \quad "$$

Die mittlere Unsicherheit z. B. in der Bestimmung des mittleren Fehlers μ ist:

$$\mu_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2\,(n-u)}} = \frac{12{\cdot}5}{\sqrt{12}} = \pm 3{\cdot}6 \text{ Mikrons, also nahezu } \frac{\mu}{4}.$$

Die mittleren Fehler der Unbekannten η und x sind in Mikrons:

$$\mu_\eta = \frac{\mu}{\sqrt{g_\eta}} = \pm 0{\cdot}26, \qquad \mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{g_x}} = \pm 4{\cdot}53,$$

folglich ist der mittlere Fehler von y in Mikrons:

$$\mu_y = 2631 \, . \, 0{\cdot}0026 = \pm 6{\cdot}84$$

oder in Metern (wegen der folgenden Substitution unausmultipliziert angesetzt):

$$\mu_y = 0{\cdot}002631 \, . \, 0{\cdot}0026.$$

Die Formel für die Länge des Sekundenpendels lautet sohin mit der Angabe der Unsicherheit in g:

$$L = 0{\cdot}993549 - 0{\cdot}002631\,(1 \pm 0{\cdot}0026)\cos 2B$$

oder, wenn man $\cos 2B$ durch $1 - 2\sin^2 B$ ersetzt:

$$L = 0{\cdot}990918 \left\{1 + (0{\cdot}005310 \pm 0{\cdot}000014)\sin^2 B\right\} \text{ Meter.}$$

Da für das Sekundenpendel die Formel besteht: $1 = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$, so erhält man durch Multiplikation mit π^2 die Interpolationsgleichung für die entsprechend reduzierte Schwerkraft:

$$g = 9{\cdot}7800 \left\{1 + (0{\cdot}005310 \pm 0{\cdot}000014)\sin^2 B\right\},$$

wie sie von Helmert (1884) aufgestellt worden ist.

Anmerkung. Dieselbe Aufgabe hat auch schon Adrain (1808), also noch vor dem Erscheinen der Theoria motus, durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate gelöst. (Siehe Czuber: Theorie d. Beob. S. 236 und Hammer: Zeitsch. f. Verm. 1900, S. 625.)

c) Polhöhenbestimmung aus Zenithdistanzmessungen.

Von den aus Zenithdistanzmessungen mehrerer Sterne in der Nähe des Meridians bestimmten Polhöhen eines Beobachtungsortes sei mit Rücksicht auf die Biegung des Fernrohres der mittlere Wert der Polhöhe zu suchen.

Ist z die ermittelte Zenithdistanz eines Sternes,
p die Anzahl (das Gewicht) der Beobachtungen,
b die Biegung des Fernrohres im Horizonte,
φ der ohne Rücksicht auf die Biegung aus den Beobachtungen der einzelnen Sterne gerechnete Mittelwert der Polhöhe,
φ_0 die um den Biegungsbetrag korrigierte Polhöhe,
φ_n ein Näherungswert der Polhöhe,

und setzt man $\varphi - \varphi_n = n$, $\varphi_0 - \varphi_n = \Delta\varphi$, $\sin z = m$, so besteht, wenn man den Einfluß der Biegung auf die gemessene Polhöhe dem $\sin z$ proportional setzt, die Beziehung:

$$\varphi_0 = \varphi - b\sin z$$

oder mit Rücksicht auf obige Gleichungen:

$$n = \Delta\varphi + b\,m.$$

Liegen mehrere Beobachtungen vor, so liefert jede zu einem Sterne gehörige Beobachtungsgruppe eine Vermittlungsgleichung

dieser Form, worin die verschiedenen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ feststehende Werte, die Größen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ durch Messung hervorgegangen und die beiden Unbekannten $\Delta\varphi$ und b aus den Normalgleichungen zu berechnen sind.

Die folgenden Angaben zur Bestimmung der Polhöhe auf der Station Jauerling sind entnommen den Publikationen für die internationale Erdmessung: „Astronomische Arbeiten der österr. Gradmessungskommission" von Prof. Dr. W. Tinter, Wien 1891.

Stern	φ	z	p	n
α *Ursae min.*, obere Kulm.	48° 20′ 21″·492	— 41° 27′·0	95	2·992
α *Ursae min.*, untere Kulm. . . .	22·145	+ 42 30·5	99	3·645
β *Ursae minoris*	21·147	— 26 20·7	63	2·647
β *Cephei*	21·242	+ 21 39·8	57	2·742
α *Bootis*	20·501	— 8 29·4	71	2·001
α *Herculis*	19·674	— 33 48·0	95	1·174
α *Orionis*	19·807	— 40 57·3	104	1·307
α *Canis minoris*	19·577	— 42 47·1	58	1·077
Näherungswert φ_0 = 48° 20′ 18″·5			642	

pm	pn	pmm	pmn
+ 62·887	284·241	41·629	+ 188·158
+ 66·894	360·855	45·200	+ 243·829
+ 27·958	166·761	12·407	+ 74·004
— 21·042	156·294	7·767	+ 57·696
— 33·867	142·071	16·155	— 67·769
— 52·848	111·530	29·399	— 62·044
— 68·168	135·928	44·682	— 89·096
— 39·396	62·466	26·760	— 42·430
— 15·498	1420·146	223·999	+ 302·348

Normalgleichungen:

$$[p]\,\Delta\varphi + [pm]\,b = [pn]$$
$$[pm]\,\Delta\varphi + [pmm]\,b = [pmn]$$

$$642·000\,\Delta\varphi - 15·498\,b = 1420·146$$
$$-15·498\,\Delta\varphi + 223·999\,b = 302·348$$

Auflösung der Normalgleichungen:

$$\Delta\varphi = +2''·2484, \quad b = +1·5053$$

Durch Substitution dieser beiden Werte in die Vermittlungsgleichungen erhält man die übrigbleibenden Fehler v und im Anschlusse daran die Genauigkeitsbestimmung wie folgt:

$b\,m$	$\varDelta\varphi + b\,m$	$v = n - (\varDelta\varphi + b\,m)$	$p\,m\,v$	$p\,v\,v$
+ 0·9965	3·2449	— 0·2529	— 15·904	6·0760
+ 1·0172	3·2656	+ 0·3794	+ 25·379	14·2505
+ 0·6680	2·9164	— 0·2694	— 7·532	4·5723
+ 0·5557	2·8041	— 0·0621	— 1·307	0·2198
— 0·7181	1·5303	+ 0·4707	— 15·941	15·7307
— 0·8374	1·4110	— 0·2370	+ 12·525	5·3361
— 0·9867	1·2617	+ 0·0453	— 3·088	0·2134
— 1·0225	1·2259	— 0·1489	+ 5·866	1·2859
			+ 43·770	47·6847
			— 43·772	[$p\,v\,v$]
			— 0·002	

Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit: $\mu_0 = \sqrt{\dfrac{47{\cdot}6847}{8-2}} = \pm 2''8173,$

Gewicht von $\varDelta\varphi$: $p_{\varDelta\varphi} = [p\,.\,1] = [p] - \dfrac{[p\,m]^2}{[p\,m\,m]} = 640{\cdot}928,$

Gewicht von b: $p_b = [p\,m\,m\,.\,1] = [p\,m\,m] - \dfrac{[p\,m]^2}{[p]} = 223{\cdot}625,$

mittlerer Fehler von $\varDelta\varphi$: $\mu_{\varDelta\varphi} = \dfrac{\mu_0}{\sqrt{p_{\varDelta\varphi}}} = \pm 0''1113,$

mittlerer Fehler von b: $\mu_b = \dfrac{\mu_0}{\sqrt{p_b}} = \pm 0''1884,$

wahrscheinlichster Wert der Polhöhe: $\varphi_0 = \varphi_n + \varDelta\varphi \pm \mu_{\varDelta\varphi},$

also: $\varphi_0 = 48^0\,20'\,20''7484 \pm 0''1113.$

Als Rechenprobe ergibt sich $[p\,m\,v] = -0{\cdot}002$ (statt genau 0·000, wegen der Abrundungsfehler). Zur Kontrolle kann man den wahrscheinlichsten Wert φ_0 auch als allgemeines arithmetisches Mittel der Polhöhen mit Berücksichtigung der Biegung rechnen. Es ist

$$\varphi_0 = \frac{[(\varphi - b\,m)\,p]}{[p]} = \frac{[p\,\varphi]}{[p]} - b\,\frac{[p\,m]}{[p]} = \varphi' - b\,m'.$$

Hierin bedeutet $\varphi' = \dfrac{[p\,\varphi]}{[p]}$ das allgemeine arithmetische Mittel der Polhöhe ohne Berücksichtigung der Biegung, $m' = \dfrac{[p\,m]}{[p]} = \sin z'$ das allgemeine arithmetische Mittel aller $\sin z$, somit ist $b \sin z'$ die Korrektion wegen der Durchbiegung des Fernrohres. Dann ist.

$$\varphi = 48^\circ\,20'\,19'' + \frac{1099{\cdot}145}{642} = 48^\circ\,20'\,20''{\cdot}7121$$

$$b\,\sin i = 1{\cdot}5053 \cdot \frac{15{\cdot}498}{642} = \qquad + 0{\cdot}0363$$

---

somit wie oben: $\varphi_0 = 48^\circ\,20'\,20''{\cdot}7484.$

Anmerkung. Um die beschwerliche Arbeit des Ausrechnens der Quadrate, Wurzeln und Produkte zu erleichtern, kann man nebst mechanischen Hilfsmitteln (Rechenschieber, Rechenmaschine u. dgl.) auch Rechentafeln, also Quadrat-, Wurzel- und Produkttafeln benützen. Im Anhange befindet sich eine mit dreistelligem Argumente angelegte Quadrat- und Wurzeltafel.

Zur Produktenbildung bestehen derzeit die Rechentafeln von A. L. Crelle (1880), welche alle Produkte von drei- und dreistelligen Zahlen und von H. Zimmermann (1889), welche die Produkte aller drei- und zweistelligen Zahlen enthalten. In Ermanglung einer Produkttafel kann man zur Bildung der nichtquadratischen Summen $[a\,b]$, $[a\,c]$ usw. sich auch der Quadrattafeln bedienen, denn es ist

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b$$

$$a\,b = \frac{(a + b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

$$[a\,b] = \frac{[(a + b)^2] - [a\,a] - [b\,b]}{2}.$$

Zerlegt man das Produkt $a\,b$ für $a > b$ in die Faktoren $\frac{(a + b)^2}{4}$ und $\frac{(a - b)^2}{4}$, so kann man zu dessen Ermittlung auch Tafeln der Viertelquadrate benützen, wie solche von J. Blater (1887) in Wien herausgegeben wurden.

B. Bedingte Beobachtungen.

§ 53. Minimumsbestimmung mit Nebenbedingungen.

Werden behufs Bestimmung von Unbekannten mehrere Größen, zwischen deren wahren Werten streng zu erfüllende Bedingungen in Form von Gleichungen bestehen, direkt oder indirekt beobachtet, so werden diese Beobachtungen „bedingte Beobachtungen" genannt.

Bevor Beobachtungen ausgeglichen werden, müssen die zwischen ihnen etwa stattfindenden Bedingungsgleichungen zur Aufstellung gelangen. Wurden z. B. die Innenwinkel α, β, γ eines ebenen Dreieckes gemessen, so besteht zwischen ihnen die Bedingungsgleichung

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ},$$

welche zwar von den fehlerhaft gemessenen Winkeln in der Regel nicht strenge befriedigt wird, aber von den ausgeglichenen Winkeln in aller Strenge erfüllt werden muß, wenn verhindert werden soll, daß durch Weiterbenützung der aus den Beobachtungsdaten gewonnenen Resultate auf Widersprüche gestoßen werde.

Wenn man, um ein zweites Beispiel in Betracht zu ziehen, von mehreren Dreieckspunkten nach einem bestimmten Punkte eines Dreiecksnetzes Richtungsbeobachtungen anstellt, so besteht die theoretische Forderung, daß sich alle diese Richtungen in dem gemeinschaftlichen Zielpunkte auch wirklich schneiden, welcher Forderung aber die mit unvermeidlichen Richtungsfehlern behafteten Visuren nicht strenge nachkommen werden. Da die beobachteten Richtungen als Bestandteile des Dreiecksnetzes aufzufassen sind, so müssen sie der von der Theorie geforderten Bedingung genügen, daß das ganze Dreiecksnetz eine mathematisch mögliche Figur, also ein geometrisch geschlossenes Netz bilde. Diese Forderung bedingt aber die Erfüllung von ganz bestimmten Bedingungsgleichungen, welche in der Theorie der Triangulierung als Winkel- und Seitengleichungen bekannt sind.

Werden nun die Beobachtungen in der Weise ausgeglichen, daß die in den Bedingungsgleichungen auftauchenden Widersprüche wieder zum Verschwinden gebracht werden, und zwar so, daß die Summe der Quadrate der bei allen Beobachtungen übrig bleibenden Fehler, beziehungsweise die Summe der mit den bezüglichen Gewichten multiplizierten Quadrate dieser Fehler ein Minimum und gleichzeitig den Bedingungsgleichungen strenge Genüge geleistet werde, so werden die so verbesserten Beobachtungen die wahrscheinlichsten sein und sie werden für jedes der aus ihnen rechnerisch abgeleiteten Bestimmungsstücke eindeutige Resultate erzeugen.

Das Problem der Ausgleichung bedingter Beobachtungen erscheint sohin als eine „Aufgabe der Minimumsbestimmung mit Nebenbedingungen".

Wurden für die zu suchenden n Unbekannten $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$, welche nicht unabhängig, sondern an die im allgemeinen nicht linearen r Bedingungsgleichungen

$$\varphi_1(X_1, X_2, X_3, \ldots) = 0$$
$$\varphi_2(X_1, X_2, X_3, \ldots) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_r(X_1, X_2, X_3, \ldots) = 0$$

gebunden sind, die Beobachtungen $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$ angestellt, welchen die scheinbaren Verbesserungen $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ zugeteilt werden müssen, um sie zu den wahrscheinlichen Werten $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ zu machen, so werden folgende Bedingungsgleichungen strenge zu erfüllen sein, wobei vorausgesetzt werde, daß $n > r$ sei:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi_1(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \ldots l_n + v_n) = 0$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi_2(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \ldots l_n + v_n) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_r(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi_r(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \ldots l_n + v_n) = 0.$$

Sind die Verbesserungen v so klein, daß deren höhere Potenzen und Produkte unterdrückt werden können, und entwickelt man nach der Taylorschen Reihe, so hat man:

$$\varphi_1(l_1, l_2, \ldots l_n) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial l_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial l_n} v_n = 0$$
$$\varphi_2(l_1, l_2, \ldots l_n) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial l_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial l_n} v_n = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_r(l_1, l_2, \ldots l_n) + \frac{\partial \varphi_r}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial \varphi_r}{\partial l_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_r}{\partial l_n} v_n = 0$$

oder wenn zur Abkürzung $\varphi_i(l_1, l_2, \ldots l_n) = w_i$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial l_i} = a_i \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial l_i} = b_i \quad \cdots \quad \frac{\partial \varphi_r}{\partial l_i} = q_i$$

gesetzt wird, in linearer Form:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n + w_1 = [a\,v] + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n + w_2 = [b\,v] + w_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_1 v_1 + q_2 v_2 + \cdots + q_n v_n + w_r = [q\,v] + w_r = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Haben die Bedingungsgleichungen von vornherein die lineare Form:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n = 0 \\ b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \cdots + b_n X_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_0 + q_1 X_1 + q_2 X_2 + \cdots + q_n X_n = 0 \end{array}\right\} \text{ in der Anzahl } r$$

und hat man für die n Unbekannten X_1 bis X_n die Beobachtungen l_1 bis l_n mit beliebiger Genauigkeit angestellt, so werden sich, wenn

man in den Bedingungsgleichungen die Unbekannten durch die Beobachtungen ersetzt, Widersprüche ergeben, wodurch folgende „Widerspruchsgleichungen" entstehen:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + \cdots + a_n l_n = w_1 \\ b_0 + b_1 l_1 + b_2 l_2 + \cdots + b_n l_n = w_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_0 + q_1 l_1 + q_2 l_2 + \cdots + q_n l_n = w_r \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Fügt man aber an die Beobachtungen l die entsprechenden Verbesserungen v hinzu, so verschwinden wieder diese Widersprüche, so daß man hat:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 (l_1 + v_1) + a_2 (l_2 + v_2) + \cdots + a_n (l_n + v_n) = 0 \\ b_0 + b_1 (l_1 + v_1) + b_2 (l_2 + v_2) + \cdots + b_n (l_n + v_n) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_0 + q_1 (l_1 + v_1) + q_2 (l_2 + v_2) + \cdots + q_n (l_n + v_n) = 0. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Subtrahiert man die einzelnen Gleichungen (2) von den korrespondierenden Gleichungen (3), so kommen wieder die auf die Verbesserungen bezogenen Bedingungsgleichungen (1) zum Vorschein, welche den Namen „Fehlergleichungen bedingter Beobachtungen" führen.

Die Widersprüche w, welche vor der Ausgleichung zahlenmäßig berechnet werden können, bilden die Absolutglieder der Fehlergleichungen: da sie die Differenz zwischen Beobachtung und Theorie darstellen, so richtet sich ihr Vorzeichen nach der Regel:

$w =$ Beobachtung minus Theorie (Sollbetrag).

Aufgabe der Ausgleichungsrechnung ist es nun, die beobachteten Werte der Unbekannten so zu verbessern, daß die Widersprüche in den Bedingungsgleichungen verschwinden und gleichzeitig die Summe der mit den Gewichten multiplizierten Quadrate der Verbesserungen ein Minimum werde. In analytischer Sprache besteht sohin das Prinzip der Ausgleichung bedingter Beobachtungen darin, daß die r Gleichungen

$$[a v] + w_1 = 0, \quad [b v] + w_2 = 0, \quad . \; . \; . \quad [q v] + w_r = 0$$

strenge erfüllt und der Forderung $[g v v] = min$ so gut als möglich nachgekommen werde.

§ 54. Lösung des Problems.

Um der Minimumsbedingung $[v v] = min$ oder allgemeiner $[g v v] = min$ zu genügen, schreibt die Mathematik vor, daß der Diffe-

rentialquotient von $[g v v]$ gleich Null gesetzt werde; da aber auch die r Ausdrücke $[a v] + w_1$, $[b v] + w_2, \ldots [q v] + w_r$ Null sein müssen, so kann man die gemeinsame Forderung dahin aussprechen, daß der Ausdruck

$$[g v v] - 2 k_1 \{[a v] + w_1\} - 2 k_2 \{[b v] + w_2\} - \cdots - 2 k_r \{[q v] + w_r\}$$

ein absolutes Minimum erlange und daß daher die partiellen Differentialquotienten desselben nach den n verschiedenen v einzeln gleich Null werden. Die vorläufig noch unbestimmten Hilfsgrößen k, Lagrangesche „Multiplikatoren" oder Gaußsche „Korrelaten" genannt, kommen hierin in der Anzahl r vor. Zusammen gibt es also n unbekannte Verbesserungen $v_1, v_2, \ldots v_n$ und r unbekannte Korrelaten $k_1, k_2, \ldots k_r$, zu deren Bestimmung $n + r$ Gleichungen erforderlich sind. Ebenso viele Gleichungen stehen aber auch zur Verfügung, nämlich die r Fehlergleichungen und die aus der Differentiation hervorgehenden n Korrelatengleichungen:

$$\left.\begin{aligned} g_1 v_1 &= a_1 k_1 + b_1 k_2 + \cdots + q_1 k_r \\ g_2 v_2 &= a_2 k_1 + b_2 k_2 + \cdots + q_2 k_r \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n v_n &= a_n k_1 + b_n k_2 + \cdots + q_n k_r \end{aligned}\right\} \text{Korrelatengleichungen in der Anzahl } n$$

$$\left.\begin{aligned} [a v] + w_1 &= 0 \\ [b v] + w_2 &= 0 \\ &\ldots\ldots \\ [q v] + w_r &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Fehlergleichungen in der Anzahl } r.$$

Während die Korrelatengleichungen sämtliche $n + r$ Unbekannte enthalten, weisen die r Fehlergleichungen nur die n unbekannten Verbesserungen auf, die aber aus diesen Gleichungen allein nicht berechnet werden können, weil $n > r$ vorausgesetzt worden ist. Substituiert man aber die aus den Korrelatengleichungen hervorgehenden Ausdrücke für die v in die Fehlergleichungen, so ergeben sich zur Bestimmung der r Korrelaten k die r Normalgleichungen bedingter Beobachtungen:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{a a}{g}\right] k_1 + \left[\frac{a b}{g}\right] k_2 + \cdots + \left[\frac{a q}{g}\right] k_r + w_1 &= 0 \\ \left[\frac{a b}{g}\right] k_1 + \left[\frac{b b}{g}\right] k_2 + \cdots + \left[\frac{b q}{g}\right] k_r + w_2 &= 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left[\frac{a q}{g}\right] k_1 + \left[\frac{b q}{g}\right] k_2 + \cdots + \left[\frac{q q}{g}\right] k_r + w_r &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dieselben unterscheiden sich von den Normalgleichungen vermittelnder Beobachtungen insoferne, als bei diesen die Gewichte als Divisor, bei jenen als Faktor auftreten, ein übrigens nur äußerlicher Unterschied, welcher auf den Auflösungsmodus nach dem bereits bekannten Rechenschema gar keinen Einfluß nimmt. Hat man aus den Normalgleichungen die k berechnet, was nach dem Gaußschen Algorithmus durch folgende reduzierte Normalgleichungen geschieht:

$$\left.\begin{aligned} k_1 + \frac{\left[\frac{ab}{g}\right]}{\left[\frac{aa}{g}\right]} k_2 + \frac{\left[\frac{ac}{g}\right]}{\left[\frac{aa}{g}\right]} k_3 + \frac{w_1}{\left[\frac{aa}{g}\right]} &= 0 \\ k_2 + \frac{\left[\frac{bc}{g} \cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{g} \cdot 1\right]} k_3 + \frac{[w_2 \cdot 1]}{\left[\frac{bb}{g} \cdot 1\right]} &= 0 \\ k_3 + \frac{[w_3 \cdot 2]}{\left[\frac{cc}{g} \cdot 2\right]} &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

wobei die hier neu eingeführten Symbole folgende Bedeutung haben:

$$[w_2 \,.\, 1] = w_2 - \frac{\left[\frac{ab}{g}\right]}{\left[\frac{aa}{g}\right]} w_1, \qquad [w_3 \,.\, 1] = w_3 - \frac{\left[\frac{ac}{g}\right]}{\left[\frac{aa}{g}\right]} w_1,$$

$$[w_3 \,.\, 2] = [w_3 \,.\, 1] - \frac{\left[\frac{bc}{g} \cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{g} \cdot 1\right]} [w_2 \,.\, 1],$$

so werden die einzelnen v mit Hilfe der Korrelatengleichungen ermittelt und es ergeben sich die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten oder die ausgeglichenen Beobachtungen aus den Gleichungen:

$$x_1 = l_1 + v_1, \;\; x_2 = l_2 + v_2, \;\; \ldots \;\; x_n = l_n + v_n.$$

Da die Anzahl r der Bedingungsgleichungen kleiner ist als die Anzahl n der unbekannten Verbesserungen v, so kann man die Lösung des Problems der Ausgleichung bedingter Beobachtungen auch auf den Fall der vermittelnden Beobachtungen dadurch zurückführen, daß man mit Hilfe der r linearen Fehlergleichungen eine beliebige Auswahl von r Verbesserungen durch die übrigen $n - r$ Verbesserungen ausdrückt; man erhält dann ein System von Fehlergleichungen, welche keine weitere Bedingung zu erfüllen haben, als daß sie $[g\,v\,v]$

zu einem Minimum machen, und daher so behandelt werden können, wie die Fehlergleichungen vermittelnder Beobachtungen. Da aus dem transformierten System von Fehlergleichungen durch die vorausgegangene Elimination r Unbekannte verschwunden sind, so ist damit die Ausgleichung von n bedingten Beobachtungen mit r Bedingungsgleichungen zurückgeführt auf die Ausgleichung von n vermittelnden Beobachtungen mit $n - r$ Unbekannten.

Diese indirekte Methode der Ausgleichung bedingter Beobachtungen, welcher durch die willkürliche Auswahl der zu eliminierenden Unbekannten eine einseitige Behandlungsweise der Unbekannten nachgesagt werden kann, und die daher von Gauß (1826) als ein „unnatürlicher Umweg" bezeichnet wird, ist nur dann zu empfehlen, wenn damit eine Erleichterung der Rechenarbeit erzielt wird, wobei zu beachten kommt, daß die größte Mühe die Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen verursacht. Die Wahl des Ausgleichungsverfahrens wird sich daher in erster Linie nach der Anzahl n der Unbekannten und der Anzahl r der Bedingungsgleichungen zu richten haben. Da nach der direkten Lösung r Normalgleichungen, nach der indirekten Lösung aber $n - r$ Normalgleichungen aufzulösen sind, so wird man — abgesehen von sonstigen in dem Bau der Bedingungsgleichungen gelegenen Erschwernissen — in der Regel bei $n - r > r$, d. i. bei $n > 2r$ den direkten, bei $n < 2r$ aber den indirekten Weg einschlagen.

§ 55. Genauigkeitsbestimmung bedingter Beobachtungen.

Da das Problem der Ausgleichung bedingter Beobachtungen mit n Unbekannten und r Bedingungsgleichungen behandelt werden kann wie das Problem der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit $u = n - r$ Unbekannten und n Vermittlungsgleichungen, so kann man die Formeln für die charakteristischen Fehlermaße sofort hinschreiben, wenn man die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen

$$n - u = n - (n - r) = r$$

in die Formeln für die vermittelnden Beobachtungen einträgt. Es ist also der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung vor der Ausgleichung (gleiche Genauigkeiten vorausgesetzt):

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{r}}$$

mit der mittleren Unsicherheit: $\pm \frac{\mu}{\sqrt{2(n-u)}} = \pm \frac{\mu}{\sqrt{2r}}$,

und es sind unter Hinweis auf § 46 die mittleren Grenzen für den mittleren, durchschnittlichen beziehungsweise wahrscheinlichen Fehler:

$$\mu = \sqrt{\frac{[v\,v]}{r}}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2\,r}}\right) = \sqrt{\frac{[v\,v]}{r}}\left(1 + \frac{0{\cdot}707}{\sqrt{r}}\right)$$

$$\vartheta = \frac{[v]}{\sqrt{n\,r}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{\pi - 2}{2\,r}}\right) = \frac{[v]}{\sqrt{n\,r}}\left(1 \pm \frac{0{\cdot}756}{\sqrt{r}}\right)$$

$$\varrho = 0{\cdot}998\,\frac{[\sqrt{v}]^2}{n\sqrt{n\,r}}\left(1 \pm 2\sqrt{\frac{1}{\varkappa\, r\sqrt{\pi}} - \frac{1}{r}}\right) = \frac{[\sqrt{v}]^2}{n\sqrt{n\,r}}\left(1 \pm \frac{0{\cdot}855}{\sqrt{r}}\right).$$

Bei ungleich genauen Beobachtungen ist der mittlere Fehler der Gewichtseinheit: $\mu_0 = \sqrt{\frac{[g\,v\,v]}{r}}$ und der mittlere Fehler der i-ten Beobachtung mit dem Gewichte g_i vor der Ausgleichung: $\mu_i = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_i}}$ und nach der Ausgleichung: $M_i = \mu_0\sqrt{\mathfrak{a}_i\,\alpha_i + \mathfrak{b}_i\,\beta_i + \mathfrak{c}_i\,\gamma_i}$, worin $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die aus dem Eliminationsverfahren bei der Zurückführung bedingter Beobachtungen auf vermittelnde Beobachtungen hervorgegangenen Koeffizienten der modifizierten Vermittlungsgleichungen darstellen.

Hat man aber die Ausgleichung bedingter Beobachtungen nicht durch Zurückführung auf vermittelnde Beobachtungen vorgenommen, sondern nach der direkten Korrelatenmethode, so hat man im allgemeinen folgendermaßen vorzugehen:

Um den mittleren Fehler einer Unbekannten nach der Ausgleichung zu ermitteln, muß man dieselbe zunächst als Funktion sämtlicher Beobachtungsgrößen darstellen. Um z. B. den mittleren Fehler von x_i, wofür durch Beobachtung l_i erhalten wurde, nach der Ausgleichung zu ermitteln, hat man zu beachten, daß x_i vor der Ausgleichung den Wert $x_i = l_i$, nach der Ausgleichung aber den Wert $x_i = l_i + v_i$ besitzt. Setzt man hier für v_i seinen Wert ein, wie er sich aus den Korrelatengleichungen ergibt, so hat man — drei Bedingungsgleichungen vorausgesetzt:

$$x_i = l_i + \frac{a_i\,k_1}{g_i} + \frac{b_i\,k_2}{g_i} + \frac{c_i\,k_3}{g_i}.$$

Da die aus den Normalgleichungen hervorgehenden k als Funktionen der w und also auch als Funktionen der l dargestellt sind, so erscheint auch x_i als eine lineare Funktion der voneinander unabhängigen Beobachtungen l_1, l_2, . . . l_n ausgedrückt und man kann daher den mittleren Fehler von x_i aus den mittleren Fehlern der

Beobachtungen nach dem Fehlerübertragungsgesetze berechnen. Das erste Beispiel des folgenden Paragraphen wird diesen Vorgang deutlicher machen. Die ausführliche Behandlung dieses Gegenstandes bringen die §§ 60 und 61.

§ 56. Beispiele.

a) Winkelausgleichung in einem Dreieck.

In einem von Prof. Schwerd (1822) gemessenen Dreiecke („Die kleine Speyerer Basis") wurden für die durch Repetition gemessenen Winkel folgende Resultate erhalten:

$l_1 = 81^0\,21'\,43''36$	aus $g_1 = \ \ 70$	Repetitionen
$l_2 = 25\ \ 16\ \ 28{\cdot}85$	„ $g_2 = 101$	„
$l_3 = 73\ \ 21\ \ 46{\cdot}35$	„ $g_3 = \ \ 85$	„

Die Summe $l_1 + l_2 + l_3 = 179^0\,59'\,58''56$ weicht mit Rücksicht auf den sphärischen Exzeß im Betrage von $0''138$ von dem Sollwerte $\Sigma = 180^0\,00'\,00''138$ um den Widerspruch $w = -1''578$ ab. Es besteht sohin die Fehlergleichung

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0. \qquad (1)$$

1. Methode nach dem Problem der Ausgleichung bedingter Beobachtungen. — Da in der Fehlergleichung (1) alle Koeffizienten gleich 1 sind, so lauten die Korrelatengleichungen:

$$g_1 v_1 = k, \qquad g_2 v_2 = k, \qquad g_3 v_3 = k$$

und die Normalgleichung: $\left|\frac{1}{g}\right| k + w = 0.$

Hieraus ergibt sich:

$$k = -\frac{w}{\left|\frac{1}{g}\right|} = \frac{1''578}{0{\cdot}03595} = 43''894$$

und sohin:

$$v_1 = \frac{k}{g_1} = \frac{43''894}{70} = 0''627, \qquad v_2 = 0''435, \qquad v_3 = 0''516.$$

Die ausgeglichenen Winkel sind daher:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 + v_1 = 81^0\,21'\,43''987 \\ x_2 &= l_2 + v_2 = 25\ \ 16\ \ 29{\cdot}285 \\ x_3 &= l_3 + v_3 = \underline{73\ \ 21\ \ 46{\cdot}866} \end{aligned}$$

mit der Summe: $\Sigma = 180^0\,00'\,00''138$, wie es sein soll.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[g v v]}{r}} = \sqrt{69{\cdot}2625} = \pm 8''32,$$

somit haben die ursprünglichen Winkel folgende mittlere Fehler:

$$\mu_1 = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_1}} = 0''99, \qquad \mu_2 = 0''83, \qquad \mu_3 = 0''90.$$

Um die mittleren Fehler der ausgeglichenen Winkel zu erhalten, drücke man z. B. in dem ersten ausgeglichenen Winkel $x_1 = l_1 + v_1$ die Verbesserung v_1 durch alle Beobachtungen aus. Die Entwicklung nach Andeutung des § 55 gibt dann:

$$v_1 = \frac{k}{g_1} = -\frac{w}{g_1\left[\frac{1}{g}\right]} = \frac{\Sigma - (l_1 + l_2 + l_3)}{g_1\left[\frac{1}{g}\right]}$$

und

$$x_1 = \frac{\Sigma}{g_1\left[\frac{1}{g}\right]} + \left(1 - \frac{1}{g_1\left[\frac{1}{g}\right]}\right) l_1 - \frac{1}{g_1\left[\frac{1}{g}\right]}\, l_2 - \frac{1}{g_1\left[\frac{1}{g}\right]}\, l_3$$

als lineare Funktion aller Beobachtungen, so daß die Anwendung des Fehlerübertragungsgesetzes nunmehr zulässig erscheint. Als mittleren Fehler des ersten Winkels nach der Ausgleichung erhält man sohin nach (9), § 23, S. 95:

$$M_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{g_1\left[\frac{1}{g}\right]}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{1}{g_1\left[\frac{1}{g}\right]}\right)^2 \mu_2^2 + \left(\frac{1}{g_1\left[\frac{1}{g}\right]}\right)^2 \mu_3^2} =$$

$$= \mu_0 \sqrt{\frac{\frac{1}{g_1}\left(\frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3}\right)}{\left[\frac{1}{g}\right]}} = 0''77$$

und analog für die übrigen Winkel:

$$M_2 = \mu_0 \sqrt{\frac{\frac{1}{g_2}\left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_3}\right)}{\left[\frac{1}{g}\right]}} = 0''70, \qquad M_3 = \mu_0 \sqrt{\frac{\frac{1}{g_3}\left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2}\right)}{\left[\frac{1}{g}\right]}} = 0''74.$$

2. Methode nach dem Problem der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen. — Drückt man aus der Fehlergleichung (1) eine Verbesserung, z. B. v_1 durch die übrigen aus, so erhält man

die drei Fehlergleichungen vermittelnder Beobachtungen, wenn $v_2 = y$ und $v_3 = z$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} -y - z - w &= v_1 \\ +y \qquad\quad &= v_2 \\ +z \quad &= v_3. \end{aligned}$$

Mit Bezug auf die allgemeine Form der Fehlergleichungen

$$a\,y + b\,z - l = v$$

stellt sich die tabellarische Rechnung wie folgt:

g	a	b	l	$g\,a\,a$	$g\,a\,b$	$g\,a\,l$	$g\,b\,b$	$g\,b\,l$
70	−1	−1	1″578	70	70	−110″460	70	−110″460
101	+1	0	0	101	0	0	0	0
85	0	+1	0	0	0	0	85	0
				171	70	−110″460	155	110″460

Die Normalgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} 171\,y + 70\,z &= 110{\cdot}460 \\ 70\,y + 155\,z &= 110{\cdot}460. \end{aligned}$$

Die Auflösung ergibt: $y = v_2 = -0''435$

$$z = v_3 = 0''516$$

und schließlich $x = v_1 = 0{\cdot}627$ als Ergänzung zu w, also dieselben Resultate, wie ad 1.) — Die Genauigkeitsbestimmung nimmt folgenden Verlauf. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[g\,v\,v]}{n-u}} = \sqrt{\frac{69{\cdot}2625}{3-2}} = \pm 8''32,$$

genau so wie vorher, was auch bei den mittleren Fehlern der unausgeglichenen Winkel der Fall ist. Um die mittleren Fehler nach der Ausgleichung zu bestimmen, stellen wir die Gewichtsgleichungen auf:

$$\begin{aligned} 171\,k'_y + 70\,k''_y &= 1 \qquad & 171\,k'_z + 70\,k''_z &= 0 \\ 70\,k'_y + 155\,k''_y &= 0 \qquad & 70\,k'_z + 155\,k''_z &= 1. \end{aligned}$$

Die Auflösungen ergeben:

$$k'_y = 0{\cdot}007174, \qquad k''_y = -0{\cdot}003240 = k'_z, \qquad k''_z = 0{\cdot}007915$$

Nun bildet man nach den Formeln $\alpha_i = a_i\,k'_y + b_i\,k''_y$ und $\beta_i = a_i\,k'_z + b_i\,k''_z$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -1\,.\,k'_y - 1\,.\,k''_y = -0{\cdot}003934, \quad & \beta_1 &= -1\,.\,k'_z - 1\,.\,k''_z = -0{\cdot}004675, \\ \alpha_2 &= +1\,.\,k'_y = +0{\cdot}007174, \quad & \beta_2 &= +1\,.\,k'_z = -0{\cdot}003240, \\ \alpha_3 &= +1\,.\,k''_y = -0{\cdot}003240, \quad & \beta_3 &= +1\,.\,k''_z = +0{\cdot}007915. \end{aligned}$$

und im Sinne der Formel $M_i = \mu_0 \sqrt{a_i \alpha_i + b_i \beta_i} = \mu_0 \sqrt{S}$ tabellarisch:

$a\alpha$	$b\beta$	S	$\sqrt{S}$
0·003934	0·004675	0·008609	0·093
0·007174	0	0·007174	0·085
0	0·007915	0·007915	0·089

Die mittleren Fehler nach der Ausgleichung sind daher:

$$M_1 = 0{\cdot}093 \,.\, 8{\cdot}32 = 0''77$$
$$M_2 = 0{\cdot}085 \,.\, 8{\cdot}32 = 0{\cdot}71$$
$$M_3 = 0{\cdot}089 \,.\, 8{\cdot}32 = 0{\cdot}74.$$

3. Methode nach dem Problem der Ausgleichung direkter Beobachtungen. — Für den ersten Winkel x_1 hat man zwei Bestimmungen, nämlich:

$$l_1' = l_1 = 81^0\,21'\,43''36 \text{ mit dem Gewichte } g_1' = g_1 = \frac{1}{\frac{1}{g_1}} = 70$$

$$l_1'' = l_1 - w = 81^0\,21'\,44''938 \text{ mit dem Gewichte } g_1'' = \frac{1}{\frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3}} = 46{\cdot}2.$$

Nimmt man von beiden Bestimmungen das allgemeine arithmetische Mittel, so ergibt sich der ausgeglichene Winkel x_1:

$$x_1 = \frac{g_1' l_1' + g_1'' l_1''}{g_1' + g_1''} = 81^0\,21'\,43''987$$

und analog x_2 und x_3 genau so wie oben. Der mittlere Fehler des Winkels x_1 nach der Ausgleichung ergibt sich nach der Formel:

$$M_1 = \frac{\mu_0}{\sqrt{[g]}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_1' + g_1''}} = \mu_0 \sqrt{\frac{\frac{1}{g_1}\left(\frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3}\right)}{\left[\frac{1}{g}\right]}} = 0''77$$

und analog:

$$M_2 = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_2' + g_2''}} = 0''70, \quad M_3 = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_3' + g_3''}} = 0''74.$$

b) Ausgleichung eines Nivellements.

Wird ein Nivellement so geführt, daß es ein geschlossenes Polygon bildet, das Nivellement also zu seinem Ausgangspunkte wieder zurückkehrt, so entsteht eine Nivellementschleife oder ein Nivellementpolygon. Die auf dem Nivellementwege nivellitisch festgelegten Punkte

sind die Eckpunkte des Nivellementpolygons. Die algebraische Summe der Gefälle in einer Schleife soll theoretisch die Summe Null ergeben; die Beobachtungsfehler verursachen aber einen sogenannten **Schlußfehler**, der durch die Ausgleichungsrechnung zu tilgen ist.

Besteht ein Nivellementpolygon aus n Seiten mit den Längen $D_1, D_2, \ldots D_n$ und sind die wahren Gefälle $H_1, H_2, \ldots H_n$, so besteht die Bedingungsgleichung:

$$H_1 + H_2 + \cdots + H_n = [H] = 0.$$

Hat das Nivellement die mit unvermeidlichen Fehlern behafteten Gefälle $h_1, h_2, \ldots h_n$ ergeben, so lautet die Widerspruchsgleichung:

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_n = [h] = w.$$

Sind die an den nivellierten Gefällen anzubringenden Verbesserungen: $v_1, v_2, \ldots v_n$, so besteht die Fehlergleichung:

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + w = 0.$$

Nimmt man die Gewichte umgekehrt proportional den nivellierten Distanzen an, setzt also allgemein $g = \frac{1}{D}$, so geht die Normalgleichung für die Korrelate k

$$\left[\frac{aa}{g}\right] k + w = 0,$$

da sämtliche Koeffizienten $a = 1$ sind, über in:

$$[D]\, k + w = 0.$$

Bezeichnet man $[D] = U$ als den Umfang des Polygons, so stellt die Korrelate $k = -\frac{w}{U}$ die auf die Längeneinheit bezogene Verbesserung dar. Folglich sind die innerhalb der einzelnen Polygonseiten anzubringenden Verbesserungen allgemein ausgedrückt durch: $v_i = D_i k$.

Werden die Entfernungen D in Kilometern angegeben, so stellt der mittlere Fehler der Gewichtseinheit $\mu_0 = \sqrt{\left[\frac{vv}{D}\right]}$ den mittleren Nivellementfehler auf einer Strecke von 1 *km* Länge oder den sogenannten **mittleren Kilometerfehler** dar.

Es seien in einem vierseitigen Nivellementpolygon:

$$
\begin{array}{ll}
D_1 = 0{\cdot}436\ km & h_1 = -25{\cdot}173\ m \\
D_2 = 0{\cdot}372\ \text{„} & h_2 = -33{\cdot}762\ \text{„} \\
D_3 = 1{\cdot}074\ \text{„} & h_3 = +16{\cdot}405\ \text{„} \\
D_4 = 0{\cdot}898\ \text{„} & h_4 = +42{\cdot}598\ \text{„} \\
\hline
U = [D] = 2{\cdot}780\ km & w = [h] = +0{\cdot}068\ m = +68\ mm.
\end{array}
$$

Die Rechnung nach vorstehender Anleitung gibt:

$$k = -\frac{68}{2\cdot780} = -24\cdot5\ mm.$$

$$\begin{array}{ll}
v_1 = D_1 k = -10\cdot6\ mm & H_1 = h_1 + v_1 = -25\cdot1836\ m \\
v_2 = D_2 k = -\ \ 9\cdot1\ \ „ & H_2 = h_2 + v_2 = -33\cdot7711\ „ \\
v_3 = D_3 k = -26\cdot3\ \ „ & H_3 = h_3 + v_3 = \ \ \ 16\cdot3787\ „ \\
\underline{v_4 = D_4 k = -22\cdot0\ \ „} & \underline{H_4 = h_4 + v_4 = -43\cdot5760\ „} \\
[v] = -w = -68\cdot0\ mm & [H] = \qquad\qquad 0\cdot0000.
\end{array}$$

Der mittlere Kilometerfehler beträgt:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{1663\cdot33}{1}} = \pm 40\cdot8\ mm.$$

§ 57. Zusammenhang zwischen direkten und bedingten Beobachtungen.

Fügt man zu den n Fehlergleichungen direkter Beobachtungen

$$\begin{aligned}
x &= l_1 + v_1 \\
x &= l_2 + v_2 \\
&\ldots\ldots \\
x &= l_n + v_n
\end{aligned}$$

die stets erfüllbaren $(n - 1)$ Bedingungsgleichungen hinzu:

$$l_1 + v_1 = l_2 + v_2 = \cdots = l_n + v_n$$

und bezeichnet man die Unterschiede oder die Widersprüche zwischen der ersten Beobachtung und den übrigen $(n - 1)$ Beobachtungen der Reihe nach mit d_1, d_2, d_3, . . . d_{n-1}, so erhält man die $(n - 1)$ Widerspruchsgleichungen:

$$\begin{aligned}
l_1 - l_2 &= d_1 \\
l_1 - l_3 &= d_2 \\
&\ldots\ldots \\
l_1 - l_n &= d_{n-1}
\end{aligned}$$

sowie die $(n - 1)$ Fehlergleichungen bedingter Beobachtungen:

$$\begin{aligned}
v_1 - v_2 + d_1 &= 0 \\
v_1 - v_3 + d_2 &= 0 \\
&\ldots\ldots \\
v_1 - v_n + d_{n-1} &= 0.
\end{aligned}$$

Soll der Minimumsbedingung $[v\,v] = min$ Genüge geleistet werden, so muß die Gleichung bestehen:

$$v_1\, dv_1 + v_2\, dv_2 \ .\ .\ .\ + v_n\, dv_n = 0.$$

Damit diese Gleichung mit den Fehlergleichungen bedingter Beobachtungen gleichzeitig befriedigt werde, differenziere man diese

Fehlergleichungen und multipliziere die so erhaltenen Gleichungen der Reihe nach mit den vorläufig noch unbestimmten Korrelaten k_1, $k_2, \ldots k_{n-1}$. Man erhält so:

$$\begin{aligned} k_1\, dr_1 - k_1\, dr_2 &= 0 \\ k_2\, dr_1 - k_2\, dr_3 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ k_{n-1}\, dr_1 - k_{n-1}\, dr_n &= 0. \end{aligned}$$

Durch Addition entsteht hieraus die Summengleichung:

$$(k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1})\, dr_1 - k_1\, dr_2 - k_2\, dr_3 - \cdots - k_{n-1}\, dr_n = 0,$$

welche, mit der aus der Minimumsbedingung hervorgegangenen Gleichung verglichen, nach dem Satze von den gleichen Koeffizienten folgende Korrelatengleichungen liefert:

$$\begin{aligned} r_1 &= k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} \\ r_2 &= -k_1 \\ r_3 &= -k_2 \\ &\ldots \\ r_n &= -k_{n-1}. \end{aligned}$$

Substituiert man diese Werte der scheinbaren Fehler in die Fehlergleichungen bedingter Beobachtungen, so bekommt man die $(n-1)$ Normalgleichungen für die Bestimmung der $(n-1)$ Korrelaten:

$$\begin{aligned} 2\,k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_{n-1} + d_1 &= 0 \\ k_1 + 2\,k_2 + k_3 + \cdots + k_{n-1} + d_2 &= 0 \\ k_1 + k_2 + 2\,k_3 + \cdots + k_{n-1} + d_3 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + 2\,k_{n-1} + d_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Werden dieselben nach den Korrelaten aufgelöst, so erhält man diese als Funktionen der Beobachtungsdifferenzen, und setzt man die nunmehr bestimmten Korrelaten in die Korrelatengleichungen ein, so erscheinen auch die Verbesserungen r durch die Differenzen d ausgedrückt. Die Auflösung der Normalgleichungen geschieht am einfachsten dadurch, daß man sie zunächst addiert, wodurch erhalten wird:

$$n\,(k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1}) = -(d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1})$$

oder:

$$[k] = -\frac{[d]}{n}.$$

Schreibt man jetzt die Normalgleichungen in der Form

$$\begin{aligned} [k] + k_1 + d_1 &= 0 \\ [k] + k_2 + d_2 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ [k] + k_{n-1} + d_{n-1} &= 0, \end{aligned}$$

so ergeben sich sofort die einzelnen Korrelaten:

$$k_1 = \frac{[d]}{n} - d_1, \qquad k_2 = \frac{[d]}{n} - d_2, \text{ usw.}$$

und die Verbesserungen sind:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{[d]}{n} \\ v_2 &= -\frac{[d]}{n} + d_1 \\ &\cdots\cdots\cdot \\ v_n &= -\frac{[d]}{n} + d_{n-1} \end{aligned} \tag{1}$$

Setzt man die Verbesserung der ersten Beobachtung in die erste Fehlergleichung direkter Beobachtungen ein, so ergibt sich das arithmetische Mittel:

$$x = l_1 - \frac{[d]}{n}.$$

Bildet man die Summe der Gleichungen (1), so kommt die bekannte Beziehung $[v] = 0$ zum Vorschein: bildet man die Summe der Quadrate aller Verbesserungen, so erhält man die zur Kontrolle für die Berechnung der Fehlerquadratsumme dienliche Formel:

$$[v\,v] = [d\,d] - \frac{[d]^2}{n}. \tag{2}$$

Als Zahlenbeispiel benützen wir die in **Eggerts** Geodäsie enthaltene Reihe von Längenmessungen:

s in m	v_0 in cm	$v_0\,v_0$	d in cm	$d\,d$
624·63	+ 4	16		
69	— 2	4	— 6	36
80	— 13	169	— 17	289
58	+ 9	81	+ 5	25
64	+ 3	9	— 1	1
54	+ 13	169	+ 9	81
73	— 6	36	— 10	100
80	— 13	169	— 17	289
54	+ 13	169	+ 9	81
60	+ 1	1	— 3	9
77	— 10	100	— 14	196
624·70	— 3	9	— 7	49
624·67	— 4	932	— 52	1156

Das arithmetische Mittel ist $x = \frac{[s]}{12} = 624{\cdot}67$ mit dem Rest 0·04 oder genau $x = 624{\cdot}6733\ldots$ Rechnet man mit dem abgekürzten Werte $x_0 = 624{\cdot}67$ die scheinbaren Fehler v_0, so erhält man für $[v_0] = -0{\cdot}04$ den bei der Mittelbildung zurückgebliebenen Rest. Da aber $[v_0]$ gleich Null sein soll, so wird auch die Summe $[v_0 v_0] = 932$ nur einen Näherungswert darstellen.

Will man den genauen Wert dieser Summe erhalten, so hat man folgendes zu beachten. Es ist die Differenz zwischen dem genauen und dem abgekürzten Mittel $x - x_0 = \delta$ gleich der Differenz zwischen dem genauen und genäherten Wert des scheinbaren Fehlers, so daß man hat:

$$v = v_0 + \delta,$$

$$[v v] = [v_0 v_0] + 2\,[v_0]\,\delta + n\,.\,\delta_x^2.$$

Im obigen Beispiele ist $\delta_x = +\frac{1}{3}\,cm$, $[v_0] = -4\,cm$, sohin ist

$$[v v] = 932 - 2{\cdot}66 + 1{\cdot}33 = 930{\cdot}67.$$

Diesen genauen Wert erhält man aber sofort, wenn man die Beobachtungsdifferenzen d und die Formel (2)

$$[v v] = [d d] - \frac{[d]^2}{n}$$

verwendet, denn es ergibt sich:

$$[d d] = 1156, \quad [d] = -52, \quad \frac{[d]^2}{n} = 225{\cdot}33$$

somit:

$$[v v] = 930{\cdot}67.$$

Die Berechnung mittels der neuen Formel (2) ist sohin nicht nur einfacher, sondern auch genauer, als die nach der Methode der direkten Berechnung der einzelnen v^2 und auch einfacher als die Berechnung mittels der im folgenden § 58 abgeleiteten älteren Formel (1), wo statt der kleinen Beobachtungsdifferenzen d die weit größeren Beobachtungsresultate l vorkommen.

§ 58. Kontrollberechnung der Fehlerquadratsummen.

Die Berechnung der Summen $[g v v]$ beziehungsweise $[v v]$ kann direkt durch Quadrieren und Multiplizieren oder mit Hilfe von Quadrat- und Produktentafeln erfolgen; sie kann aber auch indirekt auf verschiedene Weise geschehen.

1.) Für den Fall direkter Beobachtungen erhält man eine geeignete Kontrollformel in folgender Weise. Es ist

$$\begin{array}{ll} v_1 = x - l_1 & v_1^2 = x^2 - 2\,x\,l_1 + l_1^2 \\ v_2 = x - l_2 & v_2^2 = x^2 - 2\,x\,l_2 + l_2^2 \\ \dots\dots & \dots\dots\dots \\ v_n = x - l_n & v_n^2 = x^2 - 2\,x\,l_n + l_n^2 \end{array}$$

$$\text{Summe } [v\,v] = n\,x^2 - 2\,x\,[l] + [l\,l].$$

Wird in die letzte Summengleichung das einfache arithmetische Mittel $x = \frac{[l]}{n}$ eingeführt, so resultiert:

$$[v\,v] = [l\,l] - \frac{[l]^2}{n}, \tag{1}$$

eine Kontrollformel, worin die Summen der Fehlerquadrate als eine Funktion der Beobachtungsgrößen dargestellt ist.

Für ungleich genaue Beobachtungen hat man in die Summengleichung

$$[g\,v\,v] = [g]\,x^2 - 2\,x\,[g\,l] + [g\,l\,l]$$

das allgemeine arithmetische Mittel $x = \frac{[g\,l]}{[g]}$ einzuführen und erhält als Kontrollformel:

$$[g\,v\,v] = [g\,l\,l] - \frac{[g\,l]^2}{[g]}. \tag{2}$$

Die Formeln (1) und (2) können auch in die Form

$$[v\,v] = [l\,l] - n\,x^2. \tag{3}$$

$$[g\,v\,v] = [g\,l\,l] - [g]\,x^2 \tag{4}$$

gebracht werden, welche aber ebenso wie die Formeln (1) und (2) sehr unpraktisch sind, weil die Bildung der Quadrate und Produkte aus den gewöhnlich sehr großen Zahlenwerten l ziemlich beschwerlich ist. Man kann sich jedoch die Rechenarbeit wesentlich erleichtern, wenn man ebenso wie bei der Bildung des arithmetischen Mittels verfährt, wo man von den Hauptwerten l einen runden Näherungswert l_0 vorläufig in Abzug bringt, und die ganze Berechnung auf die übrigbleibenden Reste basiert, indem man also z. B. bei Winkelgrößen die Grade und Minuten wegläßt, um sie später zu dem arithmetischen Mittel der Sekunden wieder hinzuzufügen. Schreibt man nämlich

$$\begin{array}{l} l_1 = l_0 + \varDelta\,l_1 \\ l_2 = l_0 + \varDelta\,l_2 \\ \dots\dots \\ l_n = l_0 + \varDelta\,l_n, \end{array}$$

so ist das arithmetische Mittel:

$$x = l_0 + \frac{[\varDelta l]}{n} \tag{5}$$

und man hat weiters:

$$[\varDelta l . \varDelta l] = [l l] - 2 l_0 [l] + n l_0^2,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$[l l] = [v v] + \frac{[l]^2}{n} \qquad \text{und} \quad [l] = n x:$$

$$[\varDelta l . \varDelta l] = [v v] + n x^2 - 2 l_0 n x + n l_0^2 = [v v] + n (x - l_0)^2;$$

daher ist

$$[v v] = [\varDelta l . \varDelta l] - n (x - l_0)^2$$

und schließlich mit Rücksicht auf (5):

$$[v v] = [\varDelta l . \varDelta l] - \frac{[\varDelta l]^2}{n}, \tag{6}$$

worin die Summe der Fehlerquadrate als eine Funktion von Beobachtungsresten dargestellt erscheint. Wir haben im § 57 eine Formel kennen gelernt, wo diese Summe als eine Funktion der Beobachtungsdifferenzen ausgedrückt ist, und welche eine einfachere Rechnung als die Formeln (1) und (6) gestattet.

2.) Für den Fall vermittelnder Beobachtungen mit zwei Unbekannten nimmt die Ableitung folgenden Gang: Werden die Fehlergleichungen

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_1 x + b_1 y - l_1 \\
v_2 &= a_2 x + b_2 y - l_2 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
v_n &= a_n x + b_n y - l_n
\end{aligned}$$

quadriert und hierauf addiert, so erhält man die Summengleichung:

$$[v v] = [a a]\, x^2 + 2 [a b]\, x y - 2 [a l]\, x + [b b]\, y^2 - 2 [b l]\, y + [l l]. \tag{7}$$

Dividiert man das Quadrat des aus der ersten Normalgleichung herübergenommenen Ausdruckes (S. 164):

$$[a a]\, x + [a b]\, y - [a l]$$

durch $[a a]$, so bekommt man:

$$\frac{\{[a a]\, x + [a b]\, y - [a l]\}^2}{[a a]} = [a a]\, x^2 + 2 [a b]\, x y - 2 [a l]\, x + \\ + \frac{[a b]^2}{[a a]}\, y^2 - 2 \frac{[a b]\,[a l]}{[a a]}\, y + \frac{[a l]^2}{[a a]}.$$

Wird diese Gleichung von (7) subtrahiert, so entsteht:

$$[v\,v] - \frac{\{[a\,a]\,x + [a\,b]\,y - [a\,l]\}^2}{[a\,a]} = \left([b\,b] - \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]}\right) y^2 -$$

$$- 2\left([b\,l] - \frac{[a\,b]\,[a\,l]}{[a\,a]}\right) y + \left([l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]}\right) =$$

$$= [b\,b\,.\,1]\,y^2 - 2\,[b\,l\,.\,1]\,y + [l\,l\,.\,1]. \qquad (8)$$

Dividiert man das Quadrat des aus den reduzierten Normalgleichungen herübergenommenen Ausdruckes (S. 167) $[bb.1]\,y - [bl.1]$ durch $[b\,b\,.\,1]$, so wird:

$$\frac{\{[b\,b\,.\,1]\,y - [b\,l\,.\,1]\}^2}{[b\,b\,.\,1]} = [b\,b\,.\,1]\,y^2 - 2\,[b\,l\,.\,1]\,y + \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]}. \qquad (9)$$

Durch subtraktive Verbindung von (8) und (9) entsteht:

$$[v\,v] - \frac{\{[a\,a]\,x + [a\,b]\,y - [a\,l]\}^2}{[a\,a]} - \frac{\{[b\,b\,.\,1]\,y - [b\,l\,.\,1]\}^2}{[b\,b\,.\,1]}$$

$$= [l\,l\,.\,1] - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} = [l\,l\,.\,2].$$

Da aber die beiden aus den Normalgleichungen herübergenommenen Ausdrücke gleich Null sind, so ergibt sich schließlich die Kontrollformel:

$$[v\,v] = [l\,l\,.\,2]. \qquad (10)$$

Auch diese Formel ist nur dann praktisch geeignet, wenn die l schon von vornherein nicht groß oder durch Einführung von Näherungswerten vorerst auf kleine Zahlenwerte reduziert worden sind. Zu bemerken wäre noch, daß $[l\,l\,.\,2]$ bei Fehlergleichungen mit zwei Unbekannten auch durch Vertauschung von a und b bestimmt werden kann und auf beiden Wegen übereinstimmend erhalten werden muß.

In der gleichen Weise, wie hier mit zwei Unbekannten vorgegangen ist, findet man für drei Unbekannte:

$$[v\,v] = [l\,l\,.\,3] \qquad (11)$$

beziehungsweise:

$$[g\,v\,v] = [g\,l\,l\,.\,3]. \qquad (12)$$

Löst man $[l\,l\,.\,3]$ beziehungsweise $[g\,l\,l\,.\,3]$ in die Bestandteile auf (wie im § 46, S. 174), so kann man auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned} [v\,v] &= [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,l\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \\ [g\,v\,v] &= [g\,l\,l] - \frac{[g\,a\,l]^2}{[g\,a\,a]} - \frac{[g\,b\,l\,.\,1]^2}{[g\,b\,b\,.\,1]} - \frac{[g\,c\,l\,.\,2]^2}{[g\,c\,c\,.\,2]} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

wobei die hier vorkommenden Symbole nach den im § 44 angeführten Schematen gebildet werden.

Der Wert der doppelten Berechnung von $[vv]$ besteht in der Kontrolle, welche auch auf die Bildung und Auflösung der Normalgleichungen ausgeübt wird. Da aber die hier vorgeführten Formeln nur bei Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahrens brauchbar erscheinen, so möge noch eine andere, bequemere Formel hier Platz finden, welche wie folgt erhalten wird:

Multipliziert man die Fehlergleichungen

$$v_i = a_i x + b_i y + c_i z + \cdots - l_i$$

zuerst mit jedem zugehörigen l_i und addiert sie dann, so erhält man:

$$[vl] = [al]\,x + [bl]\,y + [cl]\,z + \cdots - [ll].$$

Multipliziert man hierauf die Fehlergleichungen mit jedem zugehörigen v_i und addiert sie, so ergibt sich:

$$[vv] = [av]\,x + [bv]\,y + [cv]\,z + \cdots - [lv].$$

Bringt man beide Summengleichungen in Beziehung, so resultiert:

$$[vv] = [ll] - [al]\,x - [bl]\,y - [cl]\,z - \cdots \qquad (14)$$

beziehungsweise:

$$[gvv] = [gll] - [gal]\,x - [gbl]\,y - [gcl]\,z - \cdots \qquad (15)$$

3.) Für den Fall bedingter Beobachtungen besteht ebenfalls eine die ganze Rechnung von den Bedingungsgleichungen an kontrollierende Formel.

Multipliziert man die Korrelatengleichungen mit jedem zugehörigen v und addiert sie dann, so erhält man:

$$[gvv] = [av]\,k_1 + [bv]\,k_2 + \cdots + [qv]\,k_q.$$

Setzt man hierin die aus den Fehlergleichungen hervorgehenden Ausdrücke

$$[av] = -w_1, \qquad [bv] = -w_2, \quad \ldots \quad [qv] = -w_q$$

ein, so ergibt sich die Kontrollformel:

$$[gvv] = -[wk] \qquad (16)$$

beziehungsweise:

$$[vv] = -[wk]. \qquad (17)$$

Eliminiert man aus $[wk]$ die k mit Hilfe der Gleichungen (2) des § 54, so kann man auch schreiben:

$$[gvv] = \frac{w_1^2}{\left[\frac{aa}{g}\right]} + \frac{[w_2 . 1]^2}{\left[\frac{bb}{g} . 1\right]} + \frac{[w_3 . 2]^2}{\left[\frac{cc}{g} . 2\right]} \qquad (18)$$

beziehungsweise:

$$[v v]=\frac{w_1^2}{[a a]}+\frac{[w_2 . 1]^2}{[b b . 1]}+\frac{[w_3 . 2]^2}{[c c . 2]} . \qquad (19)$$

Wenden wir die Formel (11) auf das Zahlenbeispiel *a)* des § 52 an, so gibt die Ausrechnung:

$$[b b . 1]=[b b]-\frac{[a b]^2}{[a a]}=15-\frac{36}{27}=13 \cdot \dot{6}$$

$$[b c . 1]=[b c]-\frac{[a b][a c]}{[a a]}=1$$

$$[b l . 1]=[b l]-\frac{[a b][a l]}{[a a]}=70-\frac{528}{27}=50 \cdot \dot{4}$$

$$[c c . 1]=[c c]-\frac{[a c]^2}{[a a]}=54$$

$$[c l . 1]=[c l]-\frac{[a c][a l]}{[a a]}=107$$

$$[l l . 1]=[l l]-\frac{[a l]^2}{[a a]}=671-\frac{88^2}{27}=384 \cdot 1852$$

$$[c c . 2]=[c c . 1]-\frac{[b c . 1]^2}{[b b . 1]}=54-\frac{1}{13 \cdot \dot{6}}=53 \cdot 9268$$

$$[c l . 2]=[c l . 1]-\frac{[b c . 1][b l . 1]}{[b b . 1]}=107-\frac{50 \cdot \dot{4}}{13 \cdot \dot{6}}=103 \cdot 3089$$

$$[l l . 2]=[l l . 1]-\frac{[b l . 1]^2}{[b b . 1]}=384 \cdot 1852-\frac{50 \cdot \dot{4}^2}{13 \cdot \dot{6}}=197 \cdot 9919$$

$$[v v]=[l l . 3]=[l l . 2]-\frac{[c l . 2]^2}{[c c . 2]}=197 \cdot 9919-\frac{103 \cdot 3089^2}{53 \cdot 9268}=0 \cdot 0804 .$$

Von den hier aufgeführten Zahlenansätzen sind alle bereits gelegentlich der Bildung der reduzierten Normal- und Gewichtsgleichungen erhalten worden bis auf die Summe $[l l]$, welche man daher der tabellarischen Berechnung der Koeffizienten noch angliedert. (S. 197).

Die Anwendung der Formel (16) auf das Zahlenbeispiel *a)* des § 56 gibt:

$$[q v v]=-[w k]=43 \cdot 894 \,.\, 1 \cdot 578=69 \cdot 2647 .$$

In beiden Fällen herrscht bis auf die Abrundungsdifferenzen Übereinstimmung.

§ 59. Summenproben.

Bei der Lösung umfangreicher Ausgleichungsaufgaben ist es rationell, die ganzen Rechnungen mit Kontrollen auszuführen. Die

Theorie der Fehlerquadratsummen hat deren bereits so manche zur Verfügung gestellt. So müssen bei richtiger Auflösung der Normalgleichungen und Berechnung der scheinbaren Fehler folgende Bedingungsgleichungen erfüllt sein, wobei wir uns der Einfachheit halber auf den Fall gleicher Genauigkeit mit drei Unbekannten beschränken wollen:

Bei Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen:

$$[a\,v] = 0, \qquad [b\,v] = 0, \qquad [c\,v] = 0. \tag{1}$$

Bei Ausgleichung bedingter Beobachtungen:

$$[a\,v] = -w_1, \qquad [b\,v] = -w_2, \qquad [c\,v] = -w_3. \tag{2}$$

Diese Kontrollen sind ebenso wie die im vorigen Paragraphen behandelte Doppelberechnung von $[v\,v]$ zwar durchgreifend für die ganze Zahlenberechnung, aber sie sind nur summarische oder Schlußkontrollen, d. h. sie zeigen das Vorhandensein eines Fehlers erst nach Beendigung der mühsamen Arbeit an. Eine auch im Zuge der Rechnungsausführung schrittweise wirksame Probe erhält man durch die Einführung von Summengliedern.

a) Für vermittelnde Beobachtungen.

Ausgehend von den Fehlergleichungen vermittelnder Beobachtungen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z - l_1 = v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z - l_2 = v_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n x + b_n y + c_n z - l_n = v_n \end{array}\right\} \tag{3}$$

und den Normalgleichungen für die Unbekannten x, y, z:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z - [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z - [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z - [c\,l] = 0 \end{array}\right\} \tag{4}$$

bilde man die Summen der Koeffizienten einer jeden Fehlergleichung, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + b_1 + c_1 = s_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 = s_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n + b_n + c_n = s_n \end{array}\right\} \tag{5}$$

Multipliziert man die einzelnen Gleichungen von (5) der Reihe nach mit den zugehörigen a_i, b_i, c_i und addiert jedesmal, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a] + [a\,b] + [a\,c] = [a\,s] \\ [a\,b] + [b\,b] + [b\,c] = [b\,s] \\ [a\,c] + [b\,c] + [c\,c] = [c\,s] \end{array}\right\} \tag{6}$$

Multipliziert man die Fehlergleichungen (3) mit den zugehörigen s_i und addiert sie sodann, so entsteht:

$$[a s]\, x + [b s]\, y + [c s]\, z - [l s] = [v s].$$

Da aber laut (1)

$$[a v] + [b v] + [c v] = 0$$

also auch $[v s] = 0$ ist, so resultiert:

$$[a s]\, x + [b s]\, y + [c s]\, z - [l s] = 0. \qquad (7)$$

Dieselbe Gleichung ergibt sich aber mit Bezug auf (6) auch direkt durch Addition der Normalgleichungen (4), weshalb sie die Summengleichung genannt wird. In der zweimaligen unabhängigen Berechnung dieser Summengleichung erscheint die Aufstellung der Normalgleichungen in sicherer Weise kontrolliert. Führt man die Summengleichung wie eine selbständige Normalgleichung weiter und unterzieht man sie denselben Operationen wie die eigentlichen Normalgleichungen, so besteht die Rechenkontrolle in der Auflösung der Normalgleichungen nach Helmert*) darin, daß die Summe aller durch Reduktion veränderter Gleichungen die in analoger Weise direkt abgeleitete Summengleichung übereinstimmend ergeben muß. Wird z. B. aus den Normalgleichungen die Unbekannte x eliminiert und aus den beiden zurückbleibenden Gleichungen die Summengleichung gebildet, nämlich:

$$\begin{array}{rl} & [b b.1]\, y + [b c.1]\, z - [b l.1] = 0 \\ & [b c.1]\, y + [c c.1]\, z - [c l.1] = 0 \\ \hline \text{Summe:} & [b s.1]\, y + [c s.1]\, z - [l s.1] = 0, \end{array}$$

so besteht die Kontrolle darin, daß die Beziehungen stattfinden müssen:

$$\begin{aligned} [b b.1] + [b c.1] &= [b s.1] \\ [b c.1] + [c c.1] &= [c s.1] \\ [b l.1] + [c l.1] &= [l s.1], \end{aligned}$$

wobei die Glieder rechter Hand unabhängig nach dem Schema

$$[i k.1] = [i k] - \frac{[a i]\,[a k]}{[a a]}$$

zu ermitteln sind. Stimmen diese separat gerechneten Summenglieder mit den Koeffizienten der reduzierten Summengleichung überein, so ist im Gange des Auflösungsverfahrens kein Rechenfehler unterlaufen, und man kann, wenn alle Summengleichungen derartige Über-

*) F. R. Helmert: Die Ausgleichungsrechnung usw. 2. Aufl. 1907, S. 131.

einstimmungen aufweisen, mit großer Sicherheit annehmen, daß von den Fehlergleichungen an alles in Ordnung ist.

b) **Für bedingte Beobachtungen.**

Bei bedingten Beobachtungen werden die Korrelaten- und Normalgleichungen in gleicher Weise behandelt, wie bei vermittelnden Beobachtungen die Fehler- und Normalgleichungen. Wir gehen also aus von den Korrelatengleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 = r_1 \\ a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 = r_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n k_1 + b_n k_2 + c_n k_3 = r_n \end{array}\right\} \qquad (8)$$

und den Normalgleichungen für die Korrelaten k_1, k_2, k_3:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + w_1 = 0 \\ [a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + w_2 = 0 \\ [a\,c]\,k_1 + [b\,c]\,k_2 + [c\,c]\,k_3 + w_3 = 0 \end{array}\right\} \qquad (9)$$

und bilden die Summe der Koeffizienten einer jeden Korrelatengleichung, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + b_1 + c_1 = s_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 = s_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n + b_n + c_n = s_n \end{array}\right\} \qquad (10) = (5)$$

Multipliziert man die einzelnen Gleichungen dieser Gruppe der Reihe nach mit den zugehörigen r_i und addiert hiernach, so entsteht:

$$[a\,r] + [b\,r] + [c\,r] = [r\,s]$$

und daher mit Rücksicht auf (2):

$$-w_1 - w_2 - w_3 = -[w] = [r\,s]. \qquad (11)$$

Multipliziert man die Korrelatengleichungen (8) mit den zugehörigen s_i und addiert sie sodann, so erhält man:

$$[a\,s]\,k_1 + [b\,s]\,k_2 + [c\,s]\,k_3 = [r\,s]. \qquad (12)$$

Addiert man aber die Normalgleichungen (9), so ergibt sich mit Bezug auf (6):

$$[a\,s]\,k_1 + [b\,s]\,k_2 + [c\,s]\,k_3 + [w] = 0, \qquad (13)$$

eine Summengleichung, welche mit Hinweis auf (11) mit der unabhängig abgeleiteten Gleichung (12) identisch ist. Die wirksame Kontrolle für die richtige Aufstellung der Normalgleichungen liegt also auch hier in der doppelten Berechnung der Summengleichung. Für

die Auflösung der Normalgleichungen hat man analoge Kontrollen, z. B.

$$
\begin{array}{rl}
& [b\,b\,.\,1]\,k_2 + [b\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_2\,.\,1] = 0 \\
& [b\,c\,.\,1]\,k_2 + [c\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_3\,.\,1] = 0 \\
\hline
\text{Summe:} & [b\,s\,.\,1]\,k_2 + [c\,s\,.\,1]\,k_3 + [[w]\,.\,1] = 0,
\end{array}
$$

wo die Kontrolle darin besteht, daß die Beziehungen stattfinden müssen:

$$[b\,b\,.\,1] + [b\,c\,.\,1] = [b\,s\,.\,1]$$
$$[b\,c\,.\,1] + [c\,c\,.\,1] = [c\,s\,.\,1]$$
$$[w_2\,.\,1] + [w_3\,.\,1] = [[w]\,.\,1] = [w] - \frac{[a\,s]}{[a\,a]}\,w_1$$

und wo die hiebei neu auftretenden Symbole folgende Bedeutung haben:

$$[w_2\,.\,1] = w_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,w_1$$
$$[w_3\,.\,1] = w_3 - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,w_1$$
$$[w_3\,.\,2] = [w_3\,.\,1] - \frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[w_2\,.\,1]$$

usw.

Die Kontrollen für die Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen gehen also bei Ausgleichungen vermittelnder wie bedingter Beobachtungen analog vor sich.

Im Beispiele *a)* des § 52, S. 196, lauten die Fehlergleichungen:

$$
\begin{array}{rcl}
1\,x - 1\,y + 2\,z = 3 & \qquad & s_1 = 2 \\
3\,x + 2\,y - 5\,z = 5 & & s_2 = 0 \\
4\,x + 1\,y + 4\,z = 21 & & s_3 = 9 \\
-1\,x + 3\,y + 3\,z = 14 & & s_4 = 5.
\end{array}
$$

Durch Multiplikation derselben mit den zugehörigen s_i entsteht:

$$
\begin{array}{rl}
& 2\,x - 2\,y + 4\,z = 6 \\
& - \quad . \quad - \quad . \quad - \quad . \quad - \\
& 36\,x + 9\,y + 36\,z = 189 \\
& -5\,x + 15\,y + 15\,z = 70 \\
\hline
\text{1. Summe:} & 33\,x + 22\,y + 55\,z = 265.
\end{array}
$$

Die Normalgleichungen (S. 197) lauten:

$$
\begin{array}{rl}
& 27\,x + 6\,y = 88 \\
& 6\,x + 15\,y + z = 70 \\
& y + 54\,z = 107 \\
\hline
\text{2. Summe:} & 33\,x + 22\,y + 55\,z = 265,
\end{array}
$$

also übereinstimmend mit der 1. Summe, womit die fehlerlose Aufstellung der Normalgleichungen konstatiert erscheint.

c) Allgemeines praktisches Kontrollverfahren.

Abweichend von der von Helmert angegebenen Methode kann man sich für die Kontrolle der Auflösung der Normalgleichungen eines bequemeren, von Jordan angedeuteten Verfahrens bedienen, das in den amtlichen Rechenvorschriften Eingang gefunden hat und bei ausgedehnten Ausgleichungsrechnungen mit besonderem Vorteil geübt wird. Nimmt man nämlich zur Summe s_i das Absolutglied noch mit und stellt man diese Summen mit entgegengesetzten Vorzeichen in Rechnung, so hat man die Bequemlichkeit, daß dann immer alles auf Null ausgehen muß, denn es ist sodann:

$$a_i + b_i + c_i - l_i + s_i = 0.$$

Werden also sämtliche Koeffizienten einschließlich dem absoluten Gliede einer jeden Normalgleichung algebraisch addiert und diese Summen $[as]$, $[bs]$, ... mit entgegengesetztem Vorzeichen den betreffenden Normalgleichungen je als ein weiteres Glied angeschlossen, so besteht die Kontrolle darin, daß nicht nur in jeder erweiterten Normalgleichung, sondern auch in allen aus Anlaß der Elimination veränderten Normalgleichungen die algebraischen Summen sämtlicher numerischer Zahlen gleich Null sein müssen, nämlich:

$$[aa] + [ab] + [ac] - [al] + [as] = 0$$
$$[ab] + [bb] + [bc] - [bl] + [bs] = 0$$
$$[ac] + [bc] + [cc] - [cl] + [cs] = 0$$

$$[bb.1] + [bc.1] - [bl.1] + [bs.1] = 0$$
$$[bc.1] + [cc.1] - [cl.1] + [cs.1] = 0$$

$$[cc.2] - [cl.2] + [cs.2] = 0$$

$$1 + \frac{[ab]}{[aa]} + \frac{[ac]}{[aa]} - \frac{[al]}{[aa]} + \frac{[as]}{[aa]} = 0$$
$$1 + \frac{[bc.1]}{[bb.1]} - \frac{[bl.1]}{[bb.1]} + \frac{[bs.1]}{[bb.1]} = 0$$
$$1 - \frac{[cl.2]}{[cc.2]} + \frac{[cs.2]}{[cc.2]} = 0$$

Im Beispiele *a)* des § 52 lauten die Normalgleichungen:

$$27x + 6y = 88$$
$$6x + 15y + z = 70$$
$$y + 54z = 107$$

Summengleichung: $33x + 22y + 55z = 265$

Hiezu rechnet man die Summen:

$$
\begin{aligned}
[as] &= -(27 + 6 \qquad\quad - 88) = +55 \\
[bs] &= -(\;6 + 15 + 1 - 70) = +48 \\
[cs] &= -(\qquad\; 1 + 54 - 107) = +52
\end{aligned}
$$

und schreibt schematisch:

Nr.		a]	b]	c]	l]	s]	
1	[a	+ 27	+ 6		− 88	+ 55	= 0
2	[b	+ 6	+ 15	+ 1	− 70	+ 48	= 0
3	[c		+ 1	+ 54	− 107	+ 52	= 0
			b . 1]	c . 1]	l . 1]	s . 1]	
4	[b		+ 13·667	+ 1	− 50·446	+ 35·778	= 0
5	[c		+ 1	+ 54	− 107	+ 52	= 0
				c . 2]	l . 2]	s . 2]	
6	[c			+ 53·927	− 103·309	+ 49·382	= 0

Hieraus erhält man das Schema für die reduzierten Normalgleichungen, indem man die Gleichung Nr. 1 durch 27, die Gleichung zum Nr. 4 durch 13·667 und die Gleichung Nr. 6 durch 53·927 dividiert:

+ 1	+ 0·222		− 3·259	+ 2·037	= 0
	+ 1	+ 0·073	− 3·691	+ 2·618	= 0
		+ 1	− 1·916	+ 0·916	= 0

Es lautet demnach das System der kontrollierten, reduzierten Normalgleichungen:

$$
\begin{aligned}
x + 0{\cdot}222\,y \qquad\qquad &= 3{\cdot}259 \\
y + 0{\cdot}073\,z &= 3{\cdot}691 \\
z &= 1{\cdot}916,
\end{aligned}
$$

woraus die sukzessive Berechnung der Unbekannten die Gaußschen Resultate liefert:

$$x = 2{\cdot}470, \quad y = 3{\cdot}551, \quad z = 1{\cdot}916,$$

welche, zur Kontrolle in die Summengleichung eingesetzt, dieselbe erfüllen müssen. Es ergibt sich:

$$33 \,.\, 2{\cdot}470 + 22 \,.\, 3{\cdot}551 + 55 \,.\, 1{\cdot}916 = 265{\cdot}01$$

Sollbetrag: 265·00.

§ 60. Genauigkeitsbestimmung einer Funktion der ausgeglichenen Elemente.

Besitzen die ursprünglichen Beobachtungen: $l_1, l_2, \ldots l_n$ die verschiedenen Gewichte: $g_1, g_2, \ldots g_n$, sind die durch die Ausgleichung gewonnenen Verbesserungen: $v_1, v_2, \ldots v_n$, sohin die ausgeglichenen Beobachtungen: $x_1 = l_1 - v_1, x_2 = l_2 - v_2, \ldots x_n = l_n - v_n$, und ist F irgend eine von vornherein lineare oder eine mit Hilfe der Taylorschen Reihe erst linear gemachte Funktion der ausgeglichenen Beobachtungen, also

$$F = f_0 + f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_n x_n$$

oder

$$F = f_0 + f_1 (l_1 - v_1) + f_2 (l_2 - v_2) + \cdots + f_n (l_n - v_n), \quad (1)$$

so hat man, um den mittleren Fehler dieser Funktion zu bestimmen, F als eine lineare Funktion der ursprünglichen, voneinander unabhängigen Beobachtungen darzustellen, also in die Form zu bringen:

$$F = F_0 + F_1 l_1 + F_2 l_2 + \cdots + F_n l_n. \quad (2)$$

Setzt man in (1) für die Verbesserungen die durch die Korrelatengleichungen bestimmten Werte:

$$v_1 = \frac{a_1}{g_1} k_1 + \frac{b_1}{g_1} k_2 + \cdots + \frac{q_1}{g_1} k_r,$$

$$v_2 = \frac{a_2}{g_2} k_1 + \frac{b_2}{g_2} k_2 + \cdots + \frac{q_2}{g_2} k_r,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n = \frac{a_n}{g_n} k_1 + \frac{b_n}{g_n} k_2 + \cdots + \frac{q_n}{g_n} k_r,$$

so geht (1) über in:

$$F = f_0 + [f l] - \left[\frac{a f}{g}\right] k_1 - \left[\frac{b f}{g}\right] k_2 - \cdots - \left[\frac{q f}{g}\right] k_r. \quad (3)$$

Um hieraus die Korrelaten $k_1, k_2, \ldots k_r$ zu eliminieren, ziehe man die Normalgleichungen für die Korrelaten heran, welche lauten:

$$\left.\begin{aligned} -w_1 &= \left[\frac{a a}{g}\right] k_1 + \left[\frac{a b}{g}\right] k_2 + \cdots + \left[\frac{a q}{g}\right] k_r \\ -w_2 &= \left[\frac{a b}{g}\right] k_1 + \left[\frac{b b}{g}\right] k_2 + \cdots + \left[\frac{b q}{g}\right] k_r \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -w_r &= \left[\frac{a q}{g}\right] k_1 + \left[\frac{b q}{g}\right] k_2 + \cdots + \left[\frac{q q}{g}\right] k_r \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

und worin nach Gleichungen (2) des § 53, S. 210 folgende Beziehungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= a_0 + [a\,l] \\ w_2 &= b_0 + [b\,l] \\ &\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ w_r &= q_0 + [q\,l]. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Um die Korrelaten aus (3) mit Hilfe von (4) zu eliminieren, multipliziere man die Normalgleichungen (4) der Reihe nach mit den vorläufig noch unbestimmten Koeffizienten $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots \mathfrak{r}_r$ und addiere sie zu (3). Wird gleichzeitig nach allen k geordnet, so erhält man:

$$\begin{aligned} F - w_1\mathfrak{r}_1 - w_2\mathfrak{r}_2 - \cdots - w_r\mathfrak{r}_r = f_0 + [f\,l] +& \\ + \left\{\left[\frac{a\,a}{g}\right]\mathfrak{r}_1 + \left[\frac{a\,b}{g}\right]\mathfrak{r}_2 + \cdots + \left[\frac{a\,q}{g}\right]\mathfrak{r}_r + \left[\frac{a\,f}{g}\right]\right\} k_1& \\ + \left\{\left[\frac{a\,b}{g}\right]\mathfrak{r}_1 + \left[\frac{b\,b}{g}\right]\mathfrak{r}_2 + \cdots + \left[\frac{b\,q}{g}\right]\mathfrak{r}_r + \left[\frac{b\,f}{g}\right]\right\} k_2& \\ + \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.& \\ + \left\{\left[\frac{a\,q}{g}\right]\mathfrak{r}_1 + \left[\frac{b\,q}{g}\right]\mathfrak{r}_2 + \cdots + \left[\frac{q\,q}{g}\right]\mathfrak{r}_r + \left[\frac{q\,f}{g}\right]\right\} k_r.& \end{aligned}$$

Da wir für die r unbestimmt gelassenen Koeffizienten $\mathfrak{r}_1$ bis $\mathfrak{r}_r$ ebenso viele Bedingungen für deren Bestimmung einführen dürfen, so wählen wir hiefür derartige Bedingungsgleichungen, welche die Ausdrücke in den geschlungenen Parenthesen zu Null machen. Man stellt also die von Gerling benannten „Übertragungsgleichungen" auf:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{a\,a}{g}\right]\mathfrak{r}_1 + \left[\frac{a\,b}{g}\right]\mathfrak{r}_2 + \cdots + \left[\frac{a\,q}{g}\right]\mathfrak{r}_r + \left[\frac{a\,f}{g}\right] &= 0 \\ \left[\frac{a\,b}{g}\right]\mathfrak{r}_1 + \left[\frac{b\,b}{g}\right]\mathfrak{r}_2 + \cdots + \left[\frac{b\,q}{g}\right]\mathfrak{r}_r + \left[\frac{b\,f}{g}\right] &= 0 \\ .\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.& \\ \left[\frac{a\,q}{g}\right]\mathfrak{r}_1 + \left[\frac{b\,q}{g}\right]\mathfrak{r}_2 + \cdots + \left[\frac{q\,q}{g}\right]\mathfrak{r}_r + \left[\frac{q\,f}{g}\right] &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

wodurch sich die obige Gleichung wie folgt vereinfacht:

$$F = w_1\mathfrak{r}_1 + w_2\mathfrak{r}_2 + \cdots + w_r\mathfrak{r}_r + f_0 + [f\,l].$$

Substituiert man hier, um statt der Widersprüche w die Beobachtungen l einzuführen, die Beziehungen (5) und ordnet man gleichzeitig nach allen l, so erhält man:

$$\begin{aligned} F = \;& f_0 + a_0\mathfrak{r}_1 + b_0\mathfrak{r}_2 + \cdots + q_0\mathfrak{r}_r \\ &+ (f_1 + a_1\mathfrak{r}_1 + b_1\mathfrak{r}_2 + \cdots + q_1\mathfrak{r}_r)\,l_1 \\ &+ (f_2 + a_2\mathfrak{r}_1 + b_2\mathfrak{r}_2 + \cdots + q_2\mathfrak{r}_r)\,l_2 \\ &+ \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ &+ (f_n + a_n\mathfrak{r}_1 + b_n\mathfrak{r}_2 + \cdots + q_n\mathfrak{r}_r)\,l_n \end{aligned}$$

oder wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$F_0 = f_0 + a_0 \mathfrak{r}_1 + b_0 \mathfrak{r}_2 + \cdots + q_0 \mathfrak{r}_r$$

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = f_1 + a_1 \mathfrak{r}_1 + b_1 \mathfrak{r}_2 + \cdots + q_1 \mathfrak{r}_r \\ F_2 = f_2 + a_2 \mathfrak{r}_1 + b_2 \mathfrak{r}_2 + \cdots + q_2 \mathfrak{r}_r \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_n = f_n + a_n \mathfrak{r}_1 + b_n \mathfrak{r}_2 + \cdots + q_n \mathfrak{r}_r \end{array}\right| \qquad (7)$$

die oben aufgestellte Gleichung (2):

$$F = F_0 + F_1 l_1 + F_2 l_2 + \cdots + F_n l_n,$$

womit F, wie verlangt, als eine lineare Funktion aller ursprünglichen Beobachtungen l dargestellt ist.

Sind die mittleren Fehler der unausgeglichenen Beobachtungen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, so kann jetzt der mittlere Fehler M_F der Funktion F nach dem Fehlerübertragungsgesetze berechnet werden; es ist, da dem F_0 kein Fehler anhaftet:

$$M_F^2 = F_1^2 \mu_1^2 + F_2^2 \mu_2^2 + \cdots + F_n^2 \mu_n^2,$$

sohin

$$M_F = \sqrt{[F^2 \mu^2]} = \mu_0 \sqrt{\left[\frac{FF}{g}\right]}, \qquad (8)$$

wenn μ_0 den mittleren Fehler der Gewichtseinheit bedeutet, und es ist der reziproke Wert des Gewichtes:

$$\frac{1}{G_F} = \left[\frac{FF}{g}\right]. \qquad (9)$$

Man kann die beschwerliche Ausrechnung der einzelnen F und deren Quadrate umgehen, wenn man — analog wie die Kontrollformel (13) des § 58, S. 226 — entwickelt:

$$\frac{1}{G_F} = \left[\frac{FF}{g}\right] = \left[\frac{ff}{g}\right] - \frac{\left[\frac{af}{g}\right]^2}{\left[\frac{aa}{g}\right]} - \frac{\left[\frac{bf}{g}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{g}\cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{cf}{g}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{g}\cdot 2\right]} - \cdots. \qquad (10)$$

Haben die Beobachtungen gleiche Genauigkeiten, so lauten die Übertragungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [aa]\,\mathfrak{r}_1 + [ab]\,\mathfrak{r}_2 + \cdots + [aq]\,\mathfrak{r}_r + [af] = 0 \\ [ab]\,\mathfrak{r}_1 + [bb]\,\mathfrak{r}_2 + \cdots + [bq]\,\mathfrak{r}_r + [bf] = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ [aq]\,\mathfrak{r}_1 + [bq]\,\mathfrak{r}_2 + \cdots + [qq]\,\mathfrak{r}_r + [qf] = 0 \end{array}\right| \qquad (11)$$

der mittlere Fehler der Funktion F ist:

$$M_l = \mu \sqrt{[FF]} \tag{12}$$

und die Gewichtsreziproke:

$$\frac{1}{G_l} = [FF] = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf.1]^2}{[bb.1]} - \frac{[cf.2]^2}{[cc.2]} \cdots \tag{13}$$

§ 61. Genauigkeitsbestimmung der ausgeglichenen Beobachtungen.

Ist die Funktion F, deren mittlerer Fehler bestimmt werden soll, z. B. die i-te Beobachtung nach der Ausgleichung, also $F = l_i + r_i$, so hat man für die Gleichung (1) des vorigen Paragraphen zu schreiben:

$$l - r = f_0 + f_1(l_1 + r_1) + f_2(l_2 + r_2) + \cdots + f_i(l_i + r_i) + \cdots + f_n(l_n + r_n),$$

d. h. man hat zu setzen:

$$f_0 = 0,\ f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ \ldots\ f_{i-1} = 0,\ f_i = 1,\ f_{i+1} = 0,\ \ldots\ f_n = 0.$$

Die Übertragungsgleichungen (6) gehen dann über in:

$$\left.\begin{array}{l}
\left[\frac{aa}{g}\right]\mathfrak{r}_1 + \left[\frac{ab}{g}\right]\mathfrak{r}_2 + \cdots + \left[\frac{aq}{g}\right]\mathfrak{r}_\nu + \frac{a_i}{g_i} = 0 \\
\left[\frac{ab}{g}\right]\mathfrak{r}_1 + \left[\frac{bb}{g}\right]\mathfrak{r}_2 + \cdots + \left[\frac{bq}{g}\right]\mathfrak{r}_\nu + \frac{b_i}{g_i} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left[\frac{aq}{g}\right]\mathfrak{r}_1 + \left[\frac{bq}{g}\right]\mathfrak{r}_2 + \cdots + \left[\frac{qq}{g}\right]\mathfrak{r}_\nu + \frac{q_i}{g_i} = 0
\end{array}\right\} \tag{1}$$

und die Koeffizienten (7) in:

$$\left.\begin{array}{l}
F_1 = \quad a_1 \mathfrak{r}_1 + b_1 \mathfrak{r}_2 + \cdots + q_1 \mathfrak{r}_\nu \\
F_2 = \quad a_2 \mathfrak{r}_1 + b_2 \mathfrak{r}_2 + \cdots + q_2 \mathfrak{r}_\nu \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F_i = 1 + a_i \mathfrak{r}_1 + b_i \mathfrak{r}_2 + \cdots + q_i \mathfrak{r}_\nu \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F_n = \quad a_n \mathfrak{r}_1 + b_n \mathfrak{r}_2 + \cdots + q_n \mathfrak{r}_\nu .
\end{array}\right\} \tag{2}$$

Der mittlere Fehler der i-ten Beobachtung nach der Ausgleichung ist:

$$M_i = \mu_0 \sqrt{\left[\frac{FF}{g}\right]} \tag{3}$$

und die Gewichtsreziproke:

$$\frac{1}{G_i} = \left[\frac{FF}{g}\right] = \frac{1}{g_i} - \frac{\left(\frac{a_i}{g_i}\right)^2}{\left[\frac{aa}{g}\right]} - \frac{\left[\frac{b_i}{g_i}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{g}\cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{c_i}{g_i}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{g}\cdot 2\right]} - \frac{\left[\frac{d_i}{g_i}\cdot 3\right]^2}{\left[\frac{dd}{g}\cdot 3\right]} \cdots \tag{4}$$

Hierin bedeuten:

$$\left[\frac{b_i}{g}\cdot 1\right] = \frac{b_i}{g_i} - \frac{\left[\frac{ab}{g}\right]}{\left[\frac{aa}{g}\right]}\cdot\frac{a_i}{g} \qquad \left[\frac{c_i}{g_i}\cdot 2\right] = \left[\frac{c_i}{g}\cdot 1\right] - \frac{\left[\frac{bc}{g}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{g}\cdot 1\right]}\left[\frac{b_i}{g_i}\cdot 1\right]$$

$$\left[\frac{c_i}{g_i}\cdot 1\right] = \frac{c_i}{g_i} - \frac{\left[\frac{ac}{g}\right]}{\left[\frac{aa}{g}\right]}\cdot\frac{a_i}{g} \qquad \left[\frac{d_i}{g_i}\cdot 2\right] = \left[\frac{d_i}{g_i}\cdot 1\right] - \frac{\left[\frac{bd}{g}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{g}\cdot 1\right]}\left[\frac{b_i}{g_i}\cdot 1\right]$$

$$\left[\frac{d_i}{g_i}\cdot 1\right] = \frac{d_i}{g_i} - \frac{\left[\frac{ad}{g}\right]}{\left[\frac{aa}{g}\right]}\cdot\frac{a_i}{g} \qquad \left[\frac{d_i}{g_i}\cdot 3\right] = \left[\frac{d_i}{g}\cdot 2\right] - \frac{\left[\frac{cd}{g}\cdot 2\right]}{\left[\frac{cc}{g}\cdot 2\right]}\left[\frac{c_i}{g}\cdot 2\right]$$

Diese Ausdrücke brauchen bei Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahrens nicht eigens gerechnet zu werden, sondern ergeben sich gelegentlich des Auflösungsprozesses von selbst.

Aus dem Umstande, daß alle subtraktiven Glieder der Gleichung (4) wesentlich positiv sind, ist zu erkennen, daß der reziproke Wert des Gewichtes oder der mittlere Fehler einer Beobachtung durch die Ausgleichung abnimmt, die Genauigkeit daher zunimmt.

Um z. B. den mittleren Fehler des ausgeglichenen Winkels x_1 im Beispiele *a)* des § 56 zu bestimmen, wo

$$g_1 = 70,\ g_2 = 101,\ g_3 = 85:\ \left[\frac{1}{g}\right] = 0·03595;\ \mu_0 = 8''32,$$

hat man die einzige Übertragungsgleichung

$$\left[\frac{aa}{g}\right]\mathfrak{r} - \frac{a_1}{g_1} = 0$$

oder speziell im vorliegenden Falle, wo alle a gleich 1 sind:

$$\left[\frac{1}{g}\right]\mathfrak{r} - \frac{1}{g_1} = 0$$

also:

$$0·03595\,\mathfrak{r} - \frac{1}{70} = 0$$

aufzulösen. Die Auflösung gibt $\mathfrak{r}' = -0·40$, somit ist:

$$F_1 = 1 - 0·4 = 0·6;\quad F_2 = -0·4;\quad F_3 = -0·4$$

und

$$M_x = \mu_0\sqrt{\left[\frac{FF}{g}\right]} = 8·32\sqrt{0·008609} = 0''77.$$

Analog ergibt sich:

$$0{\cdot}03595\, r'' + \frac{1}{101} = 0, \quad r'' = -0{\cdot}275$$

$$F_1 = -0{\cdot}275, \quad F_2 = +0{\cdot}725, \quad F_3 = -0{\cdot}275$$

$$M_2 = 8{\cdot}32 \sqrt{0{\cdot}007174} = 0''70$$

und

$$M_3 = 8{\cdot}32 \sqrt{0{\cdot}007915} = 0''74.$$

§ 62. Ausgleichung eines Viereckes.

Hat man in einem Vierecke die durch die Seiten und Diagonalen gebildeten 8 Winkel gemessen und ist auch die Länge einer Seite bekannt, so ist das Viereck überbestimmt; denn zur eindeutigen Konstruktion desselben würden außer der gegebenen Seite nur noch vier Winkel genügen. Es sind also die anderen vier Winkel überschüssig gemessen worden. Ebenso groß muß daher auch die Zahl der streng zu erfüllenden, unter sich unabhängigen Bedingungsgleichungen sein.

In einem Vierecke, welches durch die Diagonalen vier geschlossene Dreiecke bildet, gibt es keinen Winkelwiderspruch, wenn die Summe der Winkel in einem jeden Dreieck ihren theoretischen Sollbetrag, also 180° in einem ebenen, beziehungsweise 180° + sphär. Exzeß in einem sphärischen Dreiecke besitzen, wenn also z. B. in einem ebenen Vierecke, Fig. 7, S. 244, die Bedingungen erfüllt sind:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_8 = 180^0$$
$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 180^0$$
$$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 180^0$$
$$x_1 + x_6 + x_7 + x_8 = 180^0.$$

Unter diesen vier Gleichungen ist aber jede von den drei übrigen abhängig, weil, wenn drei Dreiecke auf 180° stimmen, das vierte Dreieck dann von selbst stimmen muß, ebenso wie dann auch die vier Winkel des Vierecks auf 360° von selbst stimmen müssen. Die Untersuchung in Bezug auf die Winkelsummen liefert sohin nur drei unabhängige Bedingungsgleichungen, die sogenannten **Winkelgleichungen**.

Wenn aber in einem Vierecke mit einer gegebenen Seite alle acht gemessenen Winkel zum Stimmen gebracht wurden und man von der gegebenen Seite AB aus die Diagonale BD in doppelter Weise zu berechnen versucht, nämlich einmal direkt aus AB:

$$B D = A B \frac{\sin (x_1 + x_2)}{\sin x_8} \tag{1}$$

und das zweitemal mit Vermittlung des Dreieckes $A B C$, indem man zuerst

$$B C = A B \frac{\sin x_2}{\sin x_5}$$

und hierauf

$$B D = B C \frac{\sin (x_5 + x_6)}{\sin x_7} = A B \frac{\sin x_2 \,.\, \sin (x_5 + x_6)}{\sin x_5 \,.\, \sin x_7} \tag{2}$$

bildet, so wird man die Wahrnehmung machen, daß infolge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, welche auch durch das Zusammenstimmen auf 180° beziehungsweise 360° nicht der Wahrheit gemäß beseitigt wurden, die auf verschiedenen Wegen ermittelten Längen der Seite $B D$ nicht übereinstimmen werden. Soll aber Übereinstimmung in den Seitenlängen herrschen, so muß zwischen (1) und (2) Gleichheit bestehen. Setzt man daher

$$B D = A B \frac{\sin (x_1 + x_2)}{\sin x_8} = A B \frac{\sin x_2 \,.\, \sin (x_5 + x_6)}{\sin x_5 \,.\, \sin x_7}$$

oder

$$\frac{\sin (x_1 + x_2) \,.\, \sin x_5 \,.\, \sin x_7}{\sin x_2 \,.\, \sin (x_5 + x_6) \,.\, \sin x_8} = 1, \tag{3}$$

so erhält man die vierte Bedingungsgleichung, welche **Seitengleichung** genannt wird. Dieselbe erscheint aus den drei in B zusammenstoßenden Dreiecken gebildet, und zwar in der Weise, daß in der Erfüllungsgleichung

$$\frac{BD}{BA} \cdot \frac{BA}{BC} \cdot \frac{BC}{BD} = 1$$

die Seitenverhältnisse durch die Sinusverhältnisse ersetzt werden. Da aber jeder der vier Eckpunkte des Viereckes einen Zusammenstoßpunkt von drei Dreiecken oder einen **Zentralpunkt** bildet, so kann man eigentlich in einem Vierecke vier solche Seitengleichungen aufstellen, z. B. für die Ecke A als Zentralpunkt:

$$\frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = 1;$$

es leuchtet aber ein, daß wenn **eine** Seitengleichung bei acht gemessenen Winkeln erfüllt ist, auch den übrigen Seitengleichungen von selbst Genüge geleistet wird.

Bei der freien Wahl der Seitengleichungen wird es darauf ankommen, diejenige in Rechnung zu stellen, welche mit Rücksicht auf

die Änderung des Sinus die schärfste Rechnung gestattet. Nach Zachariae (1878) und Jordan (1880) ist dies diejenige Gleichung, welche die spitzesten Winkel enthält, weil in ihr eine Änderung des Winkels vom Sinus am stärksten empfunden wird.*)

Drei Winkelgleichungen und eine Seitengleichung geben nun zusammen die vier notwendigen Bedingungsgleichungen für die Ausgleichung eines Viereckes, in welchem alle acht Winkel gemessen worden sind. Setzt man in die ersten drei Winkelbedingungsgleichungen statt der ausgeglichenen Winkelwerte x die um die Winkelverbesserungen v ergänzten Beobachtungswerte l ein, so erhält man streng richtig

$$\begin{aligned} l_1 + v_1 + l_2 + v_2 + l_3 + v_3 + l_8 + v_8 &= 180^0 \\ l_2 + v_2 + l_3 + v_3 + l_4 + v_4 + l_5 + v_5 &= 180^0 \\ l_4 + v_4 + l_5 + v_5 + l_6 + v_6 + l_7 + v_7 &= 180^0. \end{aligned}$$

Die Beobachtungswerte allein ohne die Verbesserungen erzeugen aber die Widersprüche w_1, w_2, w_3:

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 + l_3 + l_8 - 180 &= w_1 \\ l_2 + l_3 + l_4 + l_5 - 180 &= w_2 \\ l_4 + l_5 + l_6 + l_7 - 180 &= w_3. \end{aligned}$$

Die Winkelverbesserungen müssen daher die Bedingungen erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_8 + w_1 &= 0 \\ v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + w_2 &= 0 \\ v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + w_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Setzt man in die Seitenbedingungsgleichung (3) statt der ausgeglichenen Winkelwerte x die Summen $l + v$ ein, so erhält man:

$$\frac{\sin(l_1 + v_1 + l_2 + v_2)\sin(l_5 + v_5)\sin(l_7 + v_7)}{\sin(l_2 + v_2)\sin(l_5 + v_5 + l_6 + v_6)\sin(l_8 + v_8)} = 1.$$

Um diese Gleichung linear zu machen, wollen wir sie logarithmieren:

$$\left.\begin{aligned} &\log\sin(l_1 + v_1 + l_2 + v_2) + \log\sin(l_5 + v_5) + \log\sin(l_7 + v_7) - \\ &- \log\sin(l_2 + v_2) - \log\sin(l_5 + v_5 + l_6 + v_6) - \log\sin(l_8 + v_8) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Ist nun v im Verhältnis zu l ein sehr kleiner, in Sekunden ausgedrückter Winkel, so kann unbedenklich gesetzt werden:

$$\log\sin(l + v) = \log\sin l + \Delta \,.\, v.$$

*) Den Beweis enthält der II. Band, § 35.

wobei Δ die logarithmische Tafeldifferenz zu $log\,sin\,l$ für 1'' bedeutet und daher für stumpfe Winkel (größer als 90°) negativ in Rechnung zu stellen ist. Streng genommen ist, wenn man nach dem Taylorschen Satze entwickelt:

$$log\,sin\,(l + r) = log\,sin\,l + \frac{M\,cotg\,l}{\varrho}\,r,$$

worin $M = 0{\cdot}4342945$ den Modul des gemeinen Briggschen Logarithmensystems und $\varrho = 206265$ die Zahl bedeutet, welche r in Sekunden umwandelt. Es ist also $\frac{M}{\varrho} = 0{\cdot}0000021055$ oder $\frac{M}{\varrho} = 2{\cdot}1055$ in Einheiten der sechsten Dezimalstelle $\left(log\,\frac{M}{\varrho} = 0{\cdot}32336\right)$ und

$$\Delta = 2{\cdot}1055\,cotg\,l.$$

Die Koeffizienten Δ können daher für jedes gegebene l strenge gerechnet werden, mit hinreichender Genauigkeit können sie jedoch der Logarithmentafel entnommen werden, denn man erkennt, daß für $r = 1''$:

$$\Delta = log\,sin\,(l + 1'') - log\,sin\,l,$$

d. i. die einer Sekunde entsprechende Differenz von $log\,sin\,l$, welche in allen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln für sämtliche Winkel enthalten sind. Man kann also (5) auch schreiben:

$$log\,sin\,(l_1 + l_2) + log\,sin\,l_5 + log\,sin\,l_7 - log\,sin\,l_2 - log\,sin\,(l_5 + l_6) -$$
$$- log\,sin\,l_8 + \Delta_{1,2}\,(r_1 + r_2) + \Delta_5\,r_5 + \Delta_7\,r_7 - \Delta_2\,r_2 - \Delta_{5,6}\,(r_5 + r_6) -$$
$$- \Delta_8\,r_8 = 0.$$

Mit Bezug auf die Widerspruchsgleichung:

$$log\,sin\,(l_1 + l_2) + log\,sin\,l_5 + log\,sin\,l_7 - log\,sin\,l_2 - log\,sin\,(l_5 + l_6) -$$
$$- log\,sin\,l_8 = w_4$$

besteht daher auch die Gleichung:

$$\Delta_{1,2}\,(r_1 + r_2) + \Delta_5\,r_5 + \Delta_7\,r_7 - \Delta_2\,r_2 - \Delta_{5,6}\,(r_5 + r_6) - \Delta_8\,r_8 + w_4 = 0.$$

Wird ausmultipliziert und nach den r geordnet, so erhält man schließlich die Seitengleichung in der linearen Form:

$$a_1\,r_1 \pm a_2\,r_2 \pm a_5\,r_5 \pm a_6\,r_6 \pm a_7\,r_7 \pm a_8\,r_8 \pm w_4 = 0. \qquad (6)$$

Da die Koeffizienten der Winkelgleichungen (4) durchwegs gleich 1 sind, so wird man wegen der bequemeren Ziffernrechnung trachten, auch die Koeffizienten der Seitengleichung (6) nahezu gleich 1 zu erhalten. Man erreicht dies am ehesten, wenn man zur logarithmischen Rechnung sechsstellige Tafeln benützt, oder, wenn mit siebenstelligen

16*

Logarithmentafeln gerechnet wird, trotzdem alle Koeffizienten und auch die Widersprüche in Einheiten der sechsten Dezimalstelle ausdrückt. Sollten die Koeffizienten der Seitengleichung dennoch von den Koeffizienten der Winkelgleichungen bedeutend abweichen, so wird es sich empfehlen, die Koeffizienten der Seitengleichung durch Division oder Multiplikation mit einer runden Zahl so weit zu reduzieren, bis sie im Durchschnitt angenähert die Einheit ergeben.

Zahlenbeispiel.

Bei der Triangulierung zum Bau der „Zweiten Kaiser Franz Josef-Hochquellenleitung" wurden in dem Vierecke $ABCD$ (Fig. 7)

Fig. 7.

alle acht Winkel gemessen. Die ersten Summenproben der vier Dreiecke ergeben:

$$\begin{array}{rl} l_1 = & 5^0\,41'\,39''7 \\ l_2 = & 38\;\;52\;\;22{\cdot}1 \\ l_3 = & 38\;\;02\;\;08{\cdot}1 \\ l_8 = & 97\;\;23\;\;52{\cdot}7 \\ \hline & 180^0\,00'\,02''6 \\ & w_1 = -\,2''6 \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} 44^0\,34'\,01''8 \qquad \begin{array}{rl} l_2 = & 38^0\,52'\,22''1 \\ l_3 = & 38\;\;02\;\;08{\cdot}1 \\ l_4 = & 23\;\;44\;\;20{\cdot}9 \\ l_5 = & 79\;\;21\;\;07{\cdot}2 \\ \hline & 179^0\,59'\,58''3 \\ & w_2 = -\,1''7 \end{array} \quad (l_3 + l_4 = 61^0\,46'\,29''0)$$

$$\begin{array}{rl} l_4 = & 23^0\,44'\,20''9 \\ l_5 = & 79\;\;21\;\;07{\cdot}2 \\ l_6 = & 12\;\;29\;\;21{\cdot}6 \\ l_7 = & 64\;\;25\;\;02{\cdot}1 \\ \hline & 179^0\,59'\,51''8 \\ & w = -\,8''2 \end{array} \quad (l_5 + l_6 = 91^0\,50'\,28''8) \qquad \begin{array}{rl} l_1 = & 5^0\,41'\,39''7 \\ l_6 = & 12\;\;29\;\;21{\cdot}6 \\ l_7 = & 64\;\;25\;\;02{\cdot}1 \\ l_8 = & 97\;\;23\;\;52{\cdot}7 \\ \hline & 179^0\,59'\,56''1 \\ & w_3 = -\,3''9. \end{array} \quad (l_7 + l_8 = 161^0\,48'\,54''8)$$

Hieraus erhalten wir die Winkelgleichungen:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_8 - 2''6 = 0$$

$$v_2 + v_3 + v_4 + v_5 - 1{\cdot}7 = 0$$

$$v_1 + v_6 + v_7 + v_8 - 3{\cdot}9 = 0,$$

wobei zu beachten ist, daß das Vorzeichen der Widersprüche, wenn sie mit den Verbesserungen auf derselben Seite des Gleichheitszeichens angesetzt werden, sich nach der Formel bestimmt:

$$w = \text{Beobachtung} - \text{Sollbetrag}.$$

Die Seitengleichung für den günstigsten Zentralpunkt D lautet:

$$\frac{\sin l_4 \, . \, \sin (l_1 - l_2) \, . \, \sin l_6}{\sin l_3 \, . \, \sin l_1 \, . \, \sin (l_5 - l_6)} = 1.$$

Die logarithmische Behandlung ergibt siebenstellig:

$\log \sin$ (23° 44′ 20″9)	= 9·6048 448	Δ für 10″ =	+ 479
„ „ (44 34 01·8)	= 9·8461 793	„ 10	+ 214
„ „ (12 29 21·6)	= 9·3349 719	„ 10	+ 950
$\log$ Zähler	= 8·7859 960		
„ „ (38° 02′ 08″1)	= 9·7896 870	„ 10	+ 269
„ „ (5 41 39·7)	= 8·9966 072	„ 10	+ 2112
„ „ (91 50 28·8)	= 9·9997 757	„ 10	— 7
$\log$ Nenner	= 8·7860 699		

$$w_4 = \log \text{Zähler} - \log \text{Nenner} = -0{\cdot}0000739.$$

Um z. B. die Differenz Δ_4 zu $\log \sin l_4$ für den ersten Winkel l_4 in Einheiten der sechsten Logarithmenstelle und für 1″ zu erhalten, bilde man

$$\Delta_4 = 2{\cdot}1055 \, \cot g \, l_4 = 4{\cdot}79,$$

was dem in Einheiten der siebenten Dezimalstelle dem Logarithmenbuche direkt entnommenen Wert für 10″, nämlich 479, vollkommen entspricht.

In Einheiten der sechsten Dezimalstelle und für 1″ stellt sich nun die Seitengleichung wie folgt zusammen:

$$-4{\cdot}79 \, v_4 - 2{\cdot}14 \, (v_1 - v_2) - 9{\cdot}50 \, v_6 - 2{\cdot}69 \, v_3 - 21{\cdot}12 \, v_1 - 0{\cdot}07 \, (v_5 - v_6) -$$
$$- 73{\cdot}9 = 0$$

oder nach v_1, v_2, v_3, . . . geordnet:

$$-18{\cdot}98 \, v_1 - 2{\cdot}14 \, v_2 - 2{\cdot}69 \, v_3 - 4{\cdot}79 \, v_4 - 0{\cdot}07 \, v_5 - 9{\cdot}57 \, v_6 - 73{\cdot}9 = 0.$$

Zusammenstellung der Koeffizienten der vier Bedingungsgleichungen:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	w
a	1	1	1					1	— 2·6
b	.	1	1	1	1				— 1·7
c	1					1	1	1	— 3·9
d	— 18·98	— 2·14	— 2·69	— 4·79	— 0·07	— 9·57			— 73·9

Bildung der Koeffizienten der Normalgleichungen:

a a	*a b*	*a c*	*a d*	*b b*	*b c*	*b d*	*c c*	*c d*	*d d*
1		1	— 18·98		.	.	1	— 18·98	$18·98^2$
1	1		+ 2·14	1	.	+ 2·14	.	.	$2·14^2$
1	1		— 2·69	1	.	— 2·69	.	.	$2·69^2$
			.	1	.	+ 4·79	.	.	$4·79^2$
		.		1	.	+ 0·07	.	.	$0·07^2$
		.		.	.	.	1	+ 9·57	$9·57^2$
					.	.	1	.	.
1	.	1	.	.	.	.	1	.	.
4	2	2	— 19·53	4	0	+ 4·31	4	— 9·41	486·58

Normalgleichungen samt Summengliedern:

	a]	*b*]	*c*]	*d*]	*w*	— *s*
[*a*	+ 4 k_1	+ 2 k_2	+ 2 k_3	— 19·53 k_4	+ 2·6	+ 8·93 = 0
[*b*	+ 2 k_1	+ 4 k_2	0 k_3	— 4·31 k_4	— 1·7	— 8·61 = 0
[*c*	+ 2 k_1	0 k_2	+ 4 k_3	— 9·41 k_4	— 3·9	+ 7·31 = 0
[*d*	— 19·53 k_1	+ 4·31 k_2	— 9·41 k_3	+ 486·58 k_4	— 73·9	— 388·05 = 0
	— 11·53	+ 10·31	— 3·41	+ 461·95	— 76·9	— 380·42 = 0

Auflösung nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

	b.1]	*c*.1]	*d*.1]	*w*.1	— *s*.1
[*b*	+ 3 k_2	— 1 k_3	+ 14·075 k_4	— 3·0	— 13·075
[*c*	— 1 k_2	+ 3 k_3	+ 0·355 k_4	— 5·2	+ 2·845
[*d*	+ 14·075 k_2	+ 0·355 k_3	+ 391·2248 k_4	— 61·2055	— 344·4493
	+ 16·075	+ 2·355	+ 405·6548	— 69·4055	— 354·6793

	c.2]	*d*.2]	*w*.2	— *s*.2
[*c*	+ 2·6667 k_3	+ 5·0467 k_4	— 6·2	— 1·5133
[*d*	+ 5·0467 k_3	+ 325·1896 k_4	— 47·1305	— 283·1057
	+ 7·7134	+ 330·2363	— 53·3305	— 284·6190

	d.3]	*w*.3	— *s*.3
[*d*	+ 315·6388 k_4	— 35·3970	— 280·2417

Korrelaten: $k_1 = -1·74790$

$k_2 = -1·17811$

$k_3 = +2·11277$

$k_4 = -0·11214$

Berechnung der Verbesserungen:

	1	2	3	4	5	6	7	8
$a\,k_1$	− 1·748	− 1·748	− 1·748	.	.	.		− 1·748
$b\,k_2$	.	+ 1·178	+ 1·178	+ 1·178	+ 1·178		.	.
$c\,k_3$	+ 2·113	.		.		+ 2·113	+ 2·113	+ 2·113
$d\,k_4$	− 2·128	+ 0·240	− 0·302	+ 0·537	+ 0·008	+ 1·073		.
$v =$	− 1·763	− 0·330	− 0·872	+ 1·715	+ 1·186	+ 3·186	+ 2·113	+ 0·365

Probe:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 + v_2 + v_3 + v_8 + 2{\cdot}6 = 0{\cdot}000 \\ v_2 + v_3 + v_4 + v_5 - 1{\cdot}7 = -0{\cdot}002 \\ v_4 + v_5 + v_6 + v_7 - 8{\cdot}2 = 0{\cdot}000 \\ v_1 + v_6 + v_7 + v_8 - 3{\cdot}9 = +0{\cdot}001 \end{array}\right\}$$

Geht überall bis auf kleine Abrundungsunsicherheiten auf Null aus.

Resultate:

l	Beobachtet	v	Ausgeglichen	vv	$\sqrt{v}$
1	5° 41′ 39″7	− 1″763	5° 41′ 37″9	3·1082	1·328
2	38 52 22·1	− 0·330	38 52 21·8	0·1089	0·574
3	38 02 08·1	− 0·872	38 02 07·2	0·7604	0·934
4	23 44 20·9	+ 1·715	23 44 22·6	2·9412	1·309
5	79 21 07·2	+ 1·186	79 21 08·4	1·4066	1·089
6	12 29 21·6	+ 3·186	12 29 24·8	10·1506	1·785
7	64 25 02·1	+ 2·113	64 25 04·2	4·4648	1·454
8	97 23 52·7	+ 0·365	97 23 53·1	0·1332	0·604
		11·530		23·0739	9·077

Prüfung der Winkelgleichungen:

$$\begin{array}{rl} x_1 = & 5^0\,41'\,37''9 \\ x_2 = & 38\;\;52\;\;21{\cdot}8 \\ x_3 = & 38\;\;02\;\;07{\cdot}2 \\ x_8 = & 97\;\;23\;\;53{\cdot}1 \\ \hline & 180^0\,00'\,00''0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} x_2 = & 38^0\,52'\,21''8 \\ x_3 = & 38\;\;02\;\;07{\cdot}2 \\ x_4 = & 23\;\;44\;\;22{\cdot}6 \\ x_5 = & 79\;\;21\;\;08{\cdot}4 \\ \hline & 180^0\,00'\,00''0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} x_4 = & 23^0\,44'\,22''6 \\ x_5 = & 79\;\;21\;\;08{\cdot}4 \\ x_6 = & 12\;\;29\;\;24{\cdot}8 \\ x_7 = & 64\;\;25\;\;04{\cdot}2 \\ \hline & 180^0\,00'\,00''0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} x_1 = & 5^0\,41'\,37''9 \\ x_6 = & 12\;\;29\;\;24{\cdot}8 \\ x_7 = & 64\;\;25\;\;04{\cdot}2 \\ x_8 = & 97\;\;23\;\;53{\cdot}1 \\ \hline & 180^0\,00'\,00''0 \end{array}$$

Prüfung der Seitengleichung:

$$
\begin{aligned}
\log\sin\,(23^0\,44'\,22''61) &= 9{\cdot}6048\,530\\
\text{„}\quad\text{„}\quad(44\;\;33\;\;59{\cdot}71) &= 9{\cdot}8461\,748\\
\text{„}\quad\text{„}\quad(12\;\;29\;\;24{\cdot}79) &= \underline{9{\cdot}3350\,022}\\
\log\ \text{Zähler} &= 8{\cdot}7860\,300
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{„}\quad\text{„}\quad(38^0\,02'\,07''23) &= 9{\cdot}7896\,846\\
\text{„}\quad\text{„}\quad(\;5\;\;41'\,37{\cdot}94) &= 8{\cdot}9965\,700\\
\text{„}\quad\text{„}\quad(91\;\;50\;\;33{\cdot}20) &= \underline{9{\cdot}9997\,754}\\
\log\ \text{Nenner} &= 8{\cdot}7860\,300
\end{aligned}
$$

$$\log \text{Zähler} - \log \text{Nenner} = 0{\cdot}0000\,000.$$

Prüfung der Fehlerquadratsumme:

1. Durch direktes Quadrieren der v und Addieren wurde oben erhalten: $[v\,v] = 23{\cdot}0739$.

2. Die Formel $[v\,v] = -[w\,k]$ gibt:

$$
\begin{aligned}
-w_1\,k_1 &= +\;4{\cdot}5445\\
-w_2\,k_2 &= +\;2{\cdot}0028\\
-w_3\,k_3 &= +\;8{\cdot}2398\\
-w_4\,k_4 &= +\;8{\cdot}2871\\
\hline
[v\,v] &= 23{\cdot}0742.
\end{aligned}
$$

3. Die Formel $[v\,v] = \dfrac{w_1^2}{[a\,a]} + \dfrac{[w_2\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \dfrac{[w_3\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} + \dfrac{[w_4\,.\,3]^2}{[d\,d\,.\,3]}$

gibt mit Benützung der bei Auflösung der Normalgleichungen nach dem Gaußschen Algorithmus bereits ziffermäßig erhaltenen Ausdrücke:

$$[v\,v] = \frac{2{\cdot}6^2}{4} + \frac{3{\cdot}0^2}{3} + \frac{6{\cdot}2^2}{2{\cdot}6667} + \frac{35{\cdot}3970^2}{315{\cdot}6388} = 23{\cdot}0746.$$

Nimmt man von allen drei Resultaten das Mittel: 23·0742, so ist der mittlere Fehler eines gemessenen Winkels vor der Ausgleichung mit seinen mittleren Grenzen:

$$\mu = \sqrt{\frac{[v\,v]}{r}}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2\,r}}\right) = \sqrt{\frac{23{\cdot}0742}{4}}\left(1 \pm \frac{0{\cdot}707}{\sqrt{4}}\right) =$$

$$= \pm\; 2''402\,(1 \pm 0{\cdot}354) = \pm\; 2''40 \pm 0''85.$$

Der durchschnittliche Fehler mit seinen mittleren Grenzen ist:

$$\vartheta = \frac{[v]}{\sqrt{n\,r}}\left(1 \pm \frac{0{\cdot}756}{\sqrt{r}}\right) = \frac{11{\cdot}53}{\sqrt{32}}\left(1 \pm \frac{0{\cdot}756}{\sqrt{4}}\right) = \pm\,2''038\,(1 \pm 0{\cdot}378)$$

$$\vartheta = \pm\; 2''04 \pm 0''77.$$

Der wahrscheinliche Fehler mit seinen mittleren Grenzen ist:

$$\varrho = \frac{[\sqrt{v}]^2}{n\sqrt{nr}}\left(1 \pm \frac{0·855}{\sqrt{r}}\right) = \frac{9·077^2}{8\sqrt{32}}\left(1 \pm \frac{0·855}{\sqrt{4}}\right) = \pm 1''821\,(1 \pm 0·428)$$

$$\varrho = \pm 1''82 \pm 0''78.$$

Also schwankt im Mittel:

μ	zwischen	$\pm 1''55$	und	$\pm 3''25$
ϑ	„	$\pm 1·27$	„	$\pm 2·81$
ϱ	„	$\pm 1·04$	„	$\pm 2·60.$

Behufs Bestimmung der Winkelgenauigkeit nach der Ausgleichung hat man die Übertragungsgleichungen aufzustellen. Sie lauten z. B. für den ersten Winkel x_1, für welchen $a_1 = +1$, $b_1 = 0$, $c_1 = +1$ und $d_1 = -18·98$ ist:

Übertragungsgleichungen:

+ 4 r_1	+ 2 r_2	+ 2 r_3	— 19·53 r_4	— 1	= 0	— 10·53
+ 2 r_1	+ 4 r_2		— 4·31 r_4		= 0	— 10·31
+ 2 r_1		+ 4 r_3	— 9·41 r_4	+ 1	= 0	— 2·41
— 19·53 r_1	— 4·31 r_2	— 9·41 r_3	+ 486·58 r_4	— 18·98	= 0	— 442·97
— 11·53	+ 10·31	— 3·41	+ 461·95	— 16·98		— 440·34

Reduzierte Übertragungsgleichungen:

4 r_1	+ 2 r_2	+ 2 r_3	— 19·53 r_4	— 1	= 0	10·53
r_1	+ 0·5 r_2	+ 0·5 r_3	— 4·8825 r_4	— 0·25	= 0	2·6325
	3 r_2	— r_3	+ 14·075 r_4	— 0·5	= 0	— 15·575
	r_2	— 0·3333 r_3	+ 4·6917 r_4	— 0·1667	= 0	— 5·1917
		2·6667 r_3	+ 5·0467 r_4	+ 0·3333	= 0	— 8·0467
		r_3	+ 1·8925 r_4	+ 0·1250	= 0	— 3·0175
			315·6388 r_4	— 12·3825	= 0	— 303·2561
			r_4	— 0·0392	= 0	— 0·9608

Die Auflösung der reduzierten Übertragungsgleichungen liefert die Koeffizienten:

$$r_1 = -0·0840,$$
$$r_2 = -0·0838,$$
$$r_3 = -0·1992,$$
$$r_4 = +0·0392.$$

Berechnung der Faktoren F:

						F^2
$F_1 =$	$1 + 0.084$		$- 0.199$	$- 0.744$	$= + 0.141$	0·0199
$F_2 =$	$+ 0.084$	$- 0.084$		$+ 0.084$	$= + 0.084$	0·0071
$F_3 =$	$+ 0.084$	$- 0.084$		$- 0.105$	$= - 0.105$	0·0110
$F_4 =$		$- 0.084$		$- 0.188$	$= + 0.104$	0·0108
$F_5 =$		$- 0.084$		$- 0.003$	$= - 0.081$	0·0066
$F_6 =$			$- 0.199$	$+ 0.375$	$= + 0.176$	0·0310
$F_7 =$			$- 0.199$		$= - 0.199$	0·0396
$F_8 =$	$- 0.084$		$- 0.199$		$= - 0.115$	0·0132
					$[F] = + 0.005$	$[FF] = 0.1392$

Zur Kontrolle der Rechnung soll, weil $[FF] = min$ ist, $[F] = 0$ sein, was bis auf die Abrundungsfehler hinreichend übereinstimmt. Die Kontrollberechnung von $[FF]$ ergibt nach Formel (4) des § 61, S. 239:

$$[FF] = 1 - \frac{a_1^2}{[aa]} - \frac{[b_1 . 1]^2}{[bb.1]} - \frac{[c_1 . 2]^2}{[cc.2]} - \frac{[d_1 . 3]^2}{[dd.3]}$$

$$[FF] = 1 - \frac{1}{4} - \frac{0.5^2}{3} - \frac{0.3333^2}{2.6667} - \frac{12.3825^2}{315.6388} = 0.1392.$$

Sohin ist der mittlere Fehler des ersten Winkels x_1 nach der Ausgleichung:

$$M_1 = \mu \sqrt{[FF]} = 2.402 \sqrt{0.1392} = - 0''.896.$$

Dieses für die Einübung der vorgetragenen Theorien geeignete Beispiel behandelt die Ausgleichung eines Viereckes, worin sämtliche Winkel für sich gemessen wurden; wir erwähnen aber, daß Ausgleichungen von reinen Winkelmessungen in diesem Sinne heute nur mehr selten ausgeführt, sondern durch das Problem der Ausgleichung von Richtungsmessungen ersetzt werden, das im zweiten Bande eine eingehende Behandlung erfahren wird.

§ 63. Einteilung der Ausgleichungsaufgaben.

Zum Schlusse des ersten Bandes sei eine planmäßige Zusammenstellung aller Formen von Ausgleichungsaufgaben gegeben.

Die Bestimmung einer unbekannten Größe kann entweder auf direktem oder auf indirektem Wege erfolgen. In dem ersten Falle suchen wir die wahrscheinlichsten Werte der beobachteten Größen selbst und nennen diese dann kurzweg direkte Beobachtungen, im zweiten Falle suchen wir die wahrscheinlichsten Werte anderer,

mit den beobachteten Größen in einem mathematischen Zusammenhange stehender Größen und bezeichnen dieselben als **vermittelnde Beobachtungen**.

In beiden Fällen können die beobachteten Größen voneinander unabhängig oder abhängig sein; man spricht dann von **unabhängigen Beobachtungen** beziehungsweise von **bedingten Beobachtungen**.

Im ganzen unterscheidet man daher folgende Formen von Ausgleichungsaufgaben:

1. Direkte unabhängige Beobachtungen oder kurz **direkte Beobachtungen**. Die Fehlergleichungen lauten hiefür, wenn $l_1, l_2, \ldots l_n$ die einzelnen Beobachtungen, $v_1, v_2, \ldots v_n$ die wahrscheinlichsten Verbesserungen und x die zu suchende Größe bedeuten:

$$\left.\begin{array}{l} x - l_1 = v_1 \\ x - l_2 = v_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x - l_n = v_n \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 \text{ Unbekannte} \\ n \text{ Beobachtungen,} \\ n \text{ Gleichungen.} \end{array}$$

Der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten x geht aus der Regel des arithmetischen Mittels $x = \frac{[l]}{n}$ hervor. Eine Ausgleichungsaufgabe liegt vor, wenn $n > 1$ ist, indem dann $n - 1$ überschüssige Beobachtungen vorhanden sind. (Beispiel hiezu im § 29.)

2. Indirekte unabhängige Beobachtungen oder kurz **vermittelnde Beobachtungen**. Zwischen den Unbekannten $x, y, z, \ldots$ und den unabhängigen Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots l_n$ bestehen die Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots - l_1 = v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots - l_2 = v_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots - l_n = v_n \end{array}\right\} \begin{array}{l} u \text{ Unbekannte,} \\ n \text{ Beobachtungen,} \\ n \text{ Gleichungen.} \end{array}$$

Die Koeffizienten $a, b, c, \ldots$ sind gegebene, fehlerfrei vorausgesetzte Größen; die Unbekannten erhält man aus den Normalgleihungen (§ 43, S. 165):

$$\begin{array}{llllll} [aa]\,x + & [ab]\,y + & [ac]\,z + & \ldots - & [al] & = 0 \\ & [bb] & [bc] & & [bl] & \\ & & [cc] & & [cl] & \end{array}$$

Mit einer Ausgleichungsaufgabe hat man es zu tun, wenn $n > u$ ist, d. h. wenn eine überschüssige Anzahl von Beobachtungen vorliegt. (Beispiele hiezu im § 52.)

3. Direkte abhängige Beobachtungen oder kurz **bedingte Beobachtungen.** Bestehen zwischen den m Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_m$ die r Bedingungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_m x_m &= 0 \\
q_0 + q_1 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_m x_m &= 0 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad & \cdot \quad \cdot \\
t_0 + t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_m x_m &= 0,
\end{aligned}
$$

welche durch Einführung der Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots l_m$ an Stelle der Unbekannten in folgende Widerspruchsgleichungen übergehen:

$$
\begin{aligned}
p_0 + p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_m l_m &= w_1 \\
q_0 + q_1 l_1 + q_2 l_2 + \cdots + q_m l_m &= w_2 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad & \cdot \quad \cdot \\
t_0 + t_1 l_1 + t_2 l_2 + \cdots + t_m l_m &= w_r,
\end{aligned}
$$

so lauten die Fehlergleichungen:

$$
\left.
\begin{aligned}
p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots + p_m v_m + w_1 &= 0 \\
q_1 v_1 + q_2 v_2 + \cdots + q_m v_m + w_2 &= 0 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad & \cdot \quad \cdot \\
t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_m v_m + w_r &= 0
\end{aligned}
\right\}
\begin{array}{l}
m \text{ Unbekannte,} \\
m \text{ Beobachtungen,} \\
r \text{ Gleichungen.}
\end{array}
$$

Die Koeffizienten $p, q, \ldots t$ sind gegebene, fehlerfrei vorausgesetzte Größen, welche nur zur Unterscheidung von $a, b, c, \ldots$ der früheren Aufgabe mit anderen Buchstaben eingeführt sind. Die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten erhält man entweder direkt nach der Korrelatenmethode oder indirekt durch Zurückführung auf vermittelnde Beobachtungen nach der Substitutionsmethode. Eine Ausgleichungsaufgabe ist nur möglich, wenn $m > r$ ist, denn für $m = r$ liegt die nicht mehr unbestimmte Aufgabe vor, aus r Gleichungen ebensoviele Unbekannte zu berechnen und für $m < r$ sind mehr Bedingungen gestellt als gleichzeitig erfüllt werden können. Da man mit Hilfe der r Bedingungsgleichungen immer r Unbekannte durch die übrigen $m - r$ Unbekannte ausdrücken kann und für die Bestimmung der noch übrigbleibenden $m - r$ Unbekannten m Gleichungen zur Verfügung stehen, so stellt r die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen dar, denn es ist $m - (m - r) = r$. (Beispiele hiezu im § 56.)

4. Indirekte abhängige Beobachtungen oder **vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.** Es treten zu den n Fehlergleichungen vermittelnder Beobachtungen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots - l_1 = v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots - l_2 = v_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \cdots - l_n = v_n \end{array}\right\} \begin{array}{l} u \text{ Unbekannte,} \\ n \text{ Beobachtungen,} \\ n \text{ Gleichungen} \end{array}$$

noch r Bedingungsgleichungen hinzu, welche zwischen den zu ermittelnden Unbekannten (also nicht zwischen den Beobachtungen l) erfüllt sein müssen, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} p_0 + p_1 x + p_2 y + p_3 z + \cdots = 0 \\ q_0 + q_1 x + q_2 y + q_3 z + \cdots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_0 + t_1 x + t_2 y + t_4 z + \cdots = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} u \text{ Unbekannte,} \\ r \text{ Gleichungen.} \end{array}$$

Eine Ausgleichungsaufgabe ist nur möglich, wenn $u > r$ und $n > u - r$, also wenn $n > u - r > 0$ ist, denn wenn man mittels der r Bedingungsgleichungen r Unbekannte durch die übrigen $u - r$ Unbekannte ausdrückt, so bleiben nur noch $u - r$ Unbekannte zu bestimmen übrig, wofür n Beobachtungen zur Verfügung stehen. Die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen ist demnach $n - (u - r) = n + r - u$, und soll eine Ausgleichungsaufgabe zustande kommen, muß die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen größer als Null, also $n > u - r$ sein.

Auf diese Ausgleichungsform wird im zweiten Bande näher eingegangen werden.

5. Alle diese verschiedenen Formen von Ausgleichungsaufgaben lassen sich als Spezialfälle folgender allgemeinen Aufgabe betrachten:

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots + p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots + p_m v_m + w_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots + q_1 v_1 + q_2 v_2 + \cdots + q_m v_m + w_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \cdots + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_m v_m + w_n = 0. \end{array}$$

Ist die Anzahl der Unbekannten u, die Anzahl der Beobachtungen und daher auch deren Verbesserungen m und die Anzahl der Gleichungen n, so muß, wenn eine Ausgleichungsaufgabe vorhanden sein soll, $n > u$ und $m > n - u$ sein. Denn wenn $n > u$ ist, so kann man alle u Unbekannte $x, y, z, \ldots$ eliminieren, so daß dann nur noch $n - u$ Gleichungen mit m unbekannten Beobachtungsverbesserungen $v_1, v_2, \ldots v_m$ übrig bleiben. Da aber eine Ausgleichungsaufgabe das Vorhandensein einer überschüssigen Anzahl von Beobachtungen beziehungsweise von Verbesserungen v verlangt, welche Anzahl gleich $n - u$, nämlich der Anzahl der übrigbleibenden Gleichungen ist, so muß für eine Ausgleichung $m > n - u$ und $m > n - u > 0$ sein. Da

das Quadrat des mittleren Gewichtseinheitsfehlers definiert ist durch den Quotienten: Summe der Fehlerquadrate dividiert durch die Zahl der überschüssigen Beobachtungen, so hat man für die angeführten fünf Ausgleichungsformen folgende Fehlerformeln:

1. Direkte Beobachtungen: $\mu_0 = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}}$

2. Vermittelnde Beobachtungen: $\mu_0 = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-u}}$

3. Bedingte Beobachtungen: $\mu_0 = \sqrt{\frac{[v\,v]}{r}}$

4. Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen: $\mu_0 = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n+r-u}}$

5. Bedingte Beobachtungen mit Unbekannten: $\mu_0 = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-u}}$.

Von der allgemeinen Aufgabe 5) sind die vier vorhergehenden Aufgaben als Spezialfälle anzusehen, wovon man sich durch Nullsetzen der entsprechenden Koeffizienten überzeugen kann. Nehmen die Koeffizienten $a, b, \ldots$ den Wert Null an, so geht das Problem der bedingten Beobachtungen hervor, sind die Koeffizienten $p, q, \ldots$ gleich Null, so resultiert das Problem der vermittelnden Beobachtungen.

Die hier getroffene Unterscheidung der Hauptformen der Ausgleichungsaufgaben ist aber keineswegs eine streng abgegrenzte, es können vielmehr, wie dies in den §§ 49, 56 und 57 dargetan wurde, dieselben Aufgaben nach verschiedenen Methoden aufgelöst und eine Berechnungsform in eine andere übergeführt werden. Welchen Verfahrens man sich in einem gegebenen Falle zu bedienen habe, hängt von der zu erwartenden Einfachheit und Bequemlichkeit der Rechnung ab.

Tabellen.



Tabelle I.

Werte der Funktion $\Theta(a\,h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a\,h} e^{-t^2}\,dt.$

$a\,h$	$\Theta(a\,h)$	Diff.	$a\,h$	$\Theta(a\,h)$	Diff.	$a\,h$	$\Theta(a\,h)$	Diff.
0·00	0·00000 00	1128 33	0·35	0·37938 19	994 77	0·70	0·67780 10	686 44
0·01	0·01128 33	1128 11	0·36	0·38932 96	987 63	0·71	0·68466 54	676 76
0·02	0·02256 44	1127 66	0·37	0·39920 59	980 34	0·72	0·69143 30	667 08
0·03	0·03384 10	1126 99	0·38	0·40900 93	972 92	0·73	0·69810 38	657 42
0·04	0·04511 09	1126 09	0·39	0·41873 85	965 37	0·74	0·70467 80	647 76
0·05	0·05637 18	1124 97	0·40	0·42839 22	957 68	0·75	0·71115 56	638 11
0·06	0·06762 15	1123 62	0·41	0·43796 90	949 86	0·76	0·71753 67	628 49
0·07	0·07885 77	1122 04	0·42	0·44746 76	941 91	0·77	0·72382 16	618 88
0·08	0·09007 81	1120 25	0·43	0·45688 67	933 84	0·78	0·73001 04	609 31
0·09	0·10128 06	1118 24	0·44	0·46622 51	925 67	0·79	0·73610 35	599 75
0·10	0·11246 30	1116 00	0·45	0·47548 18	917 37	0·80	0·74210 10	590 23
0·11	0·12362 30	1113 54	0·46	0·48465 55	908 97	0·81	0·74800 33	580 75
0·12	0·13475 84	1110 87	0·47	0·49374 52	900 46	0·82	0·75381 08	571 30
0·13	0·14586 71	1107 99	0·48	0·50274 98	891 85	0·83	0·75952 38	561 89
0·14	0·15694 70	1104 89	0·49	0·51166 83	883 16	0·84	0·76514 27	552 53
0·15	0·16799 59	1101 58	0·50	0·52049 99	874 38	0·85	0·77066 80	543 22
0·16	0·17901 17	1098 06	0·51	0·52924 37	865 50	0·86	0·77610 02	533 96
0·17	0·18999 23	1094 34	0·52	0·53789 87	856 54	0·87	0·78143 98	524 75
0·18	0·20093 57	1090 41	0·53	0·54646 41	847 51	0·88	0·78668 73	515 59
0·19	0·21183 98	1086 27	0·54	0·55493 92	838 41	0·89	0·79184 32	506 50
0·20	0·22270 25	1081 93	0·55	0·56332 33	829 24	0·90	0·79690 82	497 46
0·21	0·23352 18	1077 40	0·56	0·57161 57	820 01	0·91	0·80188 28	488 49
0·22	0·24429 58	1072 67	0·57	0·57981 58	810 71	0·92	0·80676 77	479 58
0·23	0·25502 25	1067 75	0·58	0·58792 29	801 36	0·93	0·81156 35	470 75
0·24	0·26570 00	1062 63	0·59	0·59593 65	791 96	0·94	0·81627 10	461 98
0·25	0·27632 63	1057 34	0·60	0·60385 61	782 51	0·95	0·82089 08	453 28
0·26	0·28689 97	1051 85	0·61	0·61168 12	773 02	0·96	0·82542 36	444 67
0·27	0·29741 82	1046 18	0·62	0·61941 14	763 49	0·97	0·82987 03	436 12
0·28	0·30788 00	1040 34	0·63	0·62704 63	753 94	0·98	0·83423 15	427 66
0·29	0·31828 34	1034 33	0·64	0·63458 57	744 35	0·99	0·83850 81	419 27
0·30	0·32862 67	1028 14	0·65	0·64202 92	734 73	1·00	0·84270 08	410 97
0·31	0·33890 81	1021 78	0·66	0·64937 65	725 10	1·01	0·84681 05	402 75
0·32	0·34912 59	1015 26	0·67	0·65662 75	715 45	1·02	0·85083 80	394 62
0·33	0·35927 85	1008 59	0·68	0·66378 20	705 79	1·03	0·85478 42	386 57
0·34	0·36936 44	1001 75	0·69	0·67083 99	696 11	1·04	0·85864 99	378 61

$a h$	$\Theta(a h)$	Diff.	$a h$	$\Theta(a h)$	Diff.	$a h$	$\Theta(a h)$	Diff.
1·05	0·86243 60	370 75	1·45	0·95969 50	135 85	1·85	0·99111 10	36 15
1·06	0·86614 35	362 97	1·46	0·96105 35	131 94	1·86	0·99147 25	34 82
1·07	0·86977 32	355 29	1·47	0·96237 29	128 12	1·87	0·99182 07	33 55
1·08	0·87332 61	347 69	1·48	0·96365 41	124 38	1·88	0·99215 62	32 31
1·09	0·87680 30	340 20	1·49	0·96489 79	120 73	1·89	0·99247 93	31 11
1·10	0·88020 50	332 80	1·50	0·96610 52	117 16	1·90	0·99279 04	29 95
1·11	0·88353 30	325 49	1·51	0·96727 68	113 67	1·91	0·99308 99	28 83
1·12	0·88678 79	318 28	1·52	0·96841 35	110 27	1·92	0·99337 82	27 75
1·13	0·88997 07	311 16	1·53	0·96951 62	106 95	1·93	0·99365 57	26 69
1·14	0 89308 23	304 15	1·54	0·97058 57	103 70	1·94	0·99392 26	25 68
1·15	0·89612 38	297 24	1·55	0·97162 27	100 54	1·95	0·99417 94	24 69
1·16	0·89909 62	290 42	1·56	0·97262 81	97 45	1·96	0·99442 63	23 74
1·17	0·90200 04	283 70	1·57	0·97360 26	94 44	1·97	0·99466 37	22 83
1·18	0·90483 74	277 09	1·58	0·97454 70	91 50	1·98	0·99489 20	21 94
1·19	0·90760 83	270 57	1·59	0·97546 20	88 64	1·99	0·99511 14	21 09
1·20	0·91031 40	264 15	1·60	0·97634 84	85 85	2·00	0·99532 23	20 25
1·21	0·91295 55	257 84	1·61	0·97720 69	83 12	2·01	0·99552 48	19 47
1·22	0·91553 39	251 62	1·62	0·97803 81	80 48	2·02	0·99571 95	18 68
1·23	0·91805 01	245 51	1·63	0·97884 29	77 89	2·03	0·99590 63	17 95
1·24	0·92050 52	239 49	1·64	0·97962 18	75 38	2·04	0·99608 58	17 23
1·25	0·92290 01	233 58	1·65	0·98037 56	72 93	2·05	0·99625 81	16 54
1·26	0·92523 59	227 77	1·66	0·98110 49	70 55	2·06	0·99642 35	15 87
1·27	0·92751 36	222 06	1·67	0·98181 04	68 24	2·07	0·99658 22	15 22
1·28	0·92973 42	216 45	1·68	0·98249 28	65 98	2·08	0·99673 44	14 61
1·29	0·93189 87	210 93	1·69	0·98315 26	63 78	2·09	0·99688 05	14 00
1·30	0·93400 80	205 52	1·70	0·98379 04	61 66	2·10	0·99702 05	13 43
1·31	0·93606 32	200 20	1·71	0·98440 70	59 58	2·11	0·99715 48	12 88
1·32	0·93806 52	194 98	1·72	0·98500 28	57 57	2·12	0·99728 36	12 34
1·33	0·94001 50	189 87	1·73	0·98557 85	55 61	2·13	0·99740 70	11 83
1·34	0·94191 37	184 85	1·74	0·98613 46	53 71	2·14	0·99752 53	11 33
1·35	0·94376 22	179 92	1·75	0·98667 17	51 86	2·15	0·99763 86	10 86
1·36	0·94556 14	175 10	1·76	0·98719 03	50 07	2·16	0·99774 72	10 39
1·37	0·94731 24	170 36	1·77	0·98769 10	48 32	2·17	0·99785 11	9 94
1·38	0·94901 60	165 73	1·78	0·98817 42	46 64	2·18	0·99795 05	9 54
1·39	0·95067 33	161 18	1·79	0·98864 06	44 99	2·19	0·99804 59	9 13
1·40	0·95228 51	156 73	1·80	0·98909 05	43 40	2·20	0·99813 72	8 72
1·41	0·95385 24	152 38	1·81	0·98952 45	41 86	2·21	0·99822 44	8 35
1·42	0·95537 62	148 11	1·82	0·98994 31	40 36	2·22	0·99830 79	7 99
1·43	0·95685 73	143 93	1·83	0·99034 67	38 92	2·23	0·99838 78	7 64
1·44	0·95829 66	139 84	1·84	0·99073 59	37 51	2·24	0·99846 42	7 31

$a\,h$	$\Theta(a\,h)$	Diff.	$a\,h$	$\Theta(a\,h)$	Diff.	$a\,h$	$\Theta(a\,h)$	Diff.
2·25	0·99853 73	6 98	2·65	0·99982 15	98	3·05	0·99998 39	10
2·26	0·99860 71	6 68	2·66	0·99983 13	93	3·06	0·99998 49	10
2·27	0·99867 39	6 38	2·67	0·99984 06	88	3·07	0·99998 59	8
2·28	0·99873 77	6 09	2·68	0·99984 94	84	3·08	0·99998 67	9
2·29	0·99879 86	5 82	2·69	0·99985 78	79	3·09	0·99998 76	8
2·30	0·99885 68	5 56	2·70	0·99986 57	75	3·10	0·99998 84	7
2·31	0·99891 24	5 31	2·71	0·99987 32	71	3·11	0·99998 91	7
2·32	0·99896 55	5 07	2·72	0·99988 03	67	3·12	0·99998 98	6
2·33	0·99901 62	4 84	2·73	0·99988 70	63	3·13	0·99999 04	6
2·34	0·99906 46	4 61	2·74	0·99989 33	61	3·14	0·99999 10	6
2·35	0·99911 07	4 41	2·75	0·99989 94	57	3·15	0·99999 16	5
2·36	0·99915 48	4 20	2·76	0·99990 51	54	3·16	0·99999 21	5
2·37	0·99919 68	4 01	2·77	0·99991 05	51	3·17	0·99999 26	5
2·38	0·99923 69	3 82	2·78	0·99991 56	48	3·18	0·99999 31	5
2·39	0·99927 51	3 64	2·79	0·99992 04	46	3·19	0·99999 36	4
2·40	0·99931 15	3 47	2·80	0·99992 50	43	3·20	0·99999 40	4
2·41	0·99934 62	3 31	2·81	0·99992 93	41	3·21	0·99999 44	3
2·42	0·99937 93	3 15	2·82	0·99993 34	38	3·22	0·99999 47	4
2·43	0·99941 08	3 00	2·83	0·99993 72	37	3·23	0·99999 51	3
2·44	0·99944 08	2 86	2·84	0·99994 09	34	3·24	0·99999 54	3
2·45	0·99946 94	2 72	2·85	0·99994 43	33	3·25	0·99999 57	3
2·46	0·99949 66	2 60	2·86	0·99994 76	31	3·26	0·99999 60	2
2·47	0·99952 26	2 46	2·87	0·99995 07	29	3·27	0·99999 62	3
2·48	0·99954 72	2 35	2·88	0·99995 36	27	3·28	0·99999 65	2
2·49	0·99957 07	2 23	2·89	0·99995 63	26	3·29	0·99999 67	2
2·50	0·99959 30	2 13	2·90	0·99995 89	24	3·30	0·99999 69	2
2·51	0·99961 43	2 02	2·91	0·99996 13	23	3·31	0·99999 71	2
2·52	0·99963 45	1 92	2·92	0·99996 36	22	3·32	0·99999 73	2
2·53	0·99965 37	1 83	2·93	0·99996 58	21	3·33	0·99999 75	2
2·54	0·99967 20	1 73	2·94	0·99996 79	19	3·34	0·99999 77	1
2·55	0·99968 93	1 65	2·95	0·99996 98	18	3·35	0·99999 78	2
2·56	0·99970 58	1 57	2·96	0·99997 16	17	3·36	0·99999 80	1
2·57	0·99972 15	1 49	2·97	0·99997 33	17	3·37	0·99999 81	1
2·58	0·99973 64	1 41	2·98	0·99997 50	15	3·38	0·99999 82	2
2·59	0·99975 05	1 35	2·99	0·99997 65	14	3·39	0·99999 84	1
2·60	0·99976 40	1 27	3·00	0·99997 79	14	3·40	0·99999 85	1
2·61	0·99977 67	1 21	3·01	0·99997 93	12	3·41	0·99999 86	1
2·62	0·99978 88	1 15	3·02	0·99998 05	12	3·42	0·99999 87	1
2·63	0·99980 03	1 09	3·03	0·99998 17	12	3·43	0·99999 88	1
2·64	0·99981 12	1 03	3·04	0·99998 29	10	3·44	0·99999 89	0

$a\,h$	$\Theta\,(a\,h)$	$a\,h$	$\Theta\,(a\,h)$	$a\,h$	$\Theta\,(a\,h)$
3·45	0·99999 89 [illegible]	3·65	0·999999 75551	3·85	0·999999 94812
3·46	0·999999 00780	3·66	0·999999 77333	3·86	0·999999 95208
3·47	0·999999 07672	3·67	0·999999 78990	3·87	0·999999 95575
3·48	0·999999 14101	3·68	0·999999 80528	3·88	0·999999 95915
3·49	0·999999 20097	3·69	0·999999 81957	3·89	0·999999 96230
3·50	0·999999 25691	3·70	0·999999 83285	3·90	0·999999 96521
3·51	0·999999 30905	3·71	0·999999 84517	3·91	0·999999 96790
3·52	0·999999 35766	3·72	0·999999 85663	3·92	0·999999 97039
3·53	0·999999 40296	3·73	0·999999 86726	3·93	0·999999 97260
3·54	0·999999 44519	3·74	0·999999 87712	3·94	0·999999 97482
3·55	0·999999 48452	3·75	0·999999 88629	3·95	0·999999 97678
3·56	0·999999 52115	3·76	0·999999 89477	3·96	0·999999 97860
3·57	0·999999 55527	3·77	0·999999 90265	3·97	0·999999 98028
3·58	0·999999 58703	3·78	0·999999 90995	3·98	0·999999 98183
3·59	0·999999 61661	3·79	0·999999 91672	3·99	0·999999 98327
3·60	0·999999 64414	3·80	0·999999 92300	4·00	0·999999 98458
3·61	0·999999 66975	3·81	0·999999 92881	4·10	0·999999 99330
3·62	0·999999 69358	3·82	0·999999 93421	4·20	0·999999 99714
3·63	0·999999 71574	3·83	0·999999 93921	4·30	0·999999 99881
3·64	0·999999 73636	3·84	0·999999 94383	4·40	0·999999 99951
				4·50	0·999999 99980
				4·60	0·999999 99992
				4·70	0·999999 99997
				4·80	0·999999 99999

Tabelle II.

Werte der Funktion $\Theta\left(\varkappa\frac{a}{\varrho}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varkappa\frac{a}{\varrho}} e^{-t^2}\,dt$.

$\frac{a}{\varrho}$	$\Theta\left(\varkappa\frac{a}{\varrho}\right)$	Diff.	$\frac{a}{\varrho}$	$\Theta\left(\varkappa\frac{a}{\varrho}\right)$	Diff.	$\frac{a}{\varrho}$	$\Theta\left(\varkappa\frac{a}{\varrho}\right)$	Diff.
0·00	0·00000	538	0·30	0·16035	527	0·60	0·31430	495
0·01	0·00538	538	0·31	0·16562	526	0·61	0·31925	494
0·02	0·01076	538	0·32	0·17088	526	0·62	0·32419	492
0·03	0·01614	538	0·33	0·17614	524	0·63	0·32911	491
0·04	0·02152	538	0·34	0·18138	524	0·64	0·33402	490
0·05	0·02690	538	0·35	0·18662	523	0·65	0·33892	488
0·06	0·03228	538	0·36	0·19185	522	0·66	0·34380	486
0·07	0·03766	537	0·37	0·19707	522	0·67	0·34866	486
0·08	0·04303	537	0·38	0·20229	520	0·68	0·35352	483
0·09	0·04840	538	0·39	0·20749	519	0·69	0·35835	482
0·10	0·05378	536	0·40	0·21268	519	0·70	0·36317	481
0·11	0·05914	537	0·41	0·21787	517	0·71	0·36798	479
0·12	0·06451	536	0·42	0·22304	517	0·72	0·37277	478
0·13	0·06987	536	0·43	0·22821	515	0·73	0·37755	476
0·14	0·07523	536	0·44	0·23336	515	0·74	0·38231	474
0·15	0·08059	535	0·45	0·23851	513	0·75	0·38705	473
0·16	0·08594	535	0·46	0·24364	512	0·76	0·39178	471
0·17	0·09129	534	0·47	0·24876	512	0·77	0·39649	469
0·18	0·09663	534	0·48	0·25388	510	0·78	0·40118	468
0·19	0·10197	534	0·49	0·25898	509	0·79	0·40586	466
0·20	0·10731	533	0·50	0·26407	508	0·80	0·41052	465
0·21	0·11264	532	0·51	0·26915	506	0·81	0·41517	462
0·22	0·11796	532	0·52	0·27421	506	0·82	0·41979	461
0·23	0·12328	532	0·53	0·27927	504	0·83	0·42440	459
0·24	0·12860	531	0·54	0·28431	503	0·84	0·42899	458
0·25	0·13391	530	0·55	0·28934	502	0·85	0·43357	456
0·26	0·13921	530	0·56	0·29436	500	0·86	0·43813	454
0·27	0·14451	529	0·57	0·29936	499	0·87	0·44267	452
0·28	0·14980	528	0·58	0·30435	498	0·88	0·44719	450
0·29	0·15508	527	0·59	0·30933	497	0·89	0·45169	449

$\frac{a}{\varrho}$	$\Theta\left(\varkappa\frac{a}{\varrho}\right)$	Diff.	$\frac{a}{\varrho}$	$\Theta\left(\varkappa\frac{a}{\varrho}\right)$	Diff.	$\frac{a}{\varrho}$	$\Theta\left(\varkappa\frac{a}{\varrho}\right)$	Diff.
0·90	0·45618	446	1·30	0·61942	366	1·70	0·74847	277
0·91	0·46064	445	1·31	0·62308	363	1·71	0·75124	276
0·92	0·46509	443	1·32	0·62671	361	1·72	0·75400	274
0·93	0·46952	441	1·33	0·63032	359	1·73	0·75674	271
0·94	0·47393	439	1·34	0·63391	356	1·74	0·75945	269
0·95	0·47832	438	1·35	0·63747	355	1·75	0·76214	267
0·96	0·48270	435	1·36	0·64102	352	1·76	0·76481	265
0·97	0·48705	434	1·37	0·64454	350	1·77	0·76746	263
0·98	0·49139	431	1·38	0·64804	348	1·78	0·77009	261
0·99	0·49570	430	1·39	0·65152	346	1·79	0·77270	258
1·00	0·50000	428	1·40	0·65498	343	1·80	0·77528	257
1·01	0·50428	425	1·41	0·65841	341	1·81	0·77785	254
1·02	0·50853	424	1·42	0·66182	339	1·82	0·78039	252
1·03	0·51277	422	1·43	0·66521	337	1·83	0·78291	251
1·04	0·51699	420	1·44	0·66858	335	1·84	0·78542	248
1·05	0·52119	418	1·45	0·67193	333	1·85	0·78790	246
1·06	0·52537	415	1·46	0·67526	330	1·86	0·79036	244
1·07	0·52952	414	1·47	0·67856	328	1·87	0·79280	242
1·08	0·53366	412	1·48	0·68184	326	1·88	0·79522	239
1·09	0·53778	410	1·49	0·68510	323	1·89	0·79761	238
1·10	0·54188	407	1·50	0·68833	322	1·90	0·79999	236
1·11	0·54595	406	1·51	0·69155	319	1·91	0·80235	234
1·12	0·55001	403	1·52	0·69474	317	1·92	0·80469	231
1·13	0·55404	402	1·53	0·69791	315	1·93	0·80700	230
1·14	0·55806	399	1·54	0·70106	313	1·94	0·80930	228
1·15	0·56205	397	1·55	0·70419	310	1·95	0·81158	225
1·16	0·56602	396	1·56	0·70729	309	1·96	0·81383	224
1·17	0·56998	393	1·57	0·71038	306	1·97	0·81607	221
1·18	0·57391	391	1·58	0·71344	304	1·98	0·81828	220
1·19	0·57782	389	1·59	0·71648	301	1·99	0·82048	218
1·20	0·58171	387	1·60	0·71949	300	2·00	0·82266	215
1·21	0·58558	384	1·61	0·72249	297	2·01	0·82481	214
1·22	0·58942	383	1·62	0·72546	295	2·02	0·82695	212
1·23	0·59325	380	1·63	0·72841	293	2·03	0·82907	210
1·24	0·59705	378	1·64	0·73134	291	2·04	0·83117	207
1·25	0·60083	377	1·65	0·73425	289	2·05	0·83324	206
1·26	0·60460	373	1·66	0·73714	286	2·06	0·83530	204
1·27	0·60833	372	1·67	0·74000	285	2·07	0·83734	202
1·28	0·61205	370	1·68	0·74285	282	2·08	0·83936	201
1·29	0·61575	367	1·69	0·74567	280	2·09	0·84137	198

$\frac{a}{\varrho}$	$\Theta\left(\varkappa \frac{a}{\varrho}\right)$	Diff.	$\frac{a}{\varrho}$	$\Theta\left(\varkappa \frac{a}{\varrho}\right)$	Diff.	$\frac{a}{\varrho}$	$\Theta\left(\varkappa \frac{a}{\varrho}\right)$	Diff.
2·10	0·84335	196	2·50	0·90825	129	2·90	0·94954	79
2·11	0·84531	195	2·51	0·90954	128	2·91	0·95033	78
2·12	0·84726	193	2·52	0·91082	126	2·92	0·95111	76
2·13	0·84919	190	2·53	0·91208	124	2·93	0·95187	76
2·14	0·85109	189	2·54	0·91332	124	2·94	0·95263	75
2·15	0·85298	188	2·55	0·91456	122	2·95	0·95338	74
2·16	0·85486	185	2·56	0·91578	120	2·96	0·95412	73
2·17	0·85671	183	2·57	0·91698	119	2·97	0·95485	72
2·18	0·85854	182	2·58	0·91817	118	2·98	0·95557	71
2·19	0·86036	180	2·59	0·91935	116	2·99	0·95628	70
2·20	0·86216	178	2·60	0·92051	115	3·00	0·95698	69
2·21	0·86394	176	2·61	0·92166	114	3·01	0·95767	68
2·22	0·86570	175	2·62	0·92280	112	3·02	0·95835	67
2·23	0·86745	172	2·63	0·92392	111	3·03	0·95902	66
2·24	0·86917	171	2·64	0·92503	110	3·04	0·95968	65
2·25	0·87088	170	2·65	0·92613	108	3·05	0·96033	65
2·26	0·87258	167	2·66	0·92721	107	3·06	0·96098	63
2·27	0·87425	166	2·67	0·92828	106	3·07	0·96161	63
2·28	0·87591	164	2·68	0·92934	104	3·08	0·96224	62
2·29	0·87755	163	2·69	0·93038	103	3·09	0·96286	60
2·30	0·87918	160	2·70	0·93141	102	3·10	0·96346	60
2·31	0·88078	159	2·71	0·93243	101	3·11	0·96406	60
2·32	0·88237	158	2·72	0·93344	99	3·12	0·96466	58
2·33	0·88395	155	2·73	0·93443	98	3·13	0·96524	58
2·34	0·88550	155	2·74	0·93541	97	3·14	0·96582	56
2·35	0·88705	152	2·75	0·93638	96	3·15	0·96638	56
2·36	0·88857	151	2·76	0·93734	94	3·16	0·96694	55
2·37	0·89008	149	2·77	0·93828	94	3·17	0·96749	55
2·38	0·89157	147	2·78	0·93922	92	3·18	0·96804	53
2·39	0·89304	146	2·79	0·94014	91	3·19	0·96857	53
2·40	0·89450	145	2·80	0·94105	90	3·20	0·96910	52
2·41	0·89595	143	2·81	0·94195	89	3·21	0·96962	51
2·42	0·89738	141	2·82	0·94284	87	3·22	0·97013	51
2·43	0·89879	140	2·83	0·94371	87	3·23	0·97064	50
2·44	0·90019	138	2·84	0·94458	85	3·24	0·97114	49
2·45	0·90157	136	2·85	0·94543	84	3·25	0·97163	48
2·46	0·90293	135	2·86	0·94627	84	3·26	0·97211	48
2·47	0·90428	134	2·87	0·94711	82	3·27	0·97259	47
2·48	0·90562	132	2·88	0·94793	81	3·28	0·97306	46
2·49	0·90694	131	2·89	0·94874	80	3·29	0·97352	45

$\frac{a}{\varrho}$	$\Theta\left(\varkappa\frac{a}{\varrho}\right)$	Diff.	$\frac{a}{\varrho}$	$\Theta\left(\varkappa\frac{a}{\varrho}\right)$	Diff	$\frac{a}{\varrho}$	$\Theta\left(\varkappa\frac{a}{\varrho}\right)$	Diff.
3·30	0·97397	45	3·40	0·97817	359	4·40	0·99700	60
3·31	0·97442	44	3·50	0·98176	306	4·50	0·99760	48
3·32	0·97486	44	3·60	0·98482	261	4·60	0·99808	40
3·33	0·97530	43	3·70	0·98743	219	4·70	0·99848	31
3·34	0·97573	42	3·80	0 98962	185	4·80	0·99879	26
3·35	0·97615	42	3·90	0·99147	155	4·90	0·99905	21
3·36	0·97657	41	4·00	0·99302	129	5·00	0·99926	16
3·37	0·97698	40	4·10	0·99431	108	5·10	0·99942	13
3·38	0·97738	40	4·20	0·99539	88	5·20	0·99955	10
3·39	0 97778	39	4·30	0·99627	73	5·30	0·99965	

Tabelle III.

Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers zwischen den Grenzen Null und dem *k*-fachen wahrscheinlichen Fehler.

k	0·00	0·01	0·02	0·03	0·04	0·05	0·06	0·07	0·08	0·09	Diff.
0·0	0·0000	0·0054	0·0108	0·0161	0·0215	0·0269	0·0323	0·0377	0·0430	0·0484	54
0·1	0538	0591	0645	0699	0752	0806	0859	0913	0966	1020	53
0·2	1073	1126	1180	1233	1286	1339	1392	1445	1498	1551	52
0·3	1605	1656	1709	1761	1814	1866	1918	1971	2023	2075	52
0·4	2127	2179	2230	2282	2334	2385	2436	2488	2539	2590	51
0·5	0·2641	0·2691	0·2742	0·2793	0·2843	0·2893	0·2944	0·2994	0·3043	0·3093	50
0·6	3143	3192	3242	3291	3340	3389	3438	3487	3535	3583	49
0·7	3632	3680	3728	3775	3823	3870	3918	3965	4012	4059	46
0·8	4105	4152	4198	4244	4290	4336	4381	4427	4472	4517	45
0·9	4562	4606	4651	4695	4739	4783	4827	4870	4914	4957	43
1·0	0·5000	0·5043	0·5085	0·5128	0·5170	0·5212	0·5254	0·5295	0·5337	0·5378	41
1·1	5419	5460	5500	5540	5581	5620	5660	5700	5739	5778	39
1·2	5817	5856	5894	5932	5970	6008	6046	6083	6120	6157	37
1·3	6194	6231	6267	6303	6339	6375	6410	6445	6480	6515	35
1·4	6550	6584	6618	6652	6686	6719	6753	6786	6818	6851	32
1·5	0·6883	0·6915	0·6947	0·6979	0·7011	0·7042	0·7073	0·7104	0·7134	0·7165	30
1·6	7195	7225	7255	7284	7313	7342	7371	7400	7428	7457	28
1·7	7485	7512	7540	7567	7594	7621	7648	7675	7701	7727	26
1·8	7753	7778	7804	7829	7854	7879	7904	7928	7952	7976	24
1·9	8000	8023	8047	8070	8093	8116	8138	8161	8183	8205	22
2·0	0·8227	0·8248	0·8270	0·8291	0·8312	0·8332	0·8353	0·8373	0·8394	0·8414	19
2·1	8433	8453	8473	8492	8511	8530	8549	8567	8585	8604	18
2·2	8622	8639	8657	8674	8692	8709	8726	8742	8759	8775	17
2·3	8792	8808	8824	8840	8855	8870	8886	8901	8916	8930	15
2·4	8945	8960	8974	8988	9002	9016	9029	9043	9056	9069	13
2·5	0·9082	0·9095	0·9108	0·9121	0·9133	0·9146	0·9158	0·9170	0·9182	0·9193	12
2·6	9205	9217	9228	9239	9250	9261	9272	9283	9293	9304	10
2·7	9314	9324	9334	9344	9354	9364	9373	9383	9392	9401	9
2·8	9410	9419	9428	9437	9446	9454	9463	9471	9479	9487	8
2·9	9495	9503	9511	9519	9526	9534	9541	9548	9556	9563	7
3·0	0·9570	0·9577	0·9583	0·9590	0·9597	0·9603	0·9610	0·9616	0·9622	0·9629	6
3·1	9635	9641	9647	9652	9658	9664	9669	9675	9680	9686	5
3·2	9691	9696	9701	9706	9711	9716	9721	9726	9731	9735	5
3·3	9740	9744	9749	9753	9757	9761	9766	9770	9774	9778	4
3·4	9782	9786	9789	9793	9797	9800	9804	9807	9811	9814	4
3·5	0·9818	0·9821	0·9824	0·9827	0·9830	0·9833	0·9837	0·9840	0·9842	0·9845	3
3·6	9848	9851	9854	9856	9859	9862	9864	9867	9869	9872	2
3·7	9874	9877	9879	9881	9884	9886	9888	9890	9892	9894	2
3·8	9896	9898	9900	9902	9904	9906	9908	9909	9911	9913	2
3·9	9915	9916	9918	9920	9921	9923	9924	9926	9927	9929	1
4·0	9930	9932	9933	9934	9936	9937	9938	9939	9941	9942	1
4·1	9943	9944	9945	9947	9948	9949	9950	9951	9952	9953	1
$k=$	4·1	4·2	4·3	4·4	4·5	4·6	4·7	4·8	4·9	5·0	

Tabelle IV.

Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers zwischen den Grenzen Null und dem *k*-fachen mittleren Fehler.

k	0·00	0·01	0·02	0·03	0·04	0·05	0·06	0·07	0·08	0·09	Diff.
0·0	0·0000	0·0080	0·0159	0·0239	0·0319	0·0399	0·0478	0·0558	0·0637	0·0717	80
0·1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507	78
0·2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282	76
0·3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2960	3035	73
0·4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759	70
0·5	0·3829	0·3900	0·3969	0·4039	0·4108	0·4177	0·4245	0·4313	0·4381	0·4448	67
0·6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4908	4971	5035	5098	63
0·7	5161	5223	5285	5346	5407	5467	5527	5587	5746	5705	58
0·8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6090	6157	6211	6265	54
0·9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6680	6729	6778	49
1·0	0·6827	0·6875	0·6923	0·6970	0·7016	0·7063	0·7109	0·7154	0·7198	0·7243	44
1·1	7287	7330	7373	7415	7457	7498	7539	7580	7620	7660	39
1·2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7994	8030	34
1·3	8064	8098	8132	8165	8197	8229	8262	8293	8324	8355	30
1·4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638	26
1·5	0·8664	0·8689	0·8715	0·8740	0·8764	0·8789	0·8812	0·8836	0·8859	0·8882	22
1·6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090	19
1·7	9109	9127	9146	9164	9181	9199	9216	9233	9249	9266	15
1·8	9281	9297	9312	9328	9342	9357	9371	9385	9399	9412	14
1·9	9426	9439	9451	9464	9476	9488	9500	9512	9523	9534	11
2·0	0·9545	0·9556	0·9566	0·9576	0·9586	0·9596	0·9606	0·9716	0·9625	0·9634	9
2·1	9643	9651	9660	9668	9676	9684	9692	9700	9707	9715	7
2·2	9722	9729	9736	9742	9749	9756	9762	9768	9774	9780	5
2·3	9785	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832	4
2·4	9836	9840	9845	9849	9853	9867	9861	9865	9869	9872	4
2·5	0·9876	0·9879	0·9883	0·9886	0·9889	0·9892	0·9895	0·9898	0·9901	0·9904	3
2·6	9907	9909	9912	9915	9917	9920	9922	9924	9926	9928	3
2·7	9931	9933	9935	9937	9939	9940	9942	9944	9946	9947	2
2·8	9949	9950	9952	9953	9955	9956	9958	9959	9960	9961	2
2·9	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	1
$k=$	3·0	3·1	3·2	3·3	3·4	3·5	3·6	3·7	3·8	3 9	
$P=$	0·9973	0·9981	0 9986	0·9990	0·9993	0·9995	0·9997	0·9998	0·9999	0·9999	
$k=$	4·0	4·1								$k=\infty$	
$P=$	0·9999	0·9999								$P=1$	

Tabelle V.

Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers zwischen den Grenzen Null und dem *k*-fachen durchschnittlichen Fehler.

$\frac{a}{\vartheta} = k$	$\Theta(k\vartheta)$	$\frac{a}{\vartheta} = k$	$\Theta(k\vartheta)$	$\frac{a}{\vartheta} = k$	$\Theta(k\vartheta)$	$\frac{a}{\vartheta} = k$	$\Theta(k\vartheta)$
0·00	0·00000	0·44	0·27445	0·88	0·51740	1·64	0·80929
0·01	00637	0·45	28043	0·89	52236	1·66	81465
0·02	01273	0·46	28640	0·90	52729	1·68	81989
0·03	01910	0·47	29234	0·91	53219	1·70	82502
0·04	02546	0·48	29827	0·92	53708	1·72	83005
0·05	03182	0·49	30417	0·93	54192	1·74	83495
0·06	03818	0·50	31006	0·94	54675	1·76	83975
0·07	04454	0·51	31593	0·95	55153	1·78	84445
0·08	05089	0·52	32178	0·96	55630	1·80	84904
0·09	05724	0·53	32762	0·97	56102	1·82	85353
0·10	06359	0·54	33343	0·98	56574	1·84	85792
0·11	06994	0·55	33922	0·99	57042	1·86	86221
0·12	07628	0·56	34499	1·00	57506	1·88	86638
0·13	08261	0·57	35074	1·02	58425	1·90	87047
0·14	08894	0·58	35647	1·04	59334	1·92	87445
0·15	09526	0·59	36217	1·06	60231	1·94	87834
0·16	10158	0·60	36786	1·08	61115	1·96	88214
0·17	10789	0·61	37353	1·10	61988	1·98	88584
0·18	11419	0·62	37918	1·12	62848	2·00	88945
0·19	12049	0·63	38479	1·14	63695	2·05	89808
0·20	12678	0·64	39040	1·16	64531	2·10	90617
0·21	13307	0·65	39597	1·18	65354	2·15	91373
0·22	13934	0·66	40153	1·20	66166	2·20	92079
0·23	14561	0·67	40706	1·22	66965	2·25	92738
0·24	15186	0·68	41256	1·24	67752	2·30	93351
0·25	15811	0·69	41805	1·26	68526	2·35	93920
0·26	16434	0·70	42350	1·28	69287	2·40	94449
0·27	17057	0·71	42894	1·30	70037	2·45	94939
0·28	17678	0·72	43435	1·32	70775	2·50	95392
0·29	18298	0·73	43974	1·34	71499	2·55	95811
0·30	18917	0·74	44509	1·36	72212	2·60	96196
0·31	19535	0·75	45043	1·38	72913	2·65	96551
0·32	20153	0·76	45574	1·40	73602	2·70	96878
0·33	20768	0·77	46103	1·42	74278	2·75	97177
0·34	21382	0·78	46629	1·44	74941	2·80	97452
0·35	21995	0·79	47151	1·46	75593	2·85	97703
0·36	22606	0·80	47672	1·48	76233	2·90	97932
0·37	23216	0·81	48190	1·50	76862	2·95	98141
0·38	23825	0·82	48706	1·52	77478	3·00	98331
0·39	24433	0·83	49218	1·54	78083	3·10	98662
0·40	25038	0·84	49727	1·56	78676	3·20	98933
0·41	25643	0·85	50235	1·58	79256	3·30	99154
0·42	26245	0·86	50739	1·60	79825	3·40	99333
0·43	26846	0·87	51242	1·62	80383	3·50	99477

Tabelle VI.

Quadrate und Quadratwurzeln.

n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
0·01	0·0001	0·1000	0·41	0·1681	0·6403	0·81	0·6561	0·9000	1·21	1·4641	1·1000
0·02	0·0004	0·1414	0·42	0·1764	0·6481	0·82	0·6724	0·9055	1·22	1·4884	1·1045
0·03	0·0009	0·1732	0·43	0·1849	0·6557	0·83	0·6889	0·9110	1·23	1·5129	1·1091
0·04	0·0016	0·2000	0·44	0·1936	0·6633	0·84	0·7056	0·9165	1·24	1·5376	1·1136
0·05	0·0025	0·2236	0·45	0·2025	0·6708	0·85	0·7225	0·9220	1·25	1·5625	1·1180
0·06	0·0036	0·2449	0·46	0·2116	0·6782	0·86	0·7396	0·9274	1·26	1·5876	1·1225
0·07	0·0049	0·2646	0·47	0·2209	0·6856	0·87	0·7569	0·9327	1·27	1·6129	1·1269
0·08	0·0064	0·2828	0·48	0·2304	0·6928	0·88	0·7744	0·9381	1·28	1·6384	1·1314
0·09	0·0081	0·3000	0·49	0·2401	0·7000	0·89	0·7921	0·9434	1·29	1·6641	1·1358
0·10	0·0100	0·3162	0·50	0·2500	0·7071	0·90	0·8100	0·9487	1·30	1·6900	1·1402
0·11	0·0121	0·3317	0·51	0·2601	0·7141	0·91	0·8281	0·9539	1·31	1·7161	1·1446
0·12	0·0144	0·3464	0·52	0·2704	0·7211	0·92	0·8464	0·9592	1·32	1·7424	1·1489
0·13	0·0169	0·3606	0·53	0·2809	0·7280	0·93	0·8649	0·9644	1·33	1·7689	1·1533
0·14	0·0196	0·3742	0·54	0·2916	0·7348	0·94	0·8836	0·9695	1·34	1·7956	1·1576
0·15	0·0225	0·3873	0·55	0·3025	0·7416	0·95	0·9025	0·9747	1·35	1.8225	1·1619
0·16	0·0256	0·4000	0·56	0·3136	0·7483	0·96	0·9216	0·9798	1·36	1·8496	1·1662
0·17	0·0289	0·4123	0·57	0·3249	0·7550	0·97	0·9409	0·9849	1·37	1·8769	1·1705
0·18	0·0324	0·4243	0·58	0·3364	0·7616	0·98	0·9604	0·9899	1·38	1·9044	1·1747
0·19	0·0361	0·4359	0·59	0·3481	0·7681	0·99	0·9801	0·9950	1·39	1·9321	1·1790
0·20	0·0400	0·4472	0·60	0·3600	0·7746	1·00	1·0000	1·0000	1·40	1·9600	1·1832
0·21	0·0441	0·4583	0·61	0·3721	0·7810	1·01	1·0201	1·0050	1·41	1·9881	1·1874
0·22	0·0484	0·4690	0·62	0·3844	0·7874	1·02	1·0404	1·0100	1·42	2·0164	1·1916
0·23	0·0529	0·4796	0·63	0·3969	0·7937	1·03	1·0609	1·0149	1·43	2·0449	1·1958
0·24	0·0576	0·4899	0·64	0·4096	0·8000	1·04	1·0816	1·0198	1·44	2·0736	1·2000
0·25	0·0625	0·5000	0·65	0·4225	0·8062	1·05	1·1025	1·0247	1·45	2·1025	1·2042
0·26	0·0676	0·5099	0·66	0·4356	0·8124	1·06	1·1236	1·0296	1·46	2·1316	1·2083
0·27	0·0729	0·5196	0·67	0·4489	0·8185	1·07	1·1449	1·0344	1·47	2·1609	1·2124
0·28	0·0784	0·5292	0·68	0·4624	0·8246	1·08	1·1664	1·0392	1·48	2·1904	1·2166
0·29	0·0841	0·5385	0·69	0·4761	0·8307	1·09	1·1881	1·0440	1·49	2·2201	1·2207
0·30	0·0900	0·5477	0·70	0·4900	0·8367	1·10	1·2100	1·0488	1·50	2·2500	1·2247
0·31	0·0961	0·5568	0·71	0·5041	0·8426	1·11	1·2321	1·0536	1·51	2·2801	1·2288
0·32	0·1024	0·5657	0·72	0·5184	0·8485	1·12	1·2544	1·0583	1·52	2·3104	1·2329
0·33	0·1089	0·5745	0·73	0·5329	0·8544	1·13	1·2769	1·0630	1·53	2·3409	1·2369
0·34	0·1156	0·5831	0·74	0·5476	0·8602	1·14	1·2996	1·0677	1·54	2·3716	1·2410
0·35	0·1225	0·5916	0·75	0·5625	0·8660	1·15	1·3225	1·0724	1·55	2·4025	1·2450
0·36	0·1296	0·6000	0·76	0·5776	0·8718	1·16	1·3456	1·0770	1·56	2·4336	1·2490
0·37	0·1369	0·6083	0·77	0·5929	0·8775	1·17	1·3689	1·0817	1·57	2·4649	1·2530
0·38	0·1444	0·6164	0·78	0·6084	0·8832	1·18	1·3924	1·0863	1·58	2·4964	1·2570
0.39	0·1521	0·6245	0·79	0·6241	0·8888	1·19	1·4161	1·0909	1·59	2·5281	1·2610
0·40	0·1600	0·6325	0·80	0·6400	0·8944	1·20	1·4400	1·0954	1·60	2·5600	1·2649

n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
1·61	2·5921	1·2689	2·01	4·0401	1·4177	2·41	5·8081	1·5524	2·81	7·8961	1·6763
1·62	2·6244	1·2728	2·02	4·0804	1·4213	2·42	5·8564	1·5556	2·82	7·9524	1·6793
1·63	2·6569	1·2767	2·03	4·1209	1·4248	2·43	5·9049	1·5588	2·83	8·0089	1·6823
1·64	2·6896	1·2806	2·04	4·1616	1·4283	2·44	5·9536	1·5620	2·84	8·0656	1·6852
1·65	2·7225	1·2845	2·05	4·2025	1·4318	2·45	6·0025	1·5652	2·85	8·1225	1·6882
1·66	2·7556	1·2884	2·06	4·2436	1·4353	2·46	6·0516	1·5684	2·86	8·1796	1·6912
1·67	2·7889	1·2923	2·07	4·2849	1·4387	2·47	6·1009	1·5716	2·87	8·2369	1·6941
1·68	2·8224	1·2961	2·08	4·3264	1·4422	2·48	6·1504	1·5748	2·88	8·2944	1·6971
1·69	2·8561	1·3000	2·09	4·3681	1·4457	2·49	6·2001	1·5780	2·89	8·3521	1·7000
1·70	2·8900	1·3038	2·10	4·4100	1·4491	2·50	6·2500	1·5811	2·90	8·4100	1·7029
1·71	2·9241	1·3077	2·11	4·4521	1·4526	2·51	6·3001	1·5843	2·91	8·4681	1·7059
1·72	2·9584	1·3115	2·12	4·4944	1·4560	2·52	6·3504	1·5875	2·92	8·5264	1·7088
1·73	2·9929	1·3153	2·13	4·5369	1·4595	2·53	6·4009	1·5906	2·93	8·5849	1·7117
1·74	3·0276	1·3191	2·14	4·5796	1·4629	2·54	6·4516	1·5937	2·94	8·6436	1·7146
1·75	3·0625	1·3229	2·15	4·6225	1·4663	2·55	6·5025	1·5969	2·95	8·7025	1·7176
1·76	3·0976	1·3266	2·16	4·6656	1·4697	2·56	6·5536	1·6000	2·96	8·7616	1·7205
1·77	3·1329	1·3304	2·17	4·7089	1·4731	2·57	6·6049	1·6031	2·97	8·8209	1·7234
1·78	3·1684	1·3342	2·18	4·7524	1·4765	2·58	6·6564	1·6062	2·98	8·8804	1·7263
1·79	3·2041	1·3379	2·19	4·7961	1·4799	2·59	6·7081	1·6093	2·99	8·9401	1·7292
1·80	3·2400	1·3416	2·20	4·8400	1·4832	2·60	6·7600	1·6125	3·00	9·0000	1·7321
1·81	3·2761	1·3454	2·21	4·8841	1·4866	2·61	6·8121	1·6155	3·01	9·0601	1·7349
1·82	3·3124	1·3491	2·22	4·9284	1·4900	2·62	6·8644	1·6186	3·02	9·1204	1·7378
1·83	3·3489	1·3528	2·23	4·9729	1·4933	2·63	6·9169	1·6217	3·03	9·1809	1·7407
1·84	3·3856	1·3565	2·24	5·0176	1·4967	2·64	6·9696	1·6248	3·04	9·2416	1·7436
1·85	3·4225	1·3601	2·25	5·0625	1·5000	2·65	7·0225	1·6279	3·05	9·3025	1·7464
1·86	3·4596	1·3638	2·26	5·1076	1·5033	2·66	7·0756	1·6310	3·06	9·3636	1·7493
1·87	3·4969	1·3675	2·27	5·1529	1·5067	2·67	7·1289	1·6340	3·07	9·4249	1·7521
1·88	3·5344	1·3711	2·28	5·1984	1·5100	2·68	7·1824	1·6371	3·08	9·4864	1·7550
1·89	3·5721	1·3748	2·29	5·2441	1·5133	2·69	7·2361	1·6401	3·09	9·5481	1·7578
1·90	3·6100	1·3784	2·30	5·2900	1·5166	2·70	7·2900	1·6432	3·10	9·6100	1·7607
1·91	3·6481	1·3820	2·31	5·3361	1·5199	2·71	7·3441	1·6462	3·11	9·6721	1·7635
1·92	3·6864	1·3856	2·32	5·3824	1·5232	2·72	7·3984	1·6492	3·12	9·7344	1·7664
1·93	3·7249	1·3892	2·33	5·4289	1·5264	2·73	7·4529	1·6523	3·13	9·7969	1·7692
1·94	3·7636	1·3928	2·34	5·4756	1·5297	2·74	7·5076	1·6553	3·14	9·8596	1·7720
1·95	3·8025	1·3964	2·35	5·5225	1·5330	2·75	7·5625	1·6583	3.15	9·9225	1·7748
1·96	3·8416	1·4000	2·36	5·5696	1·5362	2·76	7·6176	1·6613	3·16	9·9856	1·7776
1·97	3·8809	1·4036	2·37	5·6169	1·5395	2·77	7·6729	1·6643	3·17	10·0489	1·7804
1·98	3·9204	1·4071	2·38	5·6644	1·5427	2·78	7·7284	1·6673	3·18	10·1124	1·7833
1·99	3·9601	1·4107	2·39	5·7121	1·5460	2·79	7·7841	1·6703	3·19	10·1761	1·7861
2·00	4·0000	1·4142	2·40	5·7600	1·5492	2·80	7·8400	1·6733	3·20	10·2400	1·7889

n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
3·21	10·3041	1·7916	3·61	13·0321	1·9000	4·01	16·0801	2·0025	4·41	19·4481	2·1000
3·22	10·3684	1·7944	3·62	13·1044	1·9026	4·02	16·1604	2·0050	4·42	19·5364	2·1024
3·23	10·4329	1·7972	3·63	13·1769	1·9053	4·03	16·2409	2·0075	4·43	19·6249	2·1048
3·24	10·4976	1·8000	3·64	13·2496	1·9079	4·04	16·3216	2·0100	4·44	19·7136	2·1071
3·25	10·5625	1·8028	3·65	13·3225	1·9105	4·05	16·4025	2·0125	4·45	19·8025	2·1095
3·26	10·6276	1·8055	3·66	13·3956	1·9131	4·06	16·4836	2·0149	4·46	19·8916	2·1119
3·27	10·6929	1·8083	3·67	13·4689	1·9157	4·07	16·5649	2·0174	4·47	19·9809	2·1142
3·28	10·7584	1·8111	3·68	13·5424	1·9183	4·08	16·6464	2·0199	4·48	20·0704	2·1166
3·29	10·8241	1·8138	3·69	13·6161	1·9209	4·09	16·7281	2·0224	4·49	20·1601	2·1190
3·30	10·8900	1·8166	3·70	13·6900	1·9235	4·10	16·8100	2·0248	4·50	20·2500	2·1213
3·31	10·9561	1·8193	3·71	13·7641	1·9261	4·11	16·8921	2·0273	4·51	20·3401	2·1237
3·32	11·0224	1·8221	3·72	13·8384	1·9287	4·12	16·9744	2·0298	4·52	20·4304	2·1260
3·33	11·0889	1·8248	3·73	13·9129	1·9313	4·13	17·0569	2·0322	4·53	20·5209	2·1284
3·34	11·1556	1·8276	3·74	13·9876	1·9339	4·14	17·1396	2·0347	4·54	20·6116	2·1307
3·35	11·2225	1·8303	3·75	14·0625	1·9365	4·15	17·2225	2·0372	4·55	20·7025	2·1331
3·36	11·2896	1·8330	3·76	14·1376	1·9391	4·16	17·3056	2·0396	4·56	20·7936	2·1354
3·37	11·3569	1·8358	3·77	14·2129	1·9416	4·17	17·3889	2·0421	4·57	20·8849	2·1378
3·38	11·4244	1·8385	3·78	14·2884	1·9442	4·18	17·4724	2·0445	4·58	20·9764	2·1401
3·39	11·4921	1·8412	3·79	14·3641	1·9468	4·19	17·5561	2·0469	4·59	21·0681	2·1424
3·40	11·5600	1·8439	3·80	14·4400	1·9494	4·20	17·6400	2·0494	4·60	21·1600	2·1448
3·41	11·6281	1·8466	3·81	14·5161	1·9519	4·21	17·7241	2·0518	4·61	21·2521	2·1471
3·42	11·6964	1·8493	3·82	14·5924	1·9545	4·22	17·8084	2·0543	4·62	21·3444	2·1494
3·43	11·7649	1·8520	3·83	14·6689	1·9570	4·23	17·8929	2·0567	4·63	21·4369	2·1517
3·44	11·8336	1·8547	3·84	14·7456	1·9596	4·24	17·9776	2·0591	4·64	21·5296	2·1541
3·45	11·9025	1·8574	3·85	14·8225	1·9621	4·25	18·0625	2·0616	4·65	21·6225	2·1564
3·46	11·9716	1·8601	3·86	14·8996	1·9647	4·26	18·1476	2·0640	4·66	21·7156	2·1587
3·47	12·0409	1·8628	3·87	14·9769	1·9672	4·27	18·2329	2·0664	4·67	21·8089	2·1610
3·48	12·1104	1·8655	3·88	15·0544	1·9698	4·28	18·3184	2·0688	4·68	21·9024	2·1633
3·49	12·1801	1·8682	3·89	15·1321	1·9723	4·29	18·4041	2·0712	4·69	21·9961	2·1656
3·50	12·2500	1·8708	3·90	15·2100	1·9748	4·30	18·4900	2·0736	4·70	22·0900	2·1679
3·51	12·3201	1·87[illegible]5	3·91	15·2881	1·9774	4·31	18·5761	2·0761	4·71	22·1841	2·1703
3·52	12·3904	1·8762	3·92	15·3664	1·9799	4·32	18·6624	2·0785	4·72	22·2784	2·1726
3·53	12·4609	1·8788	3·93	15·4449	1·9824	4·33	18·7489	2·0809	4·73	22·3729	2·1749
3·54	12·5316	1·8815	3·94	15·5236	1·9849	4·34	18·8356	2·0833	4·74	22·4676	2·1771
3·55	12·6025	1·8841	3·95	15·6025	1·9875	4·35	18·9225	2·0857	4·75	22·5625	2·1794
3·56	12·6736	1·8868	3·96	15·6816	1·9900	4·36	19·0096	2·0881	4·76	22·6576	2·1817
3·57	12·7449	1·8894	3·97	15·7609	1·9925	4·37	19·0969	2·0905	4·77	22·7529	2·1840
3·58	12·8164	1·8921	3·98	15·8404	1·9950	4·38	19·1844	2·0928	4·78	22·8484	2·1863
3·59	12·8881	1·8947	3·99	15·9201	1·9975	4·39	19·2721	2·0952	4·79	22·9441	2·1886
3·60	12·9600	1·8974	4·00	16·0000	2·0000	4·40	19·3600	2·0976	4·80	23·0400	2·1909

n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
4·81	23·1361	2·1932	5·21	27·1441	2·2825	5·61	31·4721	2·3685	6·01	36·1201	2·4515
4·82	23·2324	2·1954	5·22	27·2484	2·2847	5·62	31·5844	2·3707	6·02	36·2404	2·4536
4·83	23·3289	2·1977	5·23	27·3529	2·2869	5·63	31·6969	2·3728	6·03	36·3609	2·4556
4·84	23·4256	2·2000	5·24	27·4576	2·2891	5·64	31·8096	2·3749	6·04	36·4816	2·4576
4·85	23·5225	2·2023	5·25	27·5625	2·2913	5·65	31·9225	2·3770	6·05	36·6025	2·4597
4·86	23·6196	2·2045	5·26	27·6676	2·2935	5·66	32·0356	2·3791	6·06	36·7236	2·4617
4·87	23·7169	2·2068	5·27	27·7729	2·2956	5·67	32·1489	2·3812	6·07	36·8449	2·4637
4·88	23·8144	2·2091	5·28	27·8784	2·2978	5·68	32·2624	2·3833	6·08	36·9664	2·4658
4·89	23·9121	2·2113	5·29	27·9841	2·3000	5·69	32·3761	2·3854	6·09	37·0881	2·4678
4·90	24·0100	2·2136	5·30	28·0900	2·3022	5·70	32·4900	2·3875	6·10	37·2100	2·4698
4·91	24·1081	2·2159	5·31	28·1961	2·3043	5·71	32·6041	2·3896	6·11	37·3321	2·4718
4·92	24·2064	2·2181	5·32	28·3024	2·3065	5·72	32·7184	2·3917	6·12	37·4544	2·4739
4·93	24·3049	2·2204	5·33	28·4089	2·3087	5·73	32·8329	2·3937	6·13	37·5769	2·4759
4·94	24·4036	2·2226	5·34	28·5156	2·3108	5·74	32·9476	2·3958	6·14	37·6996	2·4779
4·95	24·5025	2·2249	5·35	28·6225	2·3130	5·75	33·0625	2·3979	6·15	37·8225	2·4799
4·96	24·6016	2·2271	5·36	28·7296	2·3152	5·76	33·1776	2·4000	6·16	37·9456	2·4819
4·97	24·7009	2·2293	5·37	28·8369	2·3173	5·77	33·2929	2·4021	6·17	38·0689	2·4839
4·98	24·8004	2·2316	5·38	28·9444	2·3195	5·78	33·4084	2·4042	6·18	38·1924	2·4860
4·99	24·9001	2·2338	5·39	29·0521	2·3216	5·79	33·5241	2·4062	6·19	38·3161	2·4880
5·00	25·0000	2·2361	5·40	29·1600	2·3238	5·80	33·6400	2·4083	6·20	38·4400	2·4900
5·01	25·1001	2·2383	5·41	29·2681	2·3259	5·81	33·7561	2·4104	6·21	38·5641	2·4920
5·02	25·2004	2·2405	5·42	29·3764	2·3281	5·82	33·8724	2·4125	6·22	38·6884	2·4940
5·03	25·3009	2·2428	5·43	29·4849	2·3302	5·83	33·9889	2·4145	6·23	38·8129	2·4960
5·04	25·4016	2·2450	5·44	29·5936	2·3324	5·84	34·1056	2·4166	6·24	38·9376	2·4980
5·05	25·5025	2·2472	5·45	29·7025	2·3345	5·85	34·2225	2·4187	6·25	39·0625	2·5000
5·06	25·6036	2·2494	5·46	29·8116	2·3367	5·86	34·3396	2·4207	6·26	39·1876	2·5020
5·07	25·7049	2·2517	5·47	29·9209	2·3388	5·87	34·4569	2·4228	6·27	39·3129	2·5040
5·08	25·8064	2·2539	5·48	30·0304	2·3409	5·88	34·5744	2·4249	6·28	39·4384	2·5060
5·09	25·9081	2·2561	5·49	30·1401	2·3431	5·89	34·6921	2·4269	6·29	39·5641	2·5080
5·10	26·0100	2·2583	5·50	30·2500	2·3452	5·90	34·8100	2·4290	6·30	39·6900	2·5100
5·11	26·1121	2·2605	5·51	30·3601	2·3473	5·91	34·9281	2·4310	6·31	39·8161	2·5120
5·12	26·2144	2·2627	5·52	30·4704	2·3495	5·92	35·0464	2·4331	6·32	39·9424	2·5140
5·13	26·3169	2·2650	5·53	30·5809	2·3516	5·93	35·1649	2·4352	6·33	40·0689	2·5159
5·14	26·4196	2·2672	5·54	30·6916	2·3537	5·94	35·2836	2·4372	6·34	40·1956	2·5179
5·15	26·5225	2·2694	5·55	30·8025	2·3558	5·95	35·4025	2·4393	6·35	40·3225	2·5199
5·16	26·6256	2·2716	5·56	30·9136	2·3580	5·96	35·5216	2·4413	6·36	40·4496	2·5219
5·17	26·7289	2·2738	5·57	31·0249	2·3601	5·97	35·6409	2·4434	6·37	40·5769	2·5239
5·18	26·8324	2·2760	5·58	31·1364	2·3622	5·98	35·7604	2·4454	6·38	40·7044	2·5259
5·19	26·9361	2·2782	5·59	31·2481	2·3643	5·99	35·8801	2·4474	6·39	40·8321	2·5278
5·20	27·0400	2·2804	5·60	31·3600	2·3664	6·00	36·0000	2·4495	6·40	40·9600	2·5298

n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
6·41	41·0881	2·5318	6·81	46·3761	2·6096	7·21	51·9841	2·6851	7·61	57·9121	2·7586
6·42	41·2164	2·5338	6·82	46·5124	2·6115	7·22	52·1284	2·6870	7·62	58·0644	2·7604
6·43	41·3449	2·5357	6·83	46·6489	2·6134	7·23	52·2729	2·6889	7·63	58·2169	2·7622
6·44	41·4736	2·5377	6·84	46·7856	2·6153	7·24	52·4176	2·6907	7·64	58·3696	2·7641
6·45	41·6025	2·5397	6·85	46·9225	2·6173	7·25	52·5625	2·6926	7·65	58·5225	2·7659
6·46	41·7316	2·5417	6·86	47·0596	2·6192	7·26	52·7076	2·6944	7·66	58·6756	2·7677
6·47	41·8609	2·5436	6·87	47·1969	2·6211	7·27	52·8529	2·6963	7·67	58·8289	2·7695
6·48	41·9904	2·5456	6·88	47·3344	2·6230	7·28	52·9984	2·6981	7·68	58·9824	2·7713
6·49	42·1201	2·5475	6·89	47·4721	2·6249	7·29	53·1441	2·7000	7·69	59·1361	2·7731
6·50	42·2500	2·5495	6·90	47·6100	2·6268	7·30	53·2900	2·7019	7·70	59·2900	2·7749
6·51	42·3801	2·5515	6·91	47·7481	2·6287	7·31	53·4361	2·7037	7·71	59·4441	2·7767
6·52	42·5104	2·5534	6·92	47·8864	2·6306	7·32	53·5824	2·7055	7·72	59·5984	2·7785
6·53	42·6409	2·5554	6·93	48·0249	2·6325	7·33	53·7289	2·7074	7·73	59·7529	2·7803
6·54	42·7716	2·5573	6·94	48·1636	2·6344	7·34	53·8756	2·7092	7·74	59·9076	2·7821
6·55	42·9025	2·5593	6·95	48·3025	2·6363	7·35	54·0225	2·7111	7·75	60·0625	2·7839
6·56	43·0336	2·5612	6·96	48·4416	2·6382	7·36	54·1696	2·7129	7·76	60·2176	2·7857
6·57	43·1649	2·5632	6·97	48·5809	2·6401	7·37	54·3169	2·7148	7·77	60·3729	2·7875
6·58	43·2964	2·5652	6·98	48·7204	2·6420	7·38	54·4644	2·7166	7·78	60·5284	2·7893
6·59	43·4281	2·5671	6·99	48·8601	2·6439	7·39	54·6121	2·7185	7·79	60·6841	2·7911
6·60	43·5600	2·5690	7·00	49·0000	2·6458	7·40	54·7600	2·7203	7·80	60·8400	2·7928
6·61	43·6921	2·5710	7·01	49·1401	2·6476	7·41	54·9081	2·7221	7·81	60·9961	2·7946
6·62	43·8244	2·5729	7·02	49·2804	2·6495	7·42	55·0564	2·7240	7·82	61·1524	2·7964
6·63	43·9569	2·5749	7·03	49·4209	2·6514	7·43	55·2049	2·7258	7·83	61·3089	2·7982
6·64	44·0896	2·5768	7·04	49·5616	2·6533	7·44	55·3536	2·7276	7·84	61·4656	2·8000
6·65	44·2225	2·5788	7·05	49·7025	2·6552	7·45	55·5025	2·7295	7·85	61·6225	2·8018
6·66	44·3556	2·5807	7·06	49·8436	2·6571	7·46	55·6516	2·7313	7·86	61·7796	2·8036
6·67	44·4889	2·5826	7·07	49·9849	2·6589	7·47	55·8009	2·7331	7·87	61·9369	2·8054
6·68	44·6224	2·5846	7·08	50·1264	2·6608	7·48	55·9504	2·7350	7·88	62·0944	2·8071
6·69	44·7561	2·5865	7·09	50·2681	2·6627	7·49	56·1001	2·7368	7·89	62·2521	2·8089
6·70	44·8900	2·5884	7·10	50·4100	2·6646	7·50	56·2500	2·7386	7·90	62·4100	2·8107
6·71	45·0241	2·5904	7·11	50·5521	2·6665	7·51	56·4001	2·7404	7·91	62·5681	2·8125
6·72	45·1584	2·5923	7·12	50·6944	2·6683	7·52	56·5504	2·7423	7·92	62·7264	2·8142
6·73	45·2929	2·5942	7·13	50·8369	2·6702	7·53	56·7009	2·7441	7·93	62·8849	2·8160
6·74	45·4276	2·5962	7·14	50·9796	2·6721	7·54	56·8516	2·7459	7·94	63·0436	2·8178
6·75	45·5625	2·5981	7·15	51·1225	2·6739	7·55	57·0025	2·7477	7·95	63·2025	2·8196
6·76	45·6976	2·6000	7·16	51·2656	2·6758	7·56	57·1536	2·7495	7·96	63·3616	2·8213
6·77	45·8329	2·6019	7·17	51·4089	2·6777	7·57	57·3049	2·7514	7·97	63·5209	2·8231
6·78	45·9684	2·6038	7·18	51·5524	2·6796	7·58	57·4564	2·7532	7·98	63·6804	2·8249
6·79	46·1041	2·6058	7·19	51·6961	2·6814	7·59	57·6081	2·7550	7·99	63·8401	2·8267
6·80	46·2400	2·6077	7·20	51·8400	2·6833	7·60	57·7600	2·7568	8·00	64·0000	2·8284

n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
8·01	64·1601	2·8302	8·41	70·7281	2·9000	8·81	77·6161	2·9682	9·21	84·8241	3·0348
8·02	64·3204	2·8320	8·42	70·8964	2·9017	8·82	77·7924	2·9698	9·22	85·0084	3·0364
8·03	64·4809	2·8337	8·43	71·0649	2·9034	8·83	77·9689	2·9715	9·23	85.1929	3·0381
8·04	64·6416	2·8355	8·44	71·2336	2·9052	8·84	78·1456	2·9732	9·24	85·3776	3·0397
8·05	64·8025	2·8373	8·45	71·4025	2·9069	8·85	78·3225	2·9749	9·25	85·5625	3·0414
8·06	64·9636	2·8390	8·46	71·5716	2·9086	8·86	78·4996	2·9766	9·26	85·7476	3·0430
8·07	65·1249	2·8408	8·47	71·7409	2·9103	8·87	78·6769	2·9783	9·27	85·9329	3·0447
8·08	65·2864	2·8425	8·48	71·9104	2·9120	8·88	78·8544	2·9799	9·28	86·1184	3·0463
8·09	65·4481	2·8443	8·49	72·0801	2·9138	8·89	79·0321	2·9816	9·29	86·3041	3·0480
8·10	65·6100	2·8460	8·50	72.2500	2·9155	8·90	79·2100	2·9833	9·30	86·4900	3·0496
8·11	65·7721	2·8478	8·51	72·4201	2·9172	8·91	79·3881	2·9850	9·31	86·6761	3·0512
8·12	65·9344	2·8496	8·52	72·5904	2·9189	8·92	79·5664	2·9866	9·32	86·8624	3·0529
8·13	66·0969	2·8513	8·53	72·7609	2·9206	8·93	79·7449	2·9883	9·33	87·0489	3·0545
8·14	66·2596	2·8531	8·54	72·9316	2·9223	8·94	79·9236	2·9900	9·34	87·2356	3·0561
8·15	66·4225	2·8548	8·55	73·1025	2·9240	8·95	80·1025	2·9917	9·35	87·4225	3·0578
8·16	66·5856	2·8566	8·56	73·2736	2·9257	8·96	80·2816	2·9933	9·36	87·6096	3·0594
8·17	66·7489	2·8583	8·57	73·4449	2·9275	8·97	80·4609	2·9950	9·37	87·7969	3·0610
8·18	66·9124	2·8601	8·58	73·6164	2·9292	8·98	80·6404	2·9967	9·38	87·9844	3·0627
8·19	67·0761	2·8618	8·59	73·7881	2·9309	8·99	80·8201	2·9983	9·39	88·1721	3·0643
8·20	67·2400	2·8636	8·60	73·9600	2·9326	9·00	81·0000	3·0000	9·40	88·3600	3·0659
8·21	67·4041	2·8653	8·61	74·1321	2·9343	9·01	81·1801	3·0017	9·41	88·5481	3·0676
8·22	67·5684	2·8671	8·62	74·3044	2·9360	9·02	81·3604	3·0033	9·42	88·7364	3·0692
8·23	67·7329	2·8688	8·63	74·4769	2·9377	9·03	81·5409	3·0050	9·43	88·9249	3·0708
8·24	67·8976	2·8705	8·64	74·6496	2·9394	9·04	81·7216	3·0067	9·44	89·1136	3·0725
8·25	68·0625	2·8723	8·65	74·8225	2·9411	9·05	81·9025	3·0083	9·45	89·3025	3·0741
8·26	68·2276	2·8740	8·66	74·9956	2·9428	9·06	82·0836	3·0100	9·46	89·4916	3·0757
8·27	68·3929	2·8758	8·67	75·1689	2·9445	9·07	82·2649	3·0116	9·47	89·6809	3·0773
8·28	68·5584	2·8775	8·68	75·3424	2·9462	9·08	82·4464	3·0133	9·48	89·8704	3·0790
8·29	68·7241	2·8792	8·69	75·5161	2·9479	9·09	82·6281	3·0150	9·49	90·0601	3·0806
8·30	68·8900	2·8810	8·70	75·6900	2·9496	9·10	82·8100	3·0166	9·50	90·2500	3·0822
8·31	69·0561	2·8827	8·71	75·8641	2·9513	9·11	82·9921	3·0183	9·51	90·4401	3·0838
8·32	69·2224	2·8844	8·72	76·0384	2·9530	9·12	83·1744	3·0199	9·52	90·6304	3·0854
8·33	69·3889	2·8862	8·73	76·2129	2·9547	9·13	83·3569	3·0216	9·53	90·8209	3·0871
8·34	69·5556	2·8879	8·74	76·3876	2·9563	9·14	83·5396	3·0232	9·54	91·0116	3·0887
8·35	69·7225	2·8896	8·75	76·5625	2·9580	9·15	83·7225	3·0249	9·55	91·2025	3·0903
8·36	69·8896	2·8914	8·76	76·7376	2·9597	9·16	83·9056	3·0265	9·56	91·3936	3·0919
8·37	70·0569	2·8931	8·77	76·9129	2·9614	9·17	84·0889	3·0282	9·57	91·5849	3·0935
8·38	70·2244	2·8948	8·78	77·0884	2·9631	9·18	84·2724	3·0299	9·58	91·7764	3·0952
8·39	70·3921	2·8965	8·79	77·2641	2·9648	9·19	84·4561	3·0315	9·59	91·9681	3·0968
8·40	70·5600	2·8983	8·80	77·4400	2·9665	9·20	84·6400	3·0332	9·60	92·1600	3·0984

n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
9·61	92·3521	3·1000	9·71	94·2841	3·1161	9·81	96·2361	3·1321	9·91	98·2081	3·1480
9·62	92·5444	3·1016	9·72	94·4784	3·1177	9·82	96·4324	3·1337	9·92	98·4064	3·1496
9·63	92·7369	3·1032	9·73	94·6729	3·1193	9·83	96·6289	3·1353	9·93	98·6049	3·1512
9·64	92·9296	3·1048	9·74	94·8676	3·1209	9·84	96·8256	3·1369	9·94	98·8036	3·1528
9·65	93·1225	3·1064	9·75	95·0625	3·1225	9·85	97·0225	3·1385	9·95	99·0025	3·1544
9·66	93·3156	3·1081	9·76	95·2576	3·1241	9·86	97·2196	3·1401	9·96	99·2016	3·1559
9·67	93·5089	3·1097	9·77	95·4529	3·1257	9·87	97·4169	3·1417	9·97	99·4009	3·1575
9·68	93·7024	3·1113	9·78	95·6484	3·1273	9·88	97·6144	3·1432	9·98	99·6004	3·1591
9·69	93·8961	3·1129	9·79	95·8441	3·1289	9·89	97·8121	3·1448	9·99	99·8001	3·1607
9·70	94·0900	3·1145	9·80	96·0400	3·1305	9·90	98·0100	3·1464	10·00	100·0000	3·1623

Einige häufig gebrauchte Zahlenwerte.

Numerus	Logarithmus
$e = 2{\cdot}718\,2818\,285$	$0{\cdot}434\,2944\,819$
$\pi = 3{\cdot}141\,5926\,536$	$0{\cdot}497\,1498\,727$
$\varkappa = 0{\cdot}476\,9362\,762$	$9{\cdot}678\,4603\,565$
$e^2 = 7{\cdot}389\,0561$	$0{\cdot}868\,5890$
$\sqrt{e} = 1{\cdot}648\,7211$	$0{\cdot}217\,1472$
$\frac{1}{e} = 0{\cdot}367\,8794$	$9{\cdot}565\,7055$
$\pi^2 = 9{\cdot}869\,6044$	$0{\cdot}994\,2997$
$\sqrt{\pi} = 1{\cdot}772\,4539$	$0{\cdot}248\,5749$
$\frac{\pi}{2} = 1{\cdot}570\,7963$	$0{\cdot}196\,1199$
$\frac{\pi}{4} = 0{\cdot}785\,3982$	$9{\cdot}895\,0899$
$\frac{1}{\pi} = 0{\cdot}318\,3099$	$9{\cdot}502\,8501$
$\frac{1}{\pi^2} = 0{\cdot}101\,3212$	$9{\cdot}005\,7006$
$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{\cdot}564\,1896$	$9{\cdot}751\,4251$
$\sqrt{2} = 1{\cdot}414\,2136$	$0{\cdot}150\,5150$
$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{\cdot}707\,1068$	$9{\cdot}849\,4850$
$\varkappa\sqrt{2} = 0{\cdot}674\,4898$	$9{\cdot}828\,9754$
$\varkappa\sqrt{\pi} = 0{\cdot}845\,3476$	$9{\cdot}927\,0353$
$\frac{1}{\varkappa\sqrt{2}} = 1{\cdot}482\,6021$	$0{\cdot}171\,0246$
$\frac{1}{\varkappa\sqrt{\pi}} = 1{\cdot}182\,9453$	$0{\cdot}072\,9647$
$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1{\cdot}253\,3141$	$0{\cdot}098\,0599$
$\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{\cdot}797\,8846$	$9{\cdot}901\,9401$
$\frac{1}{\sqrt{\pi e}} = 0{\cdot}342\,1983$	$9{\cdot}534\,2778.$

Berichtigungen.

Seite 23, 8. Zeile von oben lese man „dieselbe" statt „dieselben".

„ 36, 13. „ „ unten hat im Exponenten von e das erste Minuszeichen zu entfallen.

„ 65, 4. „ „ oben ist ah statt xh und 8. Zeile von oben $F = a$ zu setzen.

„ 66, 9. „ „ unten und Seite 67, 8. Zeile von oben ist $\varkappa'$ für $\varkappa$ zu setzen.

„ 70, 8. „ „ unten, nach „ist" füge man „annähernd" hinzu.

„ 73, 3. „ „ oben ist der Faktor 0·99791 einzusetzen.

„ 76, 15. „ „ unten füge man nach „natürlichste" hinzu: „weil der wahrscheinliche Fehler die wichtige Eigenschaft der zufälligen Beobachtungsfehler, in einer längeren Fehlerreihe gleich oft positiv und negativ aufzutreten, am reinsten und ungekünsteltsten zum Ausdrucke bringt."

„ 107, 8. „ „ oben lese man „(9) des § 25" statt „(3) des § 11".

„ 120, 5. „ „ unten lese man „quasi-wahrscheinlichen" statt „wahrscheinlichen".

„ 173, 5. „ „ oben setze man „$w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$" statt „$w_0 + w_1 + w_2 + w_3$".

„ 192, 10. „ „ oben setze man „0·7677" statt „0·7679".

Zweiter Band

Probleme der Ausgleichungsrechnung



Theorie und Praxis
der
Ausgleichungsrechnung

Von

Ing. Siegmund Wellisch
Bauinspektor der Stadt Wien

Zweiter Band:
Probleme der Ausgleichungsrechnung



WIEN und LEIPZIG 1910. Kaiserl. und königl. Hof-Buchdruckerei und Hof-Verlags-Buchhandlung CARL FROMME

Verlags-Archiv Nr. 1207.

Vorwort.

Wie im ersten Bande, der die vorbereitenden „Elemente der Ausgleichungsrechnung" enthält, so glaube ich auch im vorliegenden, die höheren „Probleme der Ausgleichungsrechnung" behandelnden Bande manche Neuerungen getroffen zu haben, die — auf dem Boden moderner Forschung stehend — das Erscheinen dieses Werkes rechtfertigen dürften.

So erwähne ich nur die im ersten Abschnitte nach direkten und indirekten Beobachtungen gesonderte Betrachtung des Fehlergesetzes in der Ebene, dessen verschiedene Behandlungsweise durch die hiebei gewonnenen Beziehungen zwischen den direkten und vermittelnden Punktbestimmungen eine klarere Erfassung dieses schwierigen Problems verspricht Hier kam es mir namentlich darauf an, die Theorie der „Fehlerellipse" leicht verständlich zu machen, was ich durch strenge, aber dennoch knappe und klare Ableitung der Gebrauchsformeln zu erreichen bemüht war. Dürften die Untersuchungen über die „Kurve der mittleren Koordinatenfehler", über die „Koordinatengewichte" usw. zum besseren Verständnisse der Fehlertheorie beitragen, so wird ihr durch das Problem der „Ausscheidung widersprechender Punktbestimmungen" vielleicht ein weiteres Anwendungsfeld eröffnet. Dieserart sollen hier wie in den folgenden Kapiteln Theorie und Praxis, sich gegenseitig unterstützend, zur gründlichen Erfassung der Methode der kleinsten Quadrate zusammenwirken.

In dem zweiten Abschnitte erscheinen die Erfahrungen auf dem Gebiete der Triangulierungsausgleichung, dem wichtigsten Behelfe des rechnenden Geodäten, niedergelegt. Hier glaube ich annehmen zu dürfen, daß die bei der Fülle des Stoffes so notwendige Übersichtlichkeit durch die Einteilung in „Winkel-, Punkt- und Netzausgleichung" wesentlich gewonnen hat, und daß die ausgesuchten Beispiele zur Förderung des Verständnisses und zur Vorbereitung auf

die praktische Anwendung der entwickelten Theorien manches beitragen werden. Für die wichtigsten in der „Instruktion zur Ausführung der trigonometrischen und polygonometrischen Vermessungen" vorgeschriebenen Formeln und Muster war ich bemüht, eine theoretische Begründung zu geben, die in Geometerkreisen vielleicht nicht unwillkommen geheißen werden dürfte, wobei ich versucht habe, die Erläuterungen der Grundbegriffe und die Problemstellungen mit Klarheit und Schärfe zu bringen.

Der erweiterten Auffassung des Ausgleichungsproblems Rechnung tragend, wurde ein eigener Abschnitt der Aufstellung empirischer Formeln gewidmet, wo meines Erachtens in theoretischer wie in praktischer Hinsicht manche Ausführungen einiges Interesse beanspruchen dürften.

Wenn auch die meisten mir bekannt gewordenen Beurteilungen des ersten Bandes bekundet haben, daß das mir gesteckte Ziel, die Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung in ihrem großen Umfange leicht verständlich und gründlich darzustellen, erreicht worden sei, so kann es doch nicht die Absicht sein, hier auf alle diese kritischen Besprechungen im einzelnen einzugehen. Es sei mir bloß gestattet, zwei Äußerungen wiederzugeben, zu deren Veröffentlichung an dieser Stelle der Verfasser die Zustimmung erhalten hat.

Seine Exzellenz Feldmarschalleutnant Nikolaus Freiherr von Wuich urteilt in einem, kurz vor seinem am 12. März 1910 erfolgten Hinscheiden an den Verfasser gerichteten Briefe über den ersten Band des vorliegenden Buches wie folgt:

„Der Inhalt des Werkes verrät ein durch reiche Erfahrung durchtränktes Wissen, die Diktion ist bei strengster Wissenschaftlichkeit eine — ich möchte sagen — geradezu gemütliche, daß selbst jener Leser, der in dem Labyrinth der Analysis sich nicht zurecht findet, eine ganz klare Vorstellung von dem hat, um was es sich handelt — eine Gabe, die wenigen Schriftstellern eigen ist und die den Verfasser — meiner Meinung nach — zum Lehrer ganz besonders qualifiziert.

Hervorheben will ich auch den logischen Aufbau des Werkes und die enorm klare Erläuterung der Begriffe, was verrät, daß ein Mann der Praxis die Feder führt — was ja auch die besonders glücklich gewählten und durchgearbeiteten Beispiele dartun.

Hiedurch erscheint mir das Werk für alle jene, die sich mit Vermessungen beschäftigen, ein verläßlicher Ratgeber, und sollte das Werk bei allen Behörden, in deren Ressort das Vermessungswesen gehört, wie z. B. das Militärgeographische Institut, Beachtung finden.

Im Detail möchte ich die ganz besonders eingehende und liebevolle Behandlung der Fehlermaße und der Kontrollberechnung der Fehlerquadratsummen, sowie die mit ganz exzeptioneller Klarheit gebrachte Darstellung des Gewichtes hervorheben, während ich tadelnd nur zu bemerken habe, daß in den Text eingestreute, den erfahrenen Mann bekundende Goldkörner nicht genügend ins Auge geführt sind."

Hofrat Professor Emanuel Czuber entwirft in der „Zeitschrift für das Realschulwesen", Jahrgang 1910, S. 245, von dem ersten Bande folgendes Gesamtbild:

„Einem Buche über diesen Gegenstand, das von einem im Vermessungswesen bewanderten Praktiker stammt, wird man von vornherein Interesse entgegenbringen, insbesondere dann, wenn der Autor, wie dies im vorliegenden Falle zutrifft, auch für die theoretischen Fragen Aufmerksamkeit und Verständnis bekundet hat, wie aus einigen seiner Arbeiten historischen und sachlichen Inhalts hervorgeht. Denn die Vertrautheit mit den Verhältnissen und Bedürfnissen der Praxis läßt erhoffen, daß in den grundlegenden Entwicklungen das richtige Maß eingehalten und das sachliche Moment in zutreffender Weise zu Worte kommen werde. Diese Erwartung ist denn auch im großen ganzen durch das Buch erfüllt, soweit man nach dem ersten Bande schließen kann, der wohl hauptsächlich der Theorie gilt, aber doch schon Ausblicke auf die Anwendungen eröffnet, die vermutlich den zu gewärtigenden zweiten Band vollständig beherrschen werden; hier wird der Verfasser in die Lage kommen, aus seinen reichen Erfahrungen manches Wissenswerte mitzuteilen."

Wie weit diese Erwartung sich erfüllt hat, darüber zu entscheiden, sei dem fachmännischen Urteile Berufener überlassen.

Für meine Pflicht halte ich es noch, den Herren k. u. k. Oberst Josef Kozák und k. k. Professor Alfons Cappilleri, welche die Güte hatten, mich auch beim Lesen der Korrekturbogen des zweiten Bandes zu unterstützen, für diese Freundschaftsdienste auch hier meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Ebenso danke ich der Firma Carl Fromme in Wien für ihre anerkennenswerte Bereitwilligkeit, womit sie allen meinen Wünschen auch bei der Drucklegung dieses Bandes in der freundlichsten Weise entgegengekommen ist.

Wien, im Frühjahr 1910.

Der Verfasser.



Inhalt des zweiten Bandes.

Probleme der Ausgleichungsrechnung.

B. Punktausgleichung.

C. Netzausgleichung.

III. Abschnitt.

Aufstellung empirischer Formeln.

A. Erweiterte Auffassung des Ausgleichungsproblems.

B. Bestimmung der Erdgestalt.



Einleitung.

§ 1. Minimumspunkte der Methode der kleinsten Quadrate.

a) Der Schwerpunkt eines Punktsystems.

Die Bestimmung der ebenen rechtwinkeligen Koordinaten eines Punktes kann nach verschiedenen Methoden erfolgen. Am einfachsten und anschaulichsten ist der Vorgang der direkten Koordinatenabmessung, wie er z. B. in der Schießtechnik bei der Untersuchung von Trefferbildern allgemein gebräuchlich ist.

Wird auf eine vertikale Scheibe mit der Absicht, ihren Mittelpunkt zu treffen, ein Schuß abgegeben und hiebei dieser Punkt, welcher beim direkten Richten der Feuerwaffe in der Regel zugleich den Zielpunkt darstellt, auch wirklich getroffen, so ist der Schuß ein fehlerloser. Trifft aber das Geschoß nicht in den Mittelpunkt der Scheibe (den beabsichtigten Treffpunkt), so ist eine Abweichung oder ein Fehler begangen worden, dessen Größe durch den Abstand des wirklichen Treffpunktes von dem beabsichtigten Treffpunkte bestimmt ist. Es ist nun üblich, die Fehlergröße oder die Lage des Treffpunktes dadurch zu ermitteln, daß der Punkt auf die durch den beabsichtigten Treffpunkt geführte Horizontale als Abszissenachse und Vertikale als Ordinatenachse bezogen werde. Durch direktes Abmessen der Parallelkoordinaten x, y erhält man dann die sogenannte Seitenabweichung x und die Höhenabweichung y, welche die in den Richtungen der beiden gewählten Achsen begangenen komponentalen wahren Koordinatenfehler bedeuten und welchen nach dem pythagoräischen Lehrsatze die totale wahre Abweichung oder in der Sprache der Geodäsie der totale wahre Punktfehler $m = \sqrt{x^2 + y^2}$ entspricht. Werden mehrere Schüsse unter möglichst gleichen Voraussetzungen abgegeben, so tritt die Erscheinung zutage, daß die Geschoßbahnen sich nicht decken.

sondern eine „Garbe" bilden, deren Schnitt mit der vertikalen Scheibenebene ein Trefferbild liefert*).

Haben die einzelnen Treffpunkte T_i die Koordinaten x_i und y_i für $i = 1$ bis n, so sind nach der Regel des arithmetischen Mittels die wahrscheinlichsten Koordinaten des sogenannten mittleren Treffpunktes T_0:

$$x_0 = \frac{[x]}{n}, \qquad y_0 = \frac{[y]}{n}.$$

Der mittlere Treffpunkt fällt also mit dem, die gleiche Eigenschaft besitzenden Schwerpunkt des ganzen Punktsystems zusammen, vorausgesetzt, daß in den Punkten gleiche Massen angebracht gedacht werden. Bildet man die in Fig. 1 ersichtlichen Unterschiede

$$x_i - x_0 = \xi_i, \qquad y_i - y_0 = \eta_i,$$

Fig. 1.

welche die scheinbaren Abweichungen oder die mit entgegengesetzten Vorzeichen genommenen scheinbaren Koordinatenfehler sind**), so hat man nach den Grundlehren der Ausgleichung direkter Beobachtungen die Beziehungen:

$$[\xi] = 0, \qquad [\eta] = 0,$$
$$[\xi\xi] = min., \qquad [\eta\eta] = min.,$$

$$\text{mittlerer Abszissenfehler } \mu_\xi = \sqrt{\frac{[\xi\xi]}{n-1}},$$

$$\text{mittlerer Ordinatenfehler } \mu_\eta = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-1}}.$$

*) Ausführliches hierüber findet man in den Werken von J. Kozák: „Theorie des Schießwesens auf Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung", 1908, und „Geschoßbewegung im Vakuum", 1909.

**) Vgl. Fußnote im 1. Bande. S. 25.

$$\text{mittlerer Punktfehler } M = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2}.$$

Fällt der Schwerpunkt mit dem beabsichtigten Treffpunkte zusammen, so kann bei hinreichend großem n angenommen werden, daß die auftretenden Abweichungen der einzelnen Schüsse von dem beabsichtigten Treffpunkte infolge rein zufälliger Fehlerursachen zustande gekommen sind; weicht der Schwerpunkt vom beabsichtigten Treffpunkte ab, so stellt der Abstand dieser beiden Punkte den konstanten Teil der Schießfehler dar.

Verlegt man daher den Koordinatenursprung U nach dem Schwerpunkte T_0, ohne die Richtungen der Koordinatenachsen zu ändern, und bezieht die Koordinaten aller Treffpunkte auf dieses neue, bloß parallel verschobene Koordinatensystem, so stellen die Verbindungslinien der einzelnen Punkte mit dem Koordinatenursprung T_0 direkt die totalen scheinbaren Punktfehler und die neuen Koordinaten die scheinbaren Koordinatenfehler dar.

b) Der Kernpunkt eines Strahlensystems.

In der praktischen Geometrie erfolgt die analytische Bestimmung der Koordinaten einzelner, in ein bestehendes Dreiecksnetz einzuschaltender Punkte am bequemsten durch den Schnitt von Visierstrahlen, wobei es stets darauf ankommt, aus den bekannten Koordinaten der gegebenen Netzpunkte und den durch Beobachtung erhaltenen Gleichungen der Visierstrahlen die Koordinaten des Schnittpunktes zu berechnen.

Wird ein geodätischer Punkt z. B. vorwärts eingeschnitten (2. Bd. § 22), so genügen zu dessen eindeutiger Festlegung die Visuren von zwei gegebenen Punkten. Erfolgt aber die Punktbestimmung aus einer überschüssigen Anzahl von Festpunkten, so liefern die Schnittpunkte je zweier Visierstrahlen je einen besonderen Ort des Punktes, und da alle Visuren, obgleich sie nach einem gemeinsamen Zielpunkt gerichtet sind, infolge der Beobachtungsfehler an der Begegnungsstelle im allgemeinen nicht einen einzigen mathematischen Schnittpunkt, sondern eine fehlerzeigende Schnittfigur aufweisen werden, so liefert jede beobachtete Richtung eine lineare Fehlergleichung, so daß zur Bestimmung der Koordinaten X, Y eines Punktes P aus n Festpunkten oder eigentlich zur Bestimmung der Korrekturen δx, δy, die an den Näherungswerten x, y der Punktkoordinaten anzubringen sind, folgende n Fehlergleichungen zur Verfügung stehen:

$$a_i\,\delta x + b_i\,\delta y + l_i = v_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

wobei $X - x = \delta x$, $Y - y = \delta y$ die unbekannten Koordinatenverbesserungen, a, b konstante Zahlenwerte bedeuten und l_i die direkten Beobachtungsgrößen repräsentieren, deren wahrscheinlichste Verbesserungen r sind (2. Band, § 23). Gleichgenaue Beobachtungen l vorausgesetzt, erhält man die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten δx, δy nach den Grundlehren der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen unter Zugrundelegung der Minimumsbedingung $[r r] = min$ aus den Normalgleichungen:

$$[a a]\,\delta x + [a b]\,\delta y - [a l] = 0$$
$$[a b]\,\delta x + [b b]\,\delta y - [b l] = 0.$$

Die hieraus erhaltenen Werte von δx, δy liefern, in die Fehlergleichungen eingesetzt, die Verbesserungen r der Beobachtungsgrößen, wobei zur Kontrolle der Rechnung die Bedingungen erfüllt sein müssen:

$$[a r] = 0, \qquad [b r] = 0.$$

Die Resultate δx, δy haben die Gewichte

$$g_x = [a a] - \frac{[a b]^2}{[b b]} = [a a.1], \qquad g_y = [b b] - \frac{[a b]^2}{[a a]} = [b b.1]$$

und die mittleren Fehler

$$\mu_x = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_x}}, \qquad \mu_y = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_y}},$$

wo μ_0 den mittleren Fehler der Gewichtseinheit, also bei gleichgenauen Beobachtungen den mittleren Fehler einer einzelnen Richtungsbeobachtung $\sqrt{\frac{[r r]}{n-2}}$ bedeutet. Die Genauigkeitsmaße μ_x, μ_y stellen die dem bestimmten Punkte in der Richtung der Koordinatenachsen anhaftenden mittleren Koordinatenfehler dar, so daß der totale mittlere Punktfehler bestimmt ist durch die Formel

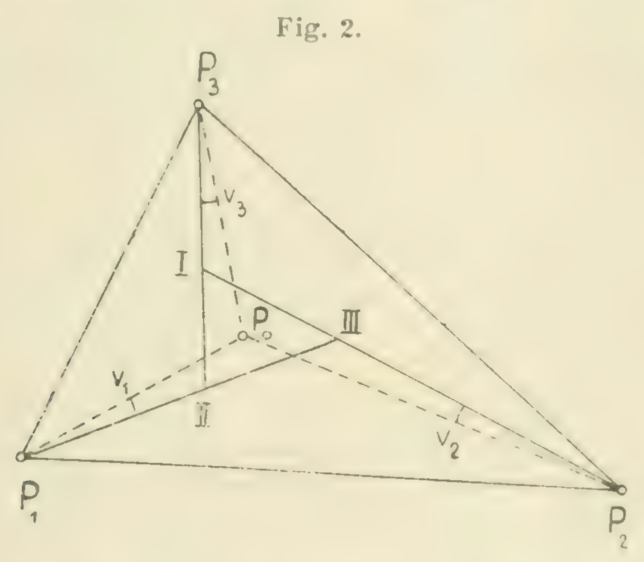
$$M = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2}.$$

Der auf Grund der Minimumsbedingung $[r r] = min$ berechnete Punkt P_0 gibt die vorteilhafteste Punktlage bei der Bestimmung durch Einschneiden an, welche aber mit dem Schwerpunkte der fehlerzeigenden Figur oder mit dem Schwerpunkte der die fehlerzeigende Figur bildenden Eckpunkte (die in Fig. 2 speziell für drei Strahlen durch I, II, III dargestellt sind) im allgemeinen nicht identisch ist.

Erfüllt der Schnittpunkt eines Strahlensystems, den wir als Kernpunkt bezeichnen wollen, die Bedingung, daß die Summe der Quadrate der ihm entsprechenden Richtungsänderungen $[r r]$

ein Minimum werde, so hat der Schwerpunkt eines Punktsystems der Forderung zu entsprechen, daß die Quadratsumme der auf ihn bezogenen Koordinatenänderungen $[\xi\xi]$ und $[\eta\eta]$ ein Kleinstes werde. In beiden Fällen sind es aber die an den direkten Beobachtungsgrößen anzubringenden Zuschläge (Verbesserungen, Fehler), deren Quadratsummen auf ein Minimum gebracht werden, weshalb in dem einen Falle der Kernpunkt P_0, in dem anderen Falle der Schwerpunkt T_0 den nach der Methode der kleinsten Quadrate definierten Minimumspunkt oder die wahrscheinlichste Punktlage ergibt*).

Fig. 2.



Beide Fälle müssen daher strenge auseinander gehalten werden und sollen in den folgenden Untersuchungen auch getrennt behandelt werden.

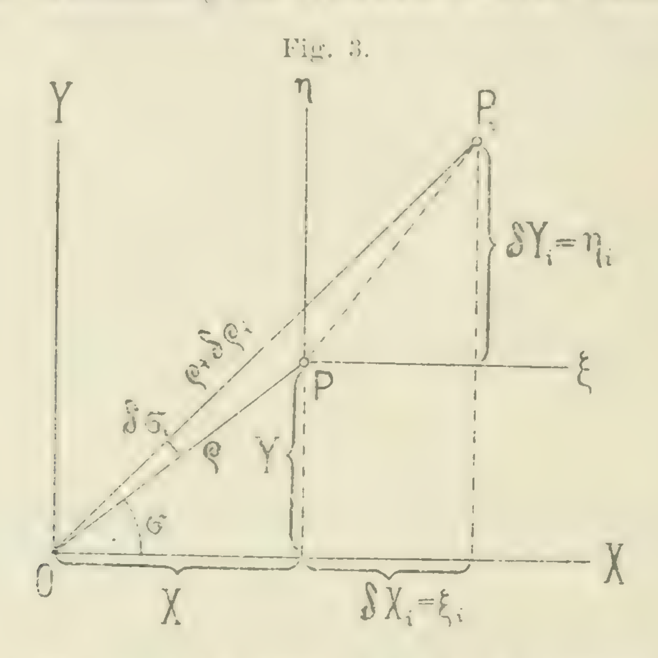
§ 2. Fehler in der Ebene.

Die Messung der Länge einer Strecke kann aufgefaßt werden als die Bestimmung der Lage eines Punktes (des Streckenendpunktes E) in bezug auf einen feststehenden Punkt (den Streckenanfangspunkt A) ohne Rücksicht auf die Richtung der Strecke. Die wahre Länge der Strecke AE ist dann gleichbedeutend mit der wahren Lage des Punktes E innerhalb einer durch A gehenden Geraden und jede Längenmessung dieser Strecke ist nichts anderes als eine Einmessung des Punktes E vom Anfangspunkte A in einer und derselben Richtung.

*) Vgl. des Verf. Schriften: „Über die Prinzipien der Ausgleichungsrechnung" in der Zeitschrift für Vermessungswesen, 1907, sowie „Theoretische und historische Betrachtungen in der Ausgleichungsrechnung" in der Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1907.

Jede Messung wird nach dieser Auffassung infolge der Beobachtungsfehler im allgemeinen einen anderen Endpunkt liefern. Wird die Messung n-mal wiederholt und werden hiebei die Endpunkte E_1, E_2, ... E_n erhalten, so stellen die Abstände EE_1, EE_2, ... EE_n die begangenen Messungsfehler vor, welche positiv oder negativ anzurechnen sind, je nachdem $AE_n > AE$ oder $AE_n < AE$ ist. Die lineare Erstreckung zwischen den dem Anfangspunkte A am nächsten und am weitesten zu liegen kommenden Endpunkten E_n und E_m, innerhalb welcher alle begangenen Messungsfehler sich ausbreiten oder die Punkte E_n bis E_m zerstreut liegen, wird die lineare Streuung oder Streuungsstrecke genannt; die Fehler selbst können dann im Geiste dieser Auffassung als lineare Fehler bezeichnet werden.

Fig. 3.



Soll die Lage eines Punktes P auf einer Ebene in bezug auf ein feststehendes rechtwinkeliges Achsenkreuz OX und OY (Fig. 3) bestimmt werden, so sind zwei unabhängige Bestimmungsstücke erforderlich, entweder die Polarkoordinaten ϱ, σ oder die rechtwinkeligen Koordinaten X, Y.

Um zu den Punktkoordinaten zu gelangen, werden auch in manchen Fällen die Koordinaten geradezu direkt gemessen, wie es beispielsweise in der Schießtechnik bei der Festlegung der gegen eine Scheibe abgegebenen Treffer in bezug auf zwei durch den beabsichtigten Treffpunkt gehende, aufeinander senkrecht stehende Achsen geschieht. In vielen Fällen erscheint aber eine direkte Abmessung der Koordinaten teils unzweckmäßig, teils überhaupt nicht durchführbar; so in der praktischen Geometrie, wo die Bestimmung trigonometrischer Netzpunkte auf indirektem oder vermittelndem Wege erfolgen muß.

Möge nun die Punktbestimmung auf welchem Wege immer erfolgen, stets wird infolge der Beobachtungsfehler jede Punktbestimmung im allgemeinen zu einer anderen Punktlage P_1, P_2, ... P führen, deren Abstände von P als die Bestimmungsfehler anzusehen sind. Diesen Bestimmungsfehlern kommt zum Unterschiede von den linearen Messungsfehlern, welche nur das Merkmal der positiven oder negativen Größe an sich tragen, neben diesem Kennzeichen auch das Merkmal der innerhalb der Ebene einnehmbaren Richtung zu. Die Fehler, welche sich bei der i-ten Punktbestimmung zusammensetzen lassen aus den Fehlern der Polarkoordinaten $\delta\varphi$, $\delta\rho$ oder aus den Fehlern der Parallelkoordinaten δX_i, δY_i, werden als **Fehler in der Ebene** bezeichnet. Der Bereich, in welchem sämtliche Punktfehler sich ausbreiten, wird die **Streuung in der Ebene** oder **Streuungsfläche** genannt.

Den nachfolgenden Untersuchungen wollen wir die Fehler in der Form von Parallelkoordinaten zugrunde legen, die — bezogen auf ein mit dem Ursprung nach dem zu bestimmenden Punkte P parallel verlegtes Koordinatensystem — mit ξ_i, η_i ($i = 1, 2, \ldots n$) bezeichnet werden mögen.

Angenommen, sämtliche Punktbestimmungen hätten in der Y-Achse fehlerfreie Messungsdaten ergeben, so daß alle $\eta_i = 0$ zu setzen wären, während in der X-Achse die Fehler ξ_1, ξ_2, ... ξ_n auftreten, so gehen die Fehler in der Ebene in lineare Fehler parallel zur Abszissenachse über und erscheinen sohin der Form nach demselben Fehlergesetze unterworfen, wie die linearen Fehler. Die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, daß die Abszisse des zu bestimmenden Punktes zwischen den Werten ξ und $\xi + d\xi$ zu liegen komme, ist daher ausgedrückt durch die Exponentialfunktion:

$$\varphi(\xi)\, d\xi = \frac{h_\xi}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h_\xi^2 \xi^2}\, d\xi.$$

Für die entgegengesetzte Annahme, daß alle $\xi = 0$ und in der Richtung der Ordinatenachse die Fehler η_1, η_2, ... η_n begangen worden seien, erhält man die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt zwischen den Ordinaten η und $\eta + d\eta$ eingeschlossen sei, den Ausdruck:

$$\varphi(\eta)\, d\eta = \frac{h_\eta}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h_\eta^2 \eta^2}\, d\eta.$$

Wenn aber nach beiden Richtungen hin Fehler begangen wurden, welches ist dann der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit $\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$, daß der zu bestimmende Punkt oder dessen Fehler in den Grenzen

ξ und $\xi + d\xi$ sowie η und $\eta + d\eta$ eingeschlossen liege, also innerhalb des Flächenelementes $d\xi \, . \, d\eta$ falle?

Da dem obigen zufolge jeder Einzelfehler als die Resultante seiner Projektionen auf die Koordinatenachsen aufzufassen ist, so kann im vorhinein behauptet werden, daß das Gesetz der Fehler in der Ebene so konstruiert sein muß, daß aus demselben für die Projektionen auf eine der Achsen das lineare Fehlergesetz hervorgehe.

Von einem ähnlichen, erweiterten Gesichtspunkte aus kann auch das Gesetz der „Fehler im Raume" betrachtet werden.

I. Abschnitt.

Theorie der Fehler in der Ebene und im Raume.

A. Direkte Beobachtungen.

§ 3. Die Form des Fehlergesetzes in der Ebene.

Abgesehen von den unvollkommenen Versuchen des amerikanischen Mitbegründers der Methode der kleinsten Quadrate Adrain (1808), war Bravais (1846) der erste, welcher eingehende Untersuchungen über die Fehler in der Bestimmung eines Punktes in der Ebene und im Raume angestellt hat. Seither haben sich mit diesem Gegenstande selbständig beschäftigt: Andrae (1857), Bienaymé (1858), Helmert (1868), Schols (1875), Jordan (1888), Czuber (1891), Kerl (1908) u. a.

Sabudski (1898) und Kozák (1910) aber haben diese grundlegenden Arbeiten zur leichteren Anwendung in der Schießtechnik in geeigneter Weise verwertet. Die hier niedergelegte Analyse nimmt namentlich die Arbeiten von Schols als Grundlage, während die daran anschließenden Untersuchungen zum Teile selbständige Wege einschlagen.

Sind $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots x_n, y_n$ die durch direkte Messung erlangten, mit zufälligen Fehlern behafteten Koordinaten der mit gleicher Genauigkeit eingemessenen n Punkte und X, Y die wahren Werte der Koordinaten des zu bestimmenden Punktes, so ist mit Berufung auf die Regel des arithmetischen Mittels die wahrscheinlichste Punktlage T_0 bestimmt durch die Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{[x]}{n} \\ y_0 &= \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \frac{[y]}{n}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Der so bestimmte Punkt fällt, wie bereits Cotes (1709) hervorgehoben hat, mit dem Schwerpunkt des Systems der beobachteten Punkte zusammen, wenn in den einzelnen Punkten gleiche Massen vorausgesetzt werden. Den einzelnen Punktbestimmungen haften dann folgende scheinbare Fehlerkomponenten an:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 - x_0 = \xi_1 & y_1 - y_0 = \eta_1 \\ x_2 - x_0 = \xi_2 & y_2 - y_0 = \eta_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_n - x_0 = \xi_n & y_n - y_0 = \eta_n \end{array}\right\} \qquad (2)$$

und es bestehen die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n = [\xi] = 0 \\ \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n = [\eta] = 0 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Die Abweichungen ξ_i, η_i haben dann die Bedeutung von Punktkoordinaten bezogen auf ein neues Koordinatensystem, dessen Ursprung mit dem Schwerpunkt T_0 des durch Beobachtung erhaltenen Punktsystems zusammenfällt und dessen Achsen $T_0\,\xi$ und $T_0\,\eta$ parallel laufen mit den ursprünglichen Achsen Ux und Uy. (Fig. 1, S. 2.) Den folgenden Untersuchungen sei daher der Einfachheit halber dieses neue Achsenkreuz zugrunde gelegt.

Die Wahrscheinlichkeiten, daß die einzelnen Punktbestimmungen die Fehlerpaare ξ_1, η_1 bis ξ_n, η_n erzeugen, sind ausgedrückt durch die Funktionen $\varphi(\xi_1, \eta_1)\, d\xi\, d\eta$ bis $\varphi(\xi_n, \eta_n)\, d\xi\, d\eta$ und es ist die Wahrscheinlichkeit, daß sämtliche Fehlerpaare oder die Messungen, welche sie herbeigeführt haben, gleichzeitig zustande kommen, ausgedrückt durch das Produkt dieser Einzelwahrscheinlichkeiten, nämlich:

$$W = \varphi(\xi_1, \eta_1) \cdot \varphi(\xi_2, \eta_2) \ldots \varphi(\xi_n, \eta_n) \cdot (d\xi\, d\eta)^n . \qquad (4)$$

Wenn die Fehler ξ_i, η_i, wie hier vorausgesetzt, die Abweichungen von dem arithmetischen Mittel der beobachteten Werte x_1 bis x_n beziehungsweise y_1 bis y_n, also die scheinbaren Beobachtungsfehler nach beiden Koordinatenrichtungen darstellen, so soll dieses Produkt ein Maximum sein. Da in demselben die Intervalle $d\xi$ und $d\eta$ konstant angenommen wurden, so erhält unter der Einführung der Hypothese des arithmetischen Mittels der veränderliche Teil des Wahrscheinlichkeitsausdruckes W den größten Wert. Damit aber der Ausdruck

$$\varphi(\xi_1, \eta_1) \cdot \varphi(\xi_2, \eta_2) \ldots \varphi(\xi_n, \eta_n) = \varphi(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \cdot \varphi(x_2 - x_0, y_2 - y_0) \ldots$$
$$\ldots \varphi(x_n - x_0, y_n - y_0)$$

oder dessen natürlicher Logarithmus

$$\Omega = lg\,\varphi(\xi_1, \eta_1) + lg\,\varphi(\xi_2, \eta_2) + \cdots + lg\,\varphi(\xi_n, \eta_n) \qquad (5)$$

ein Maximum werde, müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_0} = 0 \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y_0} = 0.$$

Beachtet man, daß wegen (2)

$$\frac{d\xi_1}{dx_0} = \frac{d\xi_2}{dx_0} = \cdots = \frac{d\xi_n}{dx_0} = -1$$

$$\frac{d\eta_1}{dy_0} = \frac{d\eta_2}{dy_0} = \cdots = \frac{d\eta_n}{dy_0} = -1,$$

daher allgemein für das i-te Glied

$$\frac{\partial\, lg\,\varphi(\xi_i, \eta_i)}{\partial x_0} = \frac{\partial\, lg\,\varphi(\xi_i, \eta_i)}{\partial \xi_i}\frac{d\xi_i}{dx_0} = -\frac{\partial\, lg\,\varphi(\xi_i, \eta_i)}{\partial \xi_i} = -F_1(\xi_i, \eta_i)$$

$$\frac{\partial\, lg\,\varphi(\xi_i, \eta_i)}{\partial y_0} = \frac{\partial\, lg\,\varphi(\xi_i, \eta_i)}{\partial \eta_i}\frac{d\eta_i}{dy_0} = -\frac{\partial\, lg\,\varphi(\xi_i, \eta_i)}{\partial \eta_i} = -F_2(\xi_i, \eta_i),$$

so erhält man durch partielle Differentiation von (5) nach x_0 und y_0, nachheriges Nullsetzen und Multiplizieren mit -1:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(\xi_1, \eta_1) + F_1(\xi_2, \eta_2) + \cdots + F_1(\xi_n, \eta_n) = [F_1(\xi, \eta)] = 0 \\ F_2(\xi_1, \eta_1) + F_2(\xi_2, \eta_2) + \cdots + F_2(\xi_n, \eta_n) = [F_2(\xi, \eta)] = 0. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Unter der Annahme, daß die Koordinaten des ausgeglichenen Punktes aus den mit Messungsfehlern behafteten Koordinaten der einzelnen Punkte nach der Regel des arithmetischen Mittels gebildet werden, muß sich die Form der Funktion $\varphi(\xi, \eta)$ aus den vier Gleichungen (3) und (6) vollständig bestimmen lassen. Da die erwähnten vier Gleichungen für jede beliebige Anzahl von Punktbestimmungen Geltung besitzen, so kann man durch Betrachtung der einfachsten Fälle leicht zur Kenntnis wichtiger Eigenschaften der Funktionen $F(\xi, \eta)$ gelangen. Liegen nur zwei Punktbestimmungen vor, so bestehen nach (3) die Gleichungen:

$$\xi_2 = -\xi_1 \qquad \eta_2 = -\eta_1,$$

womit die Gleichungen (6) folgende Spezialisierungen erfahren:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(\xi_1, \eta_1) = -F_1(-\xi_1, -\eta_1) \\ F_2(\xi_1, \eta_1) = -F_2(-\xi_1, -\eta_1), \end{array}\right\} \qquad (7)$$

welche Beziehungen der Funktion $F(\xi, \eta)$ die Eigenschaft zuschreiben, daß sie das Vorzeichen ändert, wenn dies auch bei den Variablen ξ und η geschieht. — Betrachtet man ferner den speziellen Fall, daß

drei Punktbestimmungen vorliegen, so liefern die Gleichungen (3) die Beziehungen:

$$\xi_3 = -(\xi_1 + \xi_2) \qquad \eta_3 = -(\eta_1 + \eta_2),$$

womit die Gleichungen (6) folgende Spezialisierungen erfahren:

$$\begin{aligned} F_1(\xi_1, \eta_1) + F_1(\xi_2, \eta_2) + F_1\{-(\xi_1 + \xi_2), -(\eta_1 + \eta_2)\} &= 0 \\ F_2(\xi_1, \eta_1) + F_2(\xi_2, \eta_2) + F_2\{-(\xi_1 + \xi_2), -(\eta_1 + \eta_2)\} &= 0 \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf die Eigenschaft (7):

$$\left.\begin{aligned} F_1(\xi_1, \eta_1) + F_1(\xi_2, \eta_2) &= F_1(\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2) \\ F_2(\xi_1, \eta_1) + F_2(\xi_2, \eta_2) &= F_2(\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Differenziert man die erste dieser Gleichungen (8) partiell zuerst nach ξ_1 und dann nach ξ_2, so erhält man in beiden Fällen das gleiche Resultat:

$$\frac{\partial F_1(\xi_1, \eta_1)}{\partial \xi_1} = \frac{\partial F_1(\xi_2, \eta_2)}{\partial \xi_2} = \frac{\partial F_1(\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2)}{\partial (\xi_1 + \xi_2)} = \text{konstant.}$$

Desgleichen findet man durch partielle Differentiation der zweiten Gleichung von (8) nach ξ_1 und ξ_2 und der beiden Gleichungen (8) nach η_1 und η_2, daß die betreffenden partiellen Ableitungen konstant sind. Daraus geht hervor, daß die Funktionen F_1 und F_2 in bezug auf die Veränderlichen ξ und η linear sein müssen. Man darf daher setzen:

$$\begin{aligned} F_1(\xi, \eta) &= a_{11}\,\xi + a_{12}\,\eta + f_1 \\ F_2(\xi, \eta) &= a_{21}\,\xi + a_{22}\,\eta + f_2. \end{aligned}$$

Da man aber nach (7) auch schreiben kann:

$$a_{11}\,\xi + a_{12}\,\eta + f_1 = -(-a_{11}\,\xi - a_{12}\,\eta + f_1) = a_{11}\,\xi + a_{12}\,\eta - f_1,$$

so folgt, daß $f_1 = 0$ und ebenso auch $f_2 = 0$ ist, so daß man hat:

$$\left.\begin{aligned} F_1(\xi, \eta) &= \frac{\partial\, lg\, \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi} = a_{11}\,\xi + a_{12}\,\eta \\ F_2(\xi, \eta) &= \frac{\partial\, lg\, \varphi(\xi, \eta)}{\partial \eta} = a_{21}\,\xi + a_{22}\,\eta. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Nun folgt aus

$$d\, lg\, \varphi(\xi, \eta) = \frac{\partial\, lg\, \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi}\, d\xi + \frac{\partial\, lg\, \varphi(\xi, \eta)}{\partial \eta}\, d\eta \tag{10}$$

$$\frac{\partial \dfrac{\partial\, lg\, \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi}}{\partial \eta} = \frac{\partial \dfrac{\partial\, lg\, \varphi(\xi, \eta)}{\partial \eta}}{\partial \xi}$$

oder

$$\frac{\partial^2\, lg\, \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi\, \partial \eta} = \frac{\partial^2\, lg\, \varphi(\xi, \eta)}{\partial \eta\, \partial \xi},$$

daß durch Differentiation der ersten Gleichung von (9) nach η und der zweiten Gleichung von (9) nach ξ gleiche Resultate gewonnen werden, nämlich, daß $a_{12} = a_{21}$ sein muß, so daß (10) übergeht in:

$$d\,lg\,\varphi(\xi, \eta) = -(a_{11}\xi + a_{12}\eta)\,d\xi - (a_{12}\xi + a_{22}\eta)\,d\eta. \quad (11)$$

Um diese Differentialgleichung zu integrieren, beachte man, daß nach (9) der erste Teil der rechten Seite von (11) das partielle Differential von $lg\,\varphi(\xi, \eta)$ nach ξ und der zweite Teil das partielle Differential von $lg\,\varphi(\xi, \eta)$ nach η darstellt; integriert man daher den ersten Teil so, als ob η konstant wäre, so folgt zunächst:

$$lg\,\varphi(\xi, \eta) = -\frac{a_{11}}{2}\xi^2 - a_{12}\xi\eta + H, \quad (12)$$

worin H als eine Funktion von η allein derart zu bestimmen ist, daß durch Differentiation von (12) nach η der zweite Teil von (11) resultiert. Macht man dies, so ergibt sich:

$$-a_{12}\xi + \frac{dH}{d\eta} = -a_{12}\xi - a_{22}\eta.$$

Hieraus findet man $\frac{dH}{d\eta} = -a_{22}\eta$ und $H = -\frac{a_{22}}{2}\eta^2 + C$, wobei C eine unabhängige Konstante bedeutet. Die Gleichung (12) geht daher über in:

$$lg\,\varphi(\xi, \eta) = -\frac{a_{11}}{2}\xi^2 - a_{12}\xi\eta - \frac{a_{22}}{2}\eta^2 + C$$

oder

$$\varphi(\xi, \eta) = K e^{-\frac{a_{11}}{2}\xi^2 - a_{12}\xi\eta - \frac{a_{22}}{2}\eta^2},$$

wenn $e^C = K$ gesetzt wird. Diese Funktion ist das Fehlergesetz in der Ebene oder nach einer Bezeichnung von Schols, das „Grenzgesetz".

Für die Wahrscheinlichkeit, daß ein durch direkte Messung seiner Koordinaten bestimmter Punkt innerhalb des unendlich kleinen Rechteckes $d\xi\,d\eta$ falle, ergibt sich sohin der Ausdruck:

$$\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = K e^{-\frac{1}{2}(a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2)}\,d\xi\,d\eta. \quad (14)$$

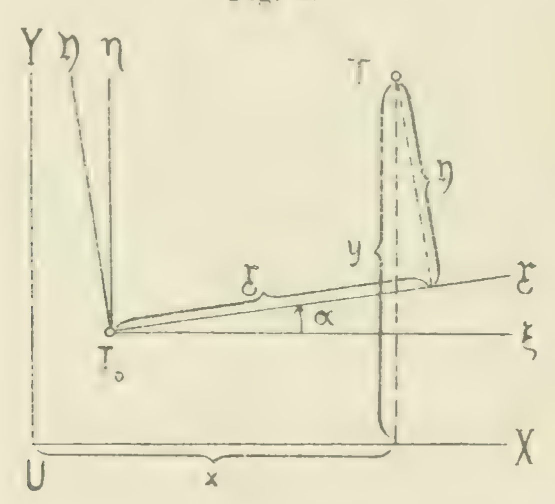
§ 4. Umformung des Fehlergesetzes.

Der Ableitung des Wahrscheinlichkeitsausdruckes (14), den wir mit w bezeichnen wollen, liegt ein Koordinatensystem zugrunde, dessen Ursprung im Schwerpunkte des durch Beobachtungen erhaltenen

Punktsystems liegt und dessen zueinander senkrechte Achsen in der Ebene eine sonst beliebige Lage besitzen. Es gibt nun unter Beibehaltung des Koordinatenursprunges eine bestimmte, durch Drehung um den Ursprung herbeigeführte Achsenlage, bei welcher im Exponenten des Wahrscheinlichkeitsausdruckes w unter Einführung der transformierten Koordinaten das Glied mit $\xi\,\eta$ zu Null wird. Schließen die gedrehten Achsen $T_0\,\mathfrak{x}$ und $T_0\,\mathfrak{y}$ in Fig. 4 mit den ursprünglichen Achsen $T_0\,\xi$ und $T_0\,\eta$ den Winkel α ein, so stehen die neuen Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ mit den ursprünglichen Koordinaten ξ, η eines beliebigen Punktes T der Ebene in bestimmten Beziehungen, die bekanntlich durch folgende Transformationsgleichungen gegeben sind:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \mathfrak{x}\cos\alpha - \mathfrak{y}\sin\alpha \\ \eta &= \mathfrak{x}\sin\alpha + \mathfrak{y}\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Fig. 4.



Der doppelte Exponent von (14), § 3, geht dann über in:

$$a_{11}(\mathfrak{x}\cos\alpha - \mathfrak{y}\sin\alpha)^2 + 2\,a_{12}(\mathfrak{x}\cos\alpha - \mathfrak{y}\sin\alpha)(\mathfrak{x}\sin\alpha + \mathfrak{y}\cos\alpha) +$$
$$+ a_{22}(\mathfrak{x}\sin\alpha + \mathfrak{y}\cos\alpha)^2$$

oder nach erfolgter Entwicklung und Heraushebung der neuen Koordinaten:

$$(a_{11}\cos^2\alpha + a_{12}\sin 2\alpha + a_{22}\sin^2\alpha)\,\mathfrak{x}^2 +$$
$$+ \left\{(a_{22} - a_{11})\sin 2\alpha + 2\,a_{12}\cos 2\alpha\right\}\mathfrak{x}\,\mathfrak{y} +$$
$$+ (a_{11}\sin^2\alpha - a_{12}\sin 2\alpha + a_{22}\cos^2\alpha)\,\mathfrak{y}^2.$$

Soll die oben angezeigte Drehung derart erfolgen, daß das Glied mit $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ verschwindet, so muß der Winkel α den Koeffizienten von $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ zu Null machen, d. h. es muß die Bedingungsgleichung bestehen:

$$(a_{22} - a_{11})\sin 2\alpha + 2\,a_{12}\cos 2\alpha = 0 \qquad (2)$$

oder

$$tg\, 2\alpha = \frac{2\, a_{12}}{a_{11} - a_{22}}. \qquad (3)$$

Zieht man in Erwägung, daß die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers mit der Zunahme der Fehlergröße abnehmen muß, so müssen die konstanten Koeffizienten von $\mathfrak{x}^2$ und $\mathfrak{y}^2$ notwendig negativ sein. Setzt man daher

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}(a_{11} \cos^2\alpha + a_{12} \sin 2\alpha + a_{22} \sin^2\alpha) &= -h_{\mathfrak{x}}^2 \\ \frac{1}{2}(a_{11} \sin^2\alpha - a_{12} \sin 2\alpha + a_{22} \cos^2\alpha) &= -h_{\mathfrak{y}}^2 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

so erhält das Fehlergesetz die Form:

$$\varphi(\xi, \eta) = K e^{-h_{\mathfrak{x}}^2 \mathfrak{x}^2 - h_{\mathfrak{y}}^2 \mathfrak{y}^2} \qquad (5)$$

und es geht (14), § 3, über in:

$$w = K e^{-h_{\mathfrak{x}}^2 \mathfrak{x}^2 - h_{\mathfrak{y}}^2 \mathfrak{y}^2}\, d\xi\, d\eta. \qquad (6)$$

Um hierin $d\xi\, d\eta$ als Funktion von $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ darzustellen, bilde man nach der Theorie der Transformation eines Doppelintegrals durch Einführung neuer Veränderlichen (Czuber, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, II. Bd., 1906, S. 185) die Jacobische Determinante der durch (1), S. 14, gegebenen Funktionen ξ, η und setze:

$$d\xi\, d\eta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \mathfrak{x}} & \frac{\partial \eta}{\partial \mathfrak{x}} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \mathfrak{y}} & \frac{\partial \eta}{\partial \mathfrak{y}} \end{vmatrix} d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \mathfrak{x}}\frac{\partial \eta}{\partial \mathfrak{y}} - \frac{\partial \xi}{\partial \mathfrak{y}}\frac{\partial \eta}{\partial \mathfrak{x}}\right) d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} =$$

$$= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y};$$

damit erhält der Wahrscheinlichkeitsausdruck w, Gleichung (6), die Form:

$$w = K e^{-h_{\mathfrak{x}}^2 \mathfrak{x}^2 - h_{\mathfrak{y}}^2 \mathfrak{y}^2}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}. \qquad (7)$$

§ 5. Bestimmung der Konstanten K.

Die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit w, daß ein bestimmter Fehler in der Ebene zwischen den Grenzen ξ und $\xi + d\xi$ sowie η und $\eta + d\eta$ zu liegen komme oder innerhalb des unendlich kleinen Flächenelementes $d\xi\, d\eta$ falle, ist ausgedrückt durch:

$$w = \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = K e^{-h_{\mathfrak{x}}^2 \mathfrak{x}^2 - h_{\mathfrak{y}}^2 \mathfrak{y}^2}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}.$$

Wird das Fehlergebiet unter der Annahme, daß Fehler aller Größen und Richtungen möglich sind, über die unendliche Ebene

ausgedehnt, so geht die Wahrscheinlichkeit für das Begehen eines Fehlers in die Gewißheit über, weil es gewiß ist, daß der eingemessene Punkt irgendwo in die ins unbegrenzte ausgedehnte Ebene zu liegen kommen muß, und es besteht daher die Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_{\mathfrak{x}}^2 \mathfrak{x}^2}\, d\mathfrak{x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_{\mathfrak{y}}^2 \mathfrak{y}^2}\, d\mathfrak{y} = 1$$

oder mit Berücksichtigung des Wertes der hier auftretenden Laplaceschen Integrale:

$$K \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{h_{\mathfrak{x}}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{h_{\mathfrak{y}}} = 1.$$

Daraus folgt:

$$K = \frac{h_{\mathfrak{x}} h_{\mathfrak{y}}}{\pi}. \tag{1}$$

Damit erhält das Fehlergesetz in der Ebene die Form:

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{h_{\mathfrak{x}} h_{\mathfrak{y}}}{\pi}\, e^{-(h_{\mathfrak{x}}^2 \mathfrak{x}^2 + h_{\mathfrak{y}}^2 \mathfrak{y}^2)}, \tag{2}$$

worin $h_{\mathfrak{x}}$ und $h_{\mathfrak{y}}$ die Bedeutung von Genauigkeitsmaßen der Punktbestimmungen in den Richtungen der Koordinatenachsen besitzen. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Beobachtung in dem Flächenelemente $d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}$ eingeschlossen liege, kann daher in zwei Teile zerlegt werden, wovon der eine die Wahrscheinlichkeit der Fehler nach der Abszissenachse, der andere diejenige nach der Ordinatenachse bedeutet, denn es ist

$$\begin{aligned} w &= \frac{h_{\mathfrak{x}} h_{\mathfrak{y}}}{\pi}\, e^{-(h_{\mathfrak{x}}^2 \mathfrak{x}^2 + h_{\mathfrak{y}}^2 \mathfrak{y}^2)}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} \\ &= \frac{h_{\mathfrak{x}}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h_{\mathfrak{x}}^2 \mathfrak{x}^2}\, d\mathfrak{x} \cdot \frac{h_{\mathfrak{y}}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h_{\mathfrak{y}}^2 \mathfrak{y}^2}\, d\mathfrak{y}. \end{aligned}$$

Hieraus wird geschlossen, daß der Fehler einer Punktbestimmung aus den voneinander unabhängig vorausgesetzten Fehlerkomponenten sich ebenso zusammensetzt, wie z. B. Kräfte, Geschwindigkeiten usw. Diese wichtige Eigenschaft besitzen die Fehler jedoch nur in bezug auf jenes rechtwinkelige Achsenkreuz, wofür im Exponenten des Wahrscheinlichkeitsausdruckes (14), S. 13 das Glied mit $\xi\eta$ verschwindet, weshalb diese bevorzugten Achsen als Hauptachsen der Wahrscheinlichkeit bezeichnet werden. (Das Analogon in der Mechanik bilden die Hauptachsen der Trägheit; in der Schießtheorie werden sie Trefferbildachsen genannt.)

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Punktbestimmung in den Bereich eines von irgend einer Kurve begrenzten Teiles der ebenen Vermessungsfläche falle, ist ausgedrückt durch das Doppelintegral:

$$W = \frac{h_{\mathfrak{x}} h_{\mathfrak{y}}}{\pi} \int\int e^{-h_{\mathfrak{x}}^2 \mathfrak{x}^2 - h_{\mathfrak{y}}^2 \mathfrak{y}^2} \, d\mathfrak{x} \, d\mathfrak{y},$$

worin die Integrationsgrenzen aus der Gleichung der begrenzenden Kurve zu bestimmen sind. Es muß aber ausdrücklich betont werden, daß die Geltung dieses Ausdruckes zur Voraussetzung hat, daß der Koordinatenursprung in dem Schwerpunkte des beobachteten Punktsystems, welcher bei direkten Koordinatenmessungen mit der wahrscheinlichsten Punktlage gleichbedeutend ist, verlegt wird und die Hauptachsen der Wahrscheinlichkeit zu Koordinatenachsen gemacht werden. Dann stellt auch die durch die Gleichung $z = \varphi(\xi, \eta)$ definierte Fläche die der Wahrscheinlichkeits-Kurve bei linearen Fehlern analoge Wahrscheinlichkeits-Fläche dar, welche dadurch entstanden gedacht werden kann, daß auf den in jedem Punkte der Ebene errichteten Senkrechten die zugehörigen Funktionswerte z aufgetragen werden.

Um die Integrationskonstante K als eine Funktion der konstanten Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{22} darzustellen, setze man die Werte von $h_{\mathfrak{x}}$ und $h_{\mathfrak{y}}$ aus § 4, Gleichungen (4), S. 15 in den Ausdruck (1) und entwickle:

$$K = \frac{\sqrt{(a_{11} \cos^2\alpha + a_{12} \sin 2\alpha + a_{22} \sin^2\alpha)(a_{11} \sin^2\alpha - a_{12} \sin 2\alpha + a_{22} \cos^2\alpha)}}{2\pi}.$$

Die Ausmultiplizierung unter dem Wurzelzeichen gibt:

$$(a_{11}^2 + a_{22}^2) \sin^2\alpha \cos^2\alpha + a_{11} a_{22} (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - a_{12}^2 \sin^2 2\alpha -$$
$$- a_{12} (a_{11} - a_{22}) \sin 2\alpha \cos 2\alpha.$$

Nun erhält das zweite Glied wegen

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha$$

den Wert $a_{11} a_{22} (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) = a_{11} a_{22} (1 - 2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha)$; das vierte Glied ist mit Rücksicht auf (2), § 4, S. 14:

$$a_{12} (a_{11} - a_{22}) \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 2 a_{12}^2 \cos^2 2\alpha$$

und die Summe des dritten und vierten Gliedes gibt:

$$(a_{12}^2 \sin^2 2\alpha + 2 a_{12}^2 \cos^2 2\alpha) = a_{12}^2 (1 + \cos^2 2\alpha).$$

folglich wird der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen:

$$(a_{11} - a_{22})^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha + a_{11}\, a_{22} (1 - 2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha) - a_{12}^2 (1 - \cos^2 2\alpha) =$$
$$(a_{11}^2 + a_{22}^2 - 2\, a_{11}\, a_{22}) \sin^2\alpha \cos^2\alpha + a_{12}^2 \cos^2 2\alpha + a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 =$$
$$\frac{1}{4} (a_{11} - a_{22})^2 \sin^2 2\alpha + a_{12}^2 \cos^2 2\alpha + a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2.$$

Da die zwei ersten Glieder des letzten Ausdruckes mit Rücksicht auf (2), § 4, den Wert Null geben, so erhält man schließlich:

$$K = \frac{\sqrt{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2}}{2\pi}. \tag{3}$$

Zu demselben Ergebnisse gelangt man auch, wenn der Wahrscheinlichkeitsausdruck (14) des § 3 beziehungsweise (7) des § 4:

$$\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = K e^{-\frac{1}{2}(a_{11}\mathfrak{x}^2 + 2 a_{12}\mathfrak{x}\mathfrak{y} + a_{22}\mathfrak{y}^2)}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y},$$

wo im Exponenten von e aus bekanntem Grunde das Minuszeichen vorgesetzt erscheint, in bezug auf $\mathfrak{y}$ zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ integriert wird, denn es ist:

$$d\mathfrak{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, d\mathfrak{y} = K\, d\mathfrak{x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(a_{11}\mathfrak{x}^2 + 2 a_{12}\mathfrak{x}\mathfrak{y} + a_{22}\mathfrak{y}^2)}\, d\mathfrak{y} =$$
$$= K \sqrt{\frac{2\pi}{a_{22}}}\, e^{-\frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{2 a_{22}} \mathfrak{x}^2}\, d\mathfrak{x}.$$

Vergleicht man dieses Resultat, welches die Wahrscheinlichkeit darstellt, daß das von $\mathfrak{y}$ unabhängig vorausgesetzte $\mathfrak{x}$ zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}$ falle, mit dem aus der Theorie der linearen Fehler hervorgehenden Ausdruck für dieselbe Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{h_{\mathfrak{x}}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h_{\mathfrak{x}}^2 \mathfrak{x}^2}\, d\mathfrak{x},$$

so gelangt man zu dem Schlusse, daß

$$h_{\mathfrak{x}} = K\pi \sqrt{\frac{2}{a_{22}}}, \qquad h_{\mathfrak{x}}^2 = \frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2}{2\, a_{22}}$$

und daher

$$K = \frac{\sqrt{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2}}{2\pi}$$

ist. In analoger Weise erhält man auch mit demselben K

$$h_{\mathfrak{y}}^2 = \frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2}{2\, a_{11}}.$$

§ 6. Die Fehlerellipse.

Die Wahrscheinlichkeit einer Punktlage in der Ebene ist dargestellt durch den Ausdruck:

$$w = \frac{h_{\mathfrak{x}}\, h_{\mathfrak{y}}}{\pi}\, e^{-(h_{\mathfrak{x}}^2 \mathfrak{x}^2 + h_{\mathfrak{y}}^2 \mathfrak{y}^2)}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}. \tag{1}$$

Werden hier statt der Genauigkeitsmaße h die charakteristischen Fehlermaße gemäß den Beziehungen:

$$h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} = \frac{1}{\vartheta\sqrt{\pi}} = \frac{\varkappa}{\varrho}$$

eingeführt, wobei μ den mittleren, ϑ den durchschnittlichen und ϱ den wahrscheinlichen Fehler bedeutet, so kann der Klammerausdruck des Exponenten von e auch wie folgt geschrieben werden:

$$h_{\mathfrak{x}}^2 \mathfrak{x}^2 + h_{\mathfrak{y}}^2 \mathfrak{y}^2 = \frac{\mathfrak{x}^2}{2\mu_{\mathfrak{x}}^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{2\mu_{\mathfrak{y}}^2} = \frac{\mathfrak{x}^2}{\pi\vartheta_{\mathfrak{x}}^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{\pi\vartheta_{\mathfrak{y}}^2} = \frac{\varkappa^2\mathfrak{x}^2}{\varrho_{\mathfrak{x}}^2} + \frac{\varkappa^2\mathfrak{y}^2}{\varrho_{\mathfrak{y}}^2}.$$

Nun kann man die Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, welche die komponentalen Punktfehler in der $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Achse darstellen, durch geeignete Auswahl von Punkten derart variieren, daß der Exponent von e und daher auch die Wahrscheinlichkeit w konstant bleibt, daß also, wenn wir uns — wie dies in der Folge vorzugsweise geschehen soll — des mittleren Fehlers bedienen, die Gleichung besteht:

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{2\mu_{\mathfrak{x}}^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{2\mu_{\mathfrak{y}}^2} = k^2, \tag{2}$$

worin k^2 eine positive Konstante bedeutet. Damit geht w über in

$$w = \frac{e^{-k^2}}{2\pi\,\mu_{\mathfrak{x}}\,\mu_{\mathfrak{y}}}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}. \tag{3}$$

Gibt man der Gleichung (2) die Form:

$$\left(\frac{\mathfrak{x}}{k\,\mu_{\mathfrak{x}}\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{y}}{k\,\mu_{\mathfrak{y}}\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \tag{4}$$

so erkennt man sie als die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse, deren Mittelpunkt im Schwerpunkte des beobachteten Punktsystems liegt und deren Halbachsen $A = k\,\mu_{\mathfrak{x}}\sqrt{2}$ und $B = k\,\mu_{\mathfrak{y}}\sqrt{2}$ in die Richtungen der Hauptachsen der Wahrscheinlichkeit fallen. Da das Verhältnis der Hauptachsen $A:B = \mu_{\mathfrak{x}} : \mu_{\mathfrak{y}}$ unverändert bleibt, wenn sich auch k ändert, so folgt, daß für verschiedene Wahrscheinlichkeiten die entsprechenden Ellipsen ähnlich sind, auch zueinander konzentrisch liegen und eine ähnliche Lage einnehmen. Die Ellipsen (4) werden

daher Ellipsen gleicher Wahrscheinlichkeit oder kurz Fehlerellipsen genannt. Alle auf einer Fehlerellipse liegenden Punkte haben sohin gleiche Wahrscheinlichkeit.

Die Fehlerellipsen sind Schnittkurven, welche entstehen, wenn die Wahrscheinlichkeitsfläche (3) durch eine zur $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene parallel laufende Ebene geschnitten wird. Sind die Genauigkeitsmaße in den Richtungen beider Koordinatenachsen gleich, so geht (4) in die Gleichung eines Kreises über, nämlich in

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = (k \mu \sqrt{2})^2,$$

und die Fehlerellipsen sind dann konzentrische Fehlerkreise.

Betrachtet man zwei ähnliche, ähnlich liegende und konzentrische Ellipsen mit den Parametern k und $k + dk$, so ergibt sich die Fläche des Ellipsenringes df durch Differentiation der ganzen Ellipsenfläche f nach k. Es ist $f = A B \pi = 2 \pi \mu_{\mathfrak{x}} \mu_{\mathfrak{y}} k^2$, somit

$$df = 4 \pi \mu_{\mathfrak{x}} \mu_{\mathfrak{y}} k \, dk$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt in den unendlich schmalen Ellipsenring von der Breite dk falle, nach (3):

$$\frac{e^{-k^2}}{2 \pi \mu_{\mathfrak{x}} \mu_{\mathfrak{y}}} \cdot df = 2 k e^{-k^2} dk,$$

folglich ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt außerhalb des Ellipsenringes falle,

$$W_a = 2 \int_k^{\infty} k e^{-k^2} dk = e^{-k^2}$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß er innerhalb dieses Ringes falle,

$$W_i = 1 - e^{-k^2}.$$

Da alle Punkte, welche auf der Peripherie einer Fehlerellipse liegen, gleichwahrscheinliche Lage haben, so können die Fehlerellipsen als ein geeignetes Mittel zur Genauigkeitsberechnung in der Bestimmung eines wiederholt eingemessenen Punktes dienen.

Unter allen möglichen Fehlerellipsen verdienen einige charakteristische Ellipsen eine besondere Hervorhebung. Diejenige Ellipse, für welche die äußere Wahrscheinlichkeit der inneren gleich kommt, wird die wahrscheinliche Fehlerellipse genannt. Für sie besteht, da beide Wahrscheinlichkeiten zusammen die Einheit bilden, die Bedingung:

$$W_a = W_i = e^{-k^2} = \frac{1}{2}.$$

Hieraus berechnet sich $k_\varrho = 0{\cdot}83255$, und hiemit

$$A_\varrho = k_\varrho \mu_x \sqrt{2} = 1{\cdot}17741\, \mu_x, \qquad B_\varrho = 1{\cdot}17741\, \mu_y.$$

Die wahrscheinliche Fehlerellipse hat solche Dimensionen, daß 50% aller Punktbestimmungen innerhalb und ebenso viele außerhalb derselben gesetzmäßig erwartet werden können.

Diejenige Ellipse, für welche die Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt in ihr Inneres falle, rund 68% beträgt, oder welche 68% aller Punktbestimmungen in sich gesetzmäßig fassen und 32% derselben ausschließen soll, kann im Sinne der Ausführungen im § 17 des 1. Bandes die mittlere Fehlerellipse genannt werden. Für sie ist

$$W_i = 1 - e^{-k_\mu^2} = 0{\cdot}68268, \qquad W_a = e^{-k_\mu^2} = 0{\cdot}31732$$

$$k_\mu = 1{\cdot}14784, \qquad A_\mu = 1{\cdot}62330\, \mu_x, \qquad B_\mu = 1{\cdot}62330\, \mu_y.$$

Analog definiert man die durchschnittliche Fehlerellipse als diejenige Grenzellipse, welche rund 58% sämtlicher Punktbestimmungen in sich gesetzmäßig einschließen und rund 42% ausschließen soll. Für dieselbe ist

$$W_i = 1 - e^{-k_\vartheta^2} = 0{\cdot}57506, \qquad W_a = e^{-k_\vartheta^2} = 0{\cdot}42494$$

$$k_\vartheta = 0{\cdot}92510, \qquad A_\vartheta = 1{\cdot}30829\, \mu_x, \qquad B_\vartheta = 1{\cdot}30829\, \mu_y.$$

Diejenige Ellipse, welche die Fläche 1 besitzt, nennt Bravais (1846) die Fundamentalellipse. Für sie gilt die Bedingung:

$$2\pi \mu_x \mu_y k_f^2 = 1.$$

Die Fläche der mit dem allgemeinen Parameter k versehenen Ellipse nimmt daher den Wert an:

$$f = \frac{k^2}{k_f^2},$$

wonach die äußere Wahrscheinlichkeit ausgedrückt werden kann durch

$$W_a = e^{-k_f^2 f}.$$

Hieraus ist zu ersehen, wie rasch die äußere Wahrscheinlichkeit mit der Vergrößerung der Fehlerellipse abnimmt.

Aus den Fehlerkomponenten $\pm \xi$ und $\pm \eta$ einer einzelnen Punktbestimmung ergibt sich der Totalfehler in der Punktlage nach dem pythagoräischen Lehrsatze aus $m^2 = \xi^2 + \eta^2$, folglich ist das Quadrat des mittleren Punktfehlers in der Ebene, wenn die Anzahl n der Punktbestimmungen „sehr groß“ vorausgesetzt wird und daher n für $n - 1$ gesetzt werden kann,

$$M^2 = \frac{[\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2]}{n} = \frac{h_\mathfrak{x} h_\mathfrak{y}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2)\, e^{-h_\mathfrak{x}^2 \mathfrak{x}^2 - h_\mathfrak{y}^2 \mathfrak{y}^2}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}.$$

Es sind aber die Quadrate der mittleren Fehlerkomponenten:

$$\mu_\mathfrak{x}^2 = \frac{[\mathfrak{x}^2]}{n} = \frac{h_\mathfrak{x}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{x}^2 e^{-h_\mathfrak{x}^2 \mathfrak{x}^2}\, d\mathfrak{x}$$

$$\mu_\mathfrak{y}^2 = \frac{[\mathfrak{y}^2]}{n} = \frac{h_\mathfrak{y}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{y}^2 e^{-h_\mathfrak{y}^2 \mathfrak{y}^2}\, d\mathfrak{y},$$

somit gilt für den mittleren Punktfehler der Satz:

$$M^2 = \mu_\mathfrak{x}^2 + \mu_\mathfrak{y}^2,$$

wonach der mittlere Fehler in der Punktbestimmung geometrisch dargestellt ist durch die Hypotenuse des aus den mittleren Koordinatenfehlern $\mu_\mathfrak{x}$ und $\mu_\mathfrak{y}$ als Katheten gebildeten rechtwinkeligen Dreiecks. Konstruiert man eine Fehlerellipse nach der Gleichung

$$\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mu_\mathfrak{x}}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{y}}{\mu_\mathfrak{y}}\right)^2 = 2\,k^2 = 1,$$

so erscheint der mittlere Punktfehler als Hypotenuse des aus den Halbachsen $A = \mu_\mathfrak{x}$ und $B = \mu_\mathfrak{y}$ gebildeten Dreiecks. Aus diesem Grunde hat Helmert (1868) diese Fehlerellipse, zu welcher der Parameter $k_z = \sqrt{0{\cdot}5} = 0{\cdot}70711$ gehört und für welche die Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt in ihr Inneres falle, gleich $W_i = 0{\cdot}39348$ ist, als „mittlere Fehlerellipse" bezeichnet; wir wollen sie aber, da über diesen Namen bereits anderwärtig verfügt wurde, und weil sie innerhalb aller übrigen charakteristischen Fehlerellipsen fällt, sowie mit Bezug auf die Analogie in der Mechanik nach Czuber (1891) als Zentralellipse benennen. Diese Bezeichnung ist dann voll gerechtfertigt, wenn der Koordinatenursprung auch wirklich mit dem Schwerpunkt des Punktsystems zusammenfällt; ist dies aber nicht der Fall, oder haben, in der Sprache der Fehlertheorie, die Fehler einen konstanten Teil (§ 6 des 1. Bandes), so tritt an die Stelle der Zentralellipse eine andere, auf den Koordinatenanfang bezogene Ellipse, welche in der Mechanik die Trägheitsellipse zum Analogon hat.

„Trägt man" (nach Czuber: Theorie der Beobachtungsfehler, S. 370) „auf jeder durch den Fehlerursprung laufenden Geraden von diesem aus eine Strecke derart ab, daß die Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ des Endpunktes, auf die Hauptachsen bezogen, der Gleichung

$$\mu_\mathfrak{x}^2 \mathfrak{x}^2 + \mu_\mathfrak{y}^2 \mathfrak{y}^2 = 1$$

genügen, so stellt dieselbe eine Ellipse mit den Hauptachsen der Wahrscheinlichkeit als Achsen dar. Es sind demnach die mittleren Quadrate der Projektionen des Fehlers auf beliebige durch den Fehlerursprung gezogene Geraden durch die reziproken Quadrate der zugehörigen Radien einer gewissen Ellipse dargestellt, für welche sich die Bezeichnung Ellipse der mittleren Fehler eignen würde." Demnach stellt diese Ellipse die um 90° gedrehte Zentralellipse vor.

Bezeichnet man die Hypotenuse des aus den Ellipsenhalbachsen gebildeten rechtwinkeligen Dreiecks mit

$$H = \sqrt{A^2 + B^2} = k\sqrt{2(\mu_x^2 + \mu_y^2)} = k\sqrt{2}\,M,$$

so hat man folgende übersichtliche Zusammenstellung:

Wahrscheinlichkeit W_i	Parameter k	Hypotenuse H	Bezeichnung
0·39348	0·70711	M	Zentralellipse
0·5	0·83255	1·17741 M	Wahrscheinliche Fehlerellipse
0·57506	0·92510	1·30829 M	Durchschnittliche Fehlerellipse
0·68268	1·14784	1·62330 M	Mittlere Fehlerellipse

§ 7. Bestimmung des Azimuts der Wahrscheinlichkeitshauptachsen.

Hat man zur Festlegung eines Punktes durch direkte Koordinatenmessung eine überschüssige Anzahl von Punktbestimmungen vorgenommen, die untereinander infolge verschiedener Fehlerursachen örtlich abweichen, und denkt man sich das ganze Punktsystem mit seinem Schwerpunkte zu Papier gebracht, so werden die Punktabstände von irgend einer durch den Schwerpunkt gehenden Geraden in ihrer algebraischen Summe den Wert Null ergeben, oder was auf dasselbe hinausläuft, es wird die Summe der Quadrate dieser Abstände ein Minimum sein, d. h. für jede andere, zu der ersteren parallel verschobene Gerade würde die betreffende Quadratsumme einen größeren Wert besitzen. Erfährt die durch den Schwerpunkt gehende Gerade eine Drehung, so wird, weil jetzt die normalen Punktabstände andere Werte erhalten, auch die Quadratsumme derselben in bezug auf die gedrehte Gerade sich ändern, sie wird aber im Vergleiche mit der Summe der Quadrate, welche sich auf parallel zu ihr verschobene Gerade beziehen, immer ein Minimum bleiben. Für irgend eine Lage der durch den Schwerpunkt gehenden Geraden muß daher das Minimum der Quadratsumme der Abstände am kleinsten, für eine andere Gerade am größten sein.

Um diese besonderen Lagen aufzusuchen, lege man dem Punktsystem ein rechtwinkeliges Koordinatensystem mit dem Ursprunge im Schwerpunkte T_0 zugrunde (Fig. 1, S. 14). Die Normalabstände ξ, η, der einzelnen Punkte von den Achsen $T_0\xi$ und $T_0\eta$ bedeuten dann die scheinbaren Koordinatenfehler. Wird das Achsenkreuz in seinem Ursprunge um den Winkel α gedreht, so daß es in die Lage $T_0\mathfrak{x}$ und $T_0\mathfrak{y}$ gelangt und bezeichnet man die Punktabstände von den gedrehten Achsen mit $\mathfrak{x}$, und $\mathfrak{y}$,, so bestehen für jeden einzelnen Punkt die Gleichungen:

$$\xi = \mathfrak{x} \cos\alpha - \mathfrak{y} \sin\alpha$$
$$\eta = \mathfrak{x} \sin\alpha + \mathfrak{y} \cos\alpha$$

und

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha \\ \mathfrak{y} &= -\xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Durch Summierung dieser allen Punktbestimmungen entsprechenden Gleichungen erhält man:

$$[\mathfrak{x}] = [\xi] \cos\alpha + [\eta] \sin\alpha = 0$$
$$[\mathfrak{y}] = -[\xi] \sin\alpha + [\eta] \cos\alpha = 0.$$

Werden die $\mathfrak{x}$ aus den Gleichungen (1) vor ihrer Summierung quadriert, so erhält man:

$$[\mathfrak{x}\mathfrak{x}] = [\xi\xi] \cos^2\alpha + [\xi\eta] \sin 2\alpha + [\eta\eta] \sin^2\alpha.$$

Um jenen Wert des veränderlichen Winkels α zu ermitteln, welcher $[\mathfrak{x}\mathfrak{x}]$ zu einem Extrem macht, setze man den Differentialquotienten dieser Summe nach α gleich Null. Es ergibt sich dann, wenn dieser besondere Winkel mit α_0 bezeichnet wird,

$$\frac{d[\mathfrak{x}\mathfrak{x}]}{d\alpha} = -2\,[\xi\xi] \cos\alpha_0 \sin\alpha_0 + 2\,[\xi\eta] \cos 2\alpha_0 + 2\,[\eta\eta] \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 = 0$$

$$tg\, 2\alpha_0 = \frac{2\,[\xi\eta]}{[\xi\xi] - [\eta\eta]}. \qquad (2)$$

Dasselbe Ergebnis bekommt man auch bei ähnlicher Behandlung der zweiten Gleichung von (1). Dividiert man Zähler und Nenner von (2) durch die Anzahl der überschüssigen Punktbestimmungen $n-1$, so kann man auch setzen:

$$tg\, 2\alpha_0 = \frac{2\,\mu^2_{\xi\eta}}{\mu^2_{\xi} - \mu^2_{\eta}}. \qquad (3)$$

Da die Koordinaten x, y, durch direkte Messung bekannt sind, so können die scheinbaren und mittleren Koordinatenfehler nach den Andeutungen des § 1, *a)* berechnet werden, nämlich

$$\xi = x - \frac{[x]}{n}, \qquad \eta = y - \frac{[y]}{n},$$

$$\mu_\xi^2 = \frac{[\xi\xi]}{n-1}, \qquad \mu_\eta^2 = \frac{[\eta\eta]}{n-1}, \qquad \mu_{\xi\eta} = \frac{[\xi\eta]}{n-1}.$$

Hiezu rechnet man nach (2) — oder nach (3) — das Achsenazimut α_0 und kann nun mit dessen Hilfe die extremen Werte der Fehlerquadratsummen bestimmen nach den Formeln

$$\left.\begin{aligned} [\mathfrak{x}\mathfrak{x}] &= [\xi\xi]\cos^2\alpha_0 + [\xi\eta]\sin 2\alpha_0 + [\eta\eta]\sin^2\alpha_0 \\ [\mathfrak{y}\mathfrak{y}] &= [\xi\xi]\sin^2\alpha_0 - [\xi\eta]\sin 2\alpha_0 + [\eta\eta]\cos^2\alpha_0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Mit diesen Werten erhält man die extremen mittleren Fehler:

$$\mu_{\mathfrak{x}}^2 = \frac{[\mathfrak{x}\mathfrak{x}]}{n-1}, \qquad \mu_{\mathfrak{y}}^2 = \frac{[\mathfrak{y}\mathfrak{y}]}{n-1},$$

womit die Halbachsen der Zentralellipse bestimmt sind.

Da der Gleichung (2) zufolge für $[\xi\eta] = 0$ der Winkel $\alpha_0 = 0$, sowie $[\mathfrak{x}\mathfrak{x}] = [\xi\xi]$ und $[\mathfrak{y}\mathfrak{y}] = [\eta\eta]$ wird, so ist die Erfüllung der Bedingung für das Verschwinden des nichtquadratischen Gliedes $[\xi\eta]$ das Kriterium dafür, daß die betreffenden Koordinatenachsen $T_0\xi$ und $T_0\eta$ bereits eine solche Lage besitzen, bei welcher $[\xi\xi]$ und $[\eta\eta]$ extreme Werte annehmen. Daß diese Achsen sodann mit den Hauptachsen der Wahrscheinlichkeit zusammenfallen, kann wie folgt bewiesen werden.

Nach der Gaußschen Definition ist das Quadrat des mittleren Fehlers in der Richtung der ξ-Achse bestimmt durch:

$$\mu_\xi^2 = \frac{h_\xi}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-h_\xi^2 \xi^2} d\xi = \frac{1}{2 h_\xi^2}.$$

Substituiert man hier für h_ξ^2 den im § 5, S. 18, abgeleiteten Wert

$$h_\xi^2 = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{2 a_{22}},$$

so erhält man

$$\mu_\xi^2 = \frac{a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, \qquad (5)$$

und analog

$$\mu_\eta^2 = \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}. \qquad (6)$$

Der Mittelwert des Produktes $\xi\eta$, der mit $\mu_{\xi\eta}$ bezeichnet wurde, ist bestimmt aus dem Integral

$$\mu_{\xi\eta} = K \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi\eta\, e^{-\frac{1}{2}(a_{11}\xi^2 + 2 a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2)} d\xi\, d\eta.$$

Zerlegt man den Exponenten von e in die zwei Glieder:

$$-\frac{1}{2}(a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2) = -\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{2a_{22}}\xi^2 - \frac{(a_{22}\eta + a_{12}\xi)^2}{2a_{22}}$$

und führt man für K seinen Wert aus § 5, S. 18 ein, so kann man auch schreiben:

$$\mu^2_{\xi\eta} = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi e^{-\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{2a_{22}}\xi^2}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\eta e^{-\frac{(a_{22}\eta+a_{12}\xi)^2}{2a_{22}}}d\eta.$$

Setzt man in dem zweiten Integral

$$\frac{a_{22}\eta + a_{12}\xi}{\sqrt{2a_{22}}} = t, \qquad \text{also} \quad \eta = \frac{t\sqrt{2a_{22}} - a_{12}\xi}{a_{22}}, \qquad d\eta = \sqrt{\frac{2}{a_{22}}}\,dt,$$

so wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\eta e^{-\frac{(a_{22}\eta+a_{12}\xi)^2}{2a_{22}}}d\eta = \sqrt{\frac{2}{a_{22}^3}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sqrt{2a_{22}}\,t - a_{12}\xi)e^{-t^2}dt = -\frac{a_{12}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a_{22}^3}}\xi$$

$$\mu^2_{\xi\eta} = -\sqrt{\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{2\pi a_{22}^3}}\,a_{12}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2 e^{-\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{2a_{22}}\xi^2}d\xi.$$

Es ist aber

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2 e^{-\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{2a_{22}}\xi^2}d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2 e^{-h_\xi^2\xi^2}d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2h_\xi^3} = \sqrt{\frac{2\pi a_{22}^3}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)^3}},$$

folglich

$$\mu^2_{\xi\eta} = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}. \tag{7}$$

Aus den Gleichungen (5), (6) und (7) ergibt sich durch Umkehrung:

$$a_{11} = \frac{\mu^2_\eta}{\mu^2_\xi\mu^2_\eta - \mu^2_{\xi\eta}}$$

$$a_{22} = \frac{\mu^2_\xi}{\mu^2_\xi\mu^2_\eta - \mu^2_{\xi\eta}}$$

$$a_{12} = \frac{-\mu^2_{\xi\eta}}{\mu^2_\xi\mu^2_\eta - \mu^2_{\xi\eta}}.$$

Durch Einführung der Werte von (5), (6) und (7) in die Formel (3) des § 7, S. 24 geht dieselbe über in:

$$tg\,2\alpha_0 = \frac{2\mu^2_{\xi\eta}}{\mu^2_\xi - \mu^2_\eta} = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}, \tag{8}$$

welche Formel mit (3) des § 4. S. 15 identisch ist. Damit ist bewiesen, daß diejenigen Achsen, für welche die Quadratsummen der Punktabstände Extreme sind, mit den Wahrscheinlichkeitshauptachsen zusammenfallen.

Legt man also umgekehrt die Hauptachsen als Koordinatenachsen zugrunde, so erhält man die Quadratsummen für ein anderes, um den Winkel α gedrehtes rechtwinkeliges Achsenpaar aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [\xi\xi] &= [\mathfrak{x}\mathfrak{x}]\cos^2\alpha + [\mathfrak{y}\mathfrak{y}]\sin^2\alpha \\ [\eta\eta] &= [\mathfrak{x}\mathfrak{x}]\sin^2\alpha + [\mathfrak{y}\mathfrak{y}]\cos^2\alpha \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

worin ein Glied mit $[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]$ nicht mehr vorkommt.

§ 8. Das räumliche Fehlergesetz.

Mit Berufung auf die ziemlich ausführlich entwickelte Theorie der Fehler in der Ebene sei hier der Vollständigkeit wegen auch eine gedrängte Darstellung des räumlichen Fehlergesetzes gegeben.

Sind x_i, y_i, z_i die durch direkte Messung erhaltenen, mit zufälligen Beobachtungsfehlern behafteten Koordinaten der mit gleicher Genauigkeit angestellten n Punktbestimmungen im Raume und X, Y, Z die wahren Werte der Koordinaten des zu bestimmenden Punktes, so sind deren wahrscheinlichste Werte:

$$x_0 = \frac{[x]}{n}, \qquad y_0 = \frac{[y]}{n}, \qquad z_0 = \frac{[z]}{n}. \quad (1)$$

Die scheinbaren Koordinatenfehler sind

$$\xi_i = x_i - x_0, \qquad \eta_i = y_i - y_0, \qquad \zeta_i = z_i - z_0, \quad (2)$$

wobei die Bedingungsgleichungen bestehen:

$$[\xi] = 0, \qquad [\eta] = 0, \qquad [\zeta] = 0. \quad (3)$$

Die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Zustandekommen der Fehlergruppen (2), welche durch das Produkt

$$W = \varphi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \cdot \varphi(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \cdot \cdot \cdot \varphi(\xi_n, \eta_n, \zeta_n)\,(d\xi\, d\eta\, d\zeta)^n$$

ausgedrückt ist, soll ein Maximum sein. Da $(d\xi\, d\eta\, d\zeta)^n$ einen konstanten Faktor darstellt, so kann man auch den Ausdruck

$$\Omega = lg\,\varphi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) + lg\,\varphi(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) + \cdots + lg\,\varphi(\xi_n, \eta_n, \zeta_n)$$

zu einem Maximum machen. In Ausführung dieser Operation erhält man mit Hinweis auf die entsprechende Entwicklung im § 3 die Bedingungsgleichungen:

$$\left[\frac{\partial\, lg\,\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi}\right] = 0, \qquad \left[\frac{\partial\, lg\,\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta}\right] = 0, \qquad \left[\frac{\partial\, lg\,\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta}\right] = 0. \quad (4)$$

Da diese Gleichungen mit den Bedingungen (3) gleichlautend sein sollen, so schließt man unter ähnlichen Erwägungen wie im § 3, daß die partiellen Differentialquotienten von (4) nach ξ, η beziehungsweise ζ konstant und die Funktionen (4) selbst linear sein müssen. Man darf daher setzen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\, lg\, \varphi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta \\
\frac{\partial\, lg\, \varphi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta \\
\frac{\partial\, lg\, \varphi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta
\end{aligned}\right| \qquad (5)$$

wobei $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$ ist. Folglich lautet das vollständige Differential der Funktion $lg\, \varphi(\xi, \eta, \zeta)$ mit Rücksicht auf (4) und (5):

$$\begin{aligned}
d\, lg\, \varphi(\xi, \eta, \zeta) = &(a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta)\, d\xi \\
+ &(a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta)\, d\eta \\
+ &(a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta)\, d\zeta,
\end{aligned}$$

woraus durch Integration (vgl. S. 13)

$$lg\, \varphi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{a_{11}}{2}\xi^2 + \frac{a_{22}}{2}\eta^2 + \frac{a_{33}}{2}\zeta^2 + a_{12}\xi\eta + a_{13}\xi\zeta + a_{23}\eta\zeta + C$$

oder

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = K\, e^{\frac{1}{2}(a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{12}\xi\eta + 2a_{13}\xi\zeta + 2a_{23}\eta\zeta)}$$

erhalten wird, durch welche Formel das Fehlergesetz im Raume dargestellt ist.

Der Ableitung dieser Formel liegt ein Koordinatensystem zugrunde, dessen Ursprung mit der wahrscheinlichsten Punktlage zusammenfällt und dessen zueinander senkrechte Achsen sonst eine beliebige Lage im Raume einnehmen. Erteilt man dem Koordinatensystem unter Beibehaltung seines Ursprunges im Raume eine ganz bestimmte, auf S. 32 näher präzisierte Drehung, wobei die ursprünglichen Koordinaten ξ, η, ζ in die transformierten Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ übergehen, so erreicht man das Wegfallen der nichtquadratischen Glieder im Exponenten von e. Hiedurch erhält das Fehlergesetz die Form

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = K\, e^{\frac{1}{2}(A_{11}\mathfrak{x}^2 + A_{22}\mathfrak{y}^2 + A_{33}\mathfrak{z}^2)},$$

und die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, daß ein durch rechtwinkelige Koordinaten eingemessener Punkt innerhalb des unendlich kleinen Parallelepipedes $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ falle, den Wert

$$w = \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = K e^{\frac{1}{2}(a_1 \xi^2 + a_2 \eta^2 + a_3 \zeta^2)}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Da die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers mit dem Anwachsen der Fehlergröße abnimmt, so müssen die Koeffizienten a notwendig negativ sein. Das Fehlergesetz erlangt hiedurch die Form

$$K e^{-\frac{1}{2}(a_1 \xi^2 + a_2 \eta^2 + a_3 \zeta^2)}.$$

Analog der im § 4, S. 15 erhaltenen Gleichung $d\xi\, d\eta = d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}$ läßt sich, wie aus der Theorie der Einführung neuer Variablen in ein dreifaches Integral hervorgeht, beweisen, daß auch die Beziehung $d\xi\, d\eta\, d\zeta = d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{z}$ besteht, so daß w übergeht in

$$w = K e^{-\frac{1}{2}(a_{\mathfrak{x}} \mathfrak{x}^2 + a_{\mathfrak{y}} \mathfrak{y}^2 + a_{\mathfrak{z}} \mathfrak{z}^2)}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{z}.$$

Um zur Kenntnis der Konstanten K zu gelangen, integriere man die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit w zwischen den nach allen drei Achsenrichtungen genommenen Grenzen von $-\infty$ bis $+\infty$; dann ist, weil es gewiß ist, daß der eingemessene Punkt irgendwo im unendlichen Raume sich befinden muß,

$$K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_{\mathfrak{x}}^2 \mathfrak{x}^2}\, d\mathfrak{x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_{\mathfrak{y}}^2 \mathfrak{y}^2}\, d\mathfrak{y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_{\mathfrak{z}}^2 \mathfrak{z}^2}\, d\mathfrak{z} = K \frac{(\sqrt{\pi})^3}{h_{\mathfrak{x}} h_{\mathfrak{y}} h_{\mathfrak{z}}} = 1,$$

folglich

$$K = \frac{h_{\mathfrak{x}} h_{\mathfrak{y}} h_{\mathfrak{z}}}{\sqrt{\pi^3}}$$

und das Fehlergesetz lautet in seiner endgültigen Form:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{h_{\mathfrak{x}} h_{\mathfrak{y}} h_{\mathfrak{z}}}{\sqrt{\pi^3}} e^{-(h_{\mathfrak{x}}^2 \mathfrak{x}^2 + h_{\mathfrak{y}}^2 \mathfrak{y}^2 + h_{\mathfrak{z}}^2 \mathfrak{z}^2)},$$

worin $h_{\mathfrak{x}}$, $h_{\mathfrak{y}}$, $h_{\mathfrak{z}}$ die Bedeutung von Genauigkeitsmaßen in den Richtungen der drei Koordinatenachsen besitzen. Man kann daher auch, wenn $\mu_{\mathfrak{x}}$, $\mu_{\mathfrak{y}}$, $\mu_{\mathfrak{z}}$ die mittleren Koordinatenfehler bedeuten, mit Rücksicht auf die Beziehungen

$$h_{\mathfrak{x}} = \frac{1}{\mu_{\mathfrak{x}} \sqrt{2}}, \qquad h_{\mathfrak{y}} = \frac{1}{\mu_{\mathfrak{y}} \sqrt{2}}, \qquad h_{\mathfrak{z}} = \frac{1}{\mu_{\mathfrak{z}} \sqrt{2}}$$

das Fehlergesetz in folgender Weise schreiben:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{8 \pi^3}\, \mu_{\mathfrak{x}} \mu_{\mathfrak{y}} \mu_{\mathfrak{z}}} e^{-\left(\frac{\mathfrak{x}^2}{2\mu_{\mathfrak{x}}^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{2\mu_{\mathfrak{y}}^2} + \frac{\mathfrak{z}^2}{2\mu_{\mathfrak{z}}^2}\right)}.$$

Setzt man

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{2\mu_{\mathfrak{x}}^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{2\mu_{\mathfrak{y}}^2} + \frac{\mathfrak{z}^2}{2\mu_{\mathfrak{z}}^2} = \lambda^2. \qquad (6)$$

also

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{e^{-k^2}}{\sqrt{8\pi^3 \mu_x \mu_y \mu_z}}, \tag{7}$$

worin k eine beliebige Konstante bezeichnet, so haben alle Punkte, deren Koordinaten die Gleichung (6) befriedigen, dieselbe Wahrscheinlichkeit und liegen auf einer Fläche, deren Gleichung durch (6) gegeben ist. Läßt man den Parameter k variieren, so erhält man eine Schar von ähnlichen, konzentrischen und ähnlich liegenden Flächen, welche Ellipsoide darstellen und daher Flächen gleicher Wahrscheinlichkeit oder Fehlerellipsoide heißen. Ihre Halbachsen sind:

$$A = k\mu_x\sqrt{2}, \qquad B = k\mu_y\sqrt{2}, \qquad C = k\mu_z\sqrt{2}.$$

Sind die Genauigkeitsmaße nach allen Richtungen gleich, so geht (6) in die Gleichung einer Kugeloberfläche über, nämlich

$$x^2 + y^2 + z^2 = (k\mu\sqrt{2})^2.$$

Man kann nun den ganzen Raum durch Fehlerellipsoide derart abteilen, daß die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Punktes innerhalb eines Ellipsoides zu der Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Punktes außerhalb dieses Ellipsoides in einem bestimmten Verhältnisse zu stehen kommt. Ist v das Volumen des Ellipsoides (6), dv die Volumänderung desselben bei der Änderung des Parameters k um dk, so daß also dv das Volumen der von den Ellipsoiden k^2 und $(k+dk)^2$ gebildeten Schale darstellt, so ist

$$v = \frac{4}{3}\pi k^3 \mu_x \mu_y \mu_z \sqrt{8},$$

$$dv = 4\sqrt{8}\,\pi\,\mu_x \mu_y \mu_z\, k^2\, dk$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt in die unendlich dünne Ellipsoidschale von der Dicke dk falle, mit Rücksicht auf (7),

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta)\, dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} k^2 e^{-k^2} dk,$$

folglich ist die innere Wahrscheinlichkeit für das Ellipsoid k:

$$W_i = \int_0 \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^k k^2 e^{-k^2} dk = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^k e^{-k^2} dk - \frac{2}{\sqrt{\pi}} k e^{-k^2}$$

und die äußere Wahrscheinlichkeit $W_a = 1 - W_i$.

Czuber hat in seiner „Theorie der Beobachtungsfehler“, S. 404, einige Werte von W_i angeführt, die wir hier wiedergeben wollen:

k	W_i	k	W_i	k	W_i	k	W_i
0·1	0·0014	0·6	0·2181	1·2	0·7011	2·2	0·9977
0·2	0·0107	0·7	0·3108	1·4	0·8824	2·4	0·9994
0·3	0·0344	0·8	0·4108	1·6	0·9469	2·6	0·9999
0·4	0·0767	0·9	0·5119	1·8	0·9790	2·8	0·9999
0·5	0·1384	1·0	0·6084	2·0	0·9926	3·0	0·9999

Dasjenige Fehlerellipsoid, für welches $W_a = W_i = \frac{1}{2}$ ist, wird das wahrscheinliche Fehlerellipsoid genannt; es ist durch den speziellen Parameter $k_0 = 0·88807$ bestimmt. Seine Halbachsen sind daher:

$$A_0 = k_0 \mu_{\mathfrak{x}} \sqrt{2} = 1·2559\, \mu_{\mathfrak{x}}, \qquad B_0 = 1·2559\, \mu_{\mathfrak{y}}, \qquad C_0 = 1·2559\, \mu_{\mathfrak{z}}.$$

Der Parameter des mittleren Fehlerellipsoides ist bestimmt durch die Gleichung $W_i = 0·68268$ und derjenige des durchschnittlichen Fehlerellipsoides durch $W_i = 0·57506$. Dasjenige Ellipsoid, welches das Volumen 1 besitzt, führt nach Bravais den Namen Fundamentalellipsoid; dessen Parameter ist bestimmt aus der Gleichung

$$\frac{8\sqrt{2}}{3} \pi k^3 \mu_{\mathfrak{x}} \mu_{\mathfrak{y}} \mu_{\mathfrak{z}} = 1.$$

Das Ellipsoid mit den Halbachsen $\mu_{\mathfrak{x}}$, $\mu_{\mathfrak{y}}$, $\mu_{\mathfrak{z}}$ sei das Zentralellipsoid genannt. Es ist charakterisiert durch die Länge der halben Diagonale des Achsenparallelepipeds, welche dem mittleren Punktfehler

$$M = \sqrt{\mu_{\mathfrak{x}}^2 + \mu_{\mathfrak{y}}^2 + \mu_{\mathfrak{z}}^2}$$

gleich kommt. Die Gleichung des Zentralellipsoids lautet:

$$\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mu_{\mathfrak{x}}}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{y}}{\mu_{\mathfrak{y}}}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{z}}{\mu_{\mathfrak{z}}}\right)^2 = 2 k_z^2 = 1,$$

woraus sich der Parameter $k_z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ergibt. Bezeichnet man die räumliche Hypotenuse der drei Halbachsen mit

$$H = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = k\sqrt{2(\mu_{\mathfrak{x}}^2 + \mu_{\mathfrak{y}}^2 + \mu_{\mathfrak{z}}^2)} = k\sqrt{2}\, M,$$

so hat man folgende Zusammenstellung:

W	[illegible]	[illegible]	Bezeichnung
0·3179	0·7071	M	Zentralellipsoid
0·5	0·8881	1·2559 M	wahrscheinliches Fehlerellipsoid
0·5751	0·9654	1·2653 M	durchschnittliches Fehlerellipsoid
0·6827	1·1603	1·6409 M	mittleres Fehlerellipsoid

Es erübrigt noch die Bestimmung der Richtungen der Fehlerellipsoidachsen. Damit aus dem Exponenten von e des räumlichen Fehlergesetzes die Produkte der Variabeln verschwinden, hat man dem Koordinatensystem eine Drehung um den Koordinatenursprung U zu erteilen, so daß die ursprünglichen Achsen mit den Ellipsoidhauptachsen zusammenfallen, wobei die ursprünglichen Koordinaten ξ, η, ζ in die neuen Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ transformiert werden.

Bezeichnet man die Richtungskosinus der neuen Achsen $U\mathfrak{x}$, $U\mathfrak{y}$, $U\mathfrak{z}$ in bezug auf die ursprünglichen Achsen $U\xi$, $U\eta$, $U\zeta$ der Reihe nach mit

$$\alpha_{\mathfrak{x}},\ \beta_{\mathfrak{x}},\ \gamma_{\mathfrak{x}}, \qquad \alpha_{\mathfrak{y}},\ \beta_{\mathfrak{y}},\ \gamma_{\mathfrak{y}}, \qquad \alpha_{\mathfrak{z}},\ \beta_{\mathfrak{z}},\ \gamma_{\mathfrak{z}}, \tag{8}$$

so bestehen nach der analytischen Geometrie des Raumes die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{\mathfrak{x}}^2 + \beta_{\mathfrak{x}}^2 + \gamma_{\mathfrak{x}}^2 &= 1 \\ \alpha_{\mathfrak{y}}^2 + \beta_{\mathfrak{y}}^2 + \gamma_{\mathfrak{y}}^2 &= 1 \\ \alpha_{\mathfrak{z}}^2 + \beta_{\mathfrak{z}}^2 + \gamma_{\mathfrak{z}}^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \ (9) \qquad \text{und} \qquad \left.\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \alpha_{\mathfrak{x}}\,\xi + \beta_{\mathfrak{x}}\,\eta + \gamma_{\mathfrak{x}}\,\zeta \\ \mathfrak{y} &= \alpha_{\mathfrak{y}}\,\xi + \beta_{\mathfrak{y}}\,\eta + \gamma_{\mathfrak{y}}\,\zeta \\ \mathfrak{z} &= \alpha_{\mathfrak{z}}\,\xi + \beta_{\mathfrak{z}}\,\eta + \gamma_{\mathfrak{z}}\,\zeta \end{aligned}\right\} \ (10)$$

Bildet man die Summe der Quadrate der Gleichungen (10), so erhält man z. B. für die erste derselben:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{x}\mathfrak{x}] = \alpha_{\mathfrak{x}}^2[\xi\xi] + \beta_{\mathfrak{x}}^2[\eta\eta] + \gamma_{\mathfrak{x}}^2[\zeta\zeta] + 2\,\alpha_{\mathfrak{x}}\beta_{\mathfrak{x}}[\xi\eta] + \\ + 2\,\alpha_{\mathfrak{x}}\gamma_{\mathfrak{x}}[\xi\zeta] + 2\,\beta_{\mathfrak{x}}\gamma_{\mathfrak{x}}[\eta\zeta]. \end{aligned} \tag{11}$$

Soll nun $[\mathfrak{x}\mathfrak{x}]$ bei Erfüllung der Bedingungen (9) einen extremen Wert erlangen, so müssen die Richtungskosinus solche Werte annehmen, daß die Funktion

$$[\mathfrak{x}\mathfrak{x}] - \lambda\,(\alpha_{\mathfrak{x}}^2 + \beta_{\mathfrak{x}}^2 + \gamma_{\mathfrak{x}}^2)$$

ein absolutes Maximum oder Minimum wird (§ 54 des 1. Bandes); es müssen daher die Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} \{[\xi\xi] - \lambda\}\,\alpha_{\mathfrak{x}} + [\xi\eta]\,\beta_{\mathfrak{x}} + [\xi\zeta]\,\gamma_{\mathfrak{x}} &= 0 \\ [\xi\eta]\,\alpha_{\mathfrak{x}} + \{[\eta\eta] - \lambda\}\,\beta_{\mathfrak{x}} + [\eta\zeta]\,\gamma_{\mathfrak{x}} &= 0 \\ [\xi\zeta]\,\alpha_{\mathfrak{x}} + [\eta\zeta]\,\beta_{\mathfrak{x}} + \{[\zeta\zeta] - \lambda\}\,\gamma_{\mathfrak{x}} &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus können die Unbekannten $\alpha_\mathfrak{r}$, $\beta_\mathfrak{r}$, $\gamma_\mathfrak{r}$ berechnet werden, wenn der hier eingeführte Multiplikator λ aus der kubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} [\xi\xi]-\lambda & [\xi\eta] & [\xi\zeta] \\ [\xi\eta] & [\eta\eta]-\lambda & [\eta\zeta] \\ [\xi\zeta] & [\eta\zeta] & [\zeta\zeta]-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\{[\xi\xi]-\lambda\}\{[\eta\eta]-\lambda\}\{[\zeta\zeta]-\lambda\}+2[\xi\eta][\xi\zeta][\eta\zeta]=\{[\xi\xi]-\lambda\}[\eta\zeta]^2+$$
$$+\{[\eta\eta]-\lambda\}[\xi\zeta]^2+\{[\zeta\zeta]-\lambda\}[\xi\eta]^2$$

vorerst ermittelt wird, wobei die drei Wurzeln dieser Gleichung den drei Wertsystemen (8) entsprechen*). Substituiert man diese so zu erlangenden Kosinus in (11), so erhält man $[\mathfrak{x}\mathfrak{x}]$ und in ähnlicher Weise $[\mathfrak{y}\mathfrak{y}]$ und $[\mathfrak{z}\mathfrak{z}]$, womit die mittleren Koordinatenfehler in den Richtungen der Hauptachsen berechnet werden können, nämlich

$$\mu_\mathfrak{x}=\sqrt{\frac{[\mathfrak{x}\mathfrak{x}]}{n-1}}, \qquad \mu_\mathfrak{y}=\sqrt{\frac{[\mathfrak{y}\mathfrak{y}]}{n-1}}, \qquad \mu_\mathfrak{z}=\sqrt{\frac{[\mathfrak{z}\mathfrak{z}]}{n-1}}.$$

B. Vermittelnde Beobachtungen.

§ 9. Analogie zwischen Schwerpunkt und Kernpunkt.

Die bisher angestellten Untersuchungen haben zunächst nur unter der Annahme Geltung, daß der wahrscheinlichste Ort der beobachteten Punkte der Schwerpunkt sei. Betrachten wir jetzt den Fall, daß die wahrscheinlichste Punktlage durch den Kernpunkt eines Strahlensystems bestimmt sei, so sind wir zunächst vor die Aufgabe gestellt, zu beweisen, daß bei der Veränderlichkeit der Koeffizienten der Fehlergleichungen

$$a_i x+b_i y+l_i=v_i, \qquad (i=1 \text{ bis } n)$$

mit der Lageänderung des Koordinatensystems und der hiedurch bedingten Änderung der mittleren Koordinatenfehler (§ 47 des 1. Bandes)

$$\mu_x=\frac{\mu_0}{\sqrt{g_x}}=\frac{\mu_0}{\sqrt{[aa.1]}}=\mu_0\sqrt{\frac{[bb]}{[aa][bb]-[ab]^2}}$$
$$\mu_y=\frac{\mu_0}{\sqrt{g_y}}=\frac{\mu_0}{\sqrt{[bb.1]}}=\mu_0\sqrt{\frac{[aa]}{[aa][bb]-[ab]^2}}$$

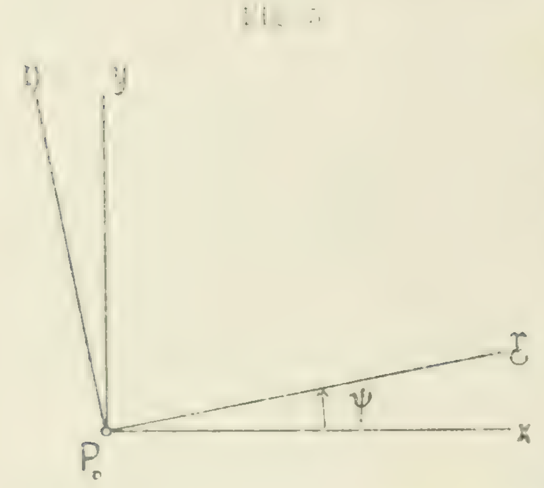
der totale mittlere Punktfehler

*) Vgl. Czuber: „Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung", 2. Aufl., 1. Bd., S. 324 und 325. (Bestimmung der extremen Werte der Durchmesser einer Fläche zweiter Ordnung.)

$$M = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2} = \mu \sqrt{\frac{[aa] + [bb]}{[aa][bb] - [ab]^2}} \tag{1}$$

[illegible] unabhängig bleibt. Um dies zu beweisen, vollziehen wir eine Drehung des Achsenkreuzes, dessen Ursprung in den Kernpunkt P_0 verlegt sei, um den Winkel ψ (Fig. 5). Es gelten dann zwischen den alten und neuen Punktkoordinaten beziehungsweise deren Korrekturen x, y und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die Beziehungen:

Fig. 5.



$$x = \mathfrak{x}\cos\psi - \mathfrak{y}\sin\psi$$
$$y = \mathfrak{x}\sin\psi + \mathfrak{y}\cos\psi$$

Da die Koeffizienten der Fehlergleichungen durch diese Transformation übergehen in

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a} &= a\cos\psi + b\sin\psi \\ \mathfrak{b} &= -a\sin\psi + b\cos\psi \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und die Fehlergleichungen selbst in

$$\mathfrak{a}_i\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_i\mathfrak{y} + l_i = v_i, \qquad (i = 1 \text{ bis } n),$$

so erhält der mittlere Punktfehler die Form

$$\mathfrak{M} = \mu_0 \sqrt{\frac{[\mathfrak{a}\mathfrak{a}] + [\mathfrak{b}\mathfrak{b}]}{[\mathfrak{a}\mathfrak{a}][\mathfrak{b}\mathfrak{b}] - [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]^2}}. \tag{3}$$

Hierin ist mit Rücksicht auf (2):

$$\left.\begin{aligned} [\mathfrak{a}\mathfrak{a}] &= [aa]\cos^2\psi + 2[ab]\sin\psi\cos\psi + [bb]\sin^2\psi \\ [\mathfrak{b}\mathfrak{b}] &= [aa]\sin^2\psi - 2[ab]\sin\psi\cos\psi + [bb]\cos^2\psi \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = [ab]\cos^2\psi - [aa]\sin\psi\cos\psi + [bb]\sin\psi\cos\psi - [ab]\sin^2\psi. \tag{5}$$

Bildet man die Summe der beiden Gleichungen (4),

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{a}] + [\mathfrak{b}\mathfrak{b}] = [aa] + [bb], \tag{6}$$

so erkennt man die Gleichheit der Zähler in (1) und (3). Bildet man den Ausdruck

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{a}][\mathfrak{b}\mathfrak{b}] - [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]^2 = ([aa][bb] - [ab]^2)(\sin^4\psi + 2\sin^2\psi\cos^2\psi + \cos^4\psi),$$

so macht man, da der letzte Faktor gleich 1 ist, die Wahrnehmung, daß auch die Nenner in (1) und (3) gleich sind, folglich ist

$$\mathfrak{M} = M.$$

d. h. der mittlere Punktfehler ist ein von der Lage des Koordinatensystems unabhängiges Genauigkeitsmaß, was von den Fehlerkomponenten μ_x, μ_y nicht behauptet werden kann. Sind letztere aber vom Drehungswinkel v abhängig, so muß es irgend eine Lage des Achsenkreuzes geben, bei welcher die Fehlerkomponenten ihr Maximum und Minimum erreichen. Zur Ermittlung des betreffenden Drehungswinkels v_0 differenziere man die veränderlichen Zähler der für die transformierten Achsen geltenden Werte der mittleren Koordinatenfehler, nämlich die Zähler von

$$\mu_x^2 = \frac{[\mathfrak{b}\mathfrak{b}]}{[aa][bb] - [ab]^2}\mu^2, \qquad \mu_y^2 = \frac{[\mathfrak{a}\mathfrak{a}]}{[aa][bb] - [ab]^2}\mu^2 \tag{7}$$

oder die Summen in (4) nach v und setze die erhaltenen Differentialquotienten gleich Null. Dadurch erhält man

$$\frac{d\,[\mathfrak{a}\mathfrak{a}]}{dv} = -([aa] - [bb])\sin 2v_0 - 2\,[ab]\cos 2v_0 = 0$$

$$\frac{d\,[\mathfrak{b}\mathfrak{b}]}{dv} = ([aa] - [bb])\sin 2v_0 - 2\,[ab]\cos 2v_0 = 0$$

$$tg\,2v_0 = \frac{2\,[ab]}{[aa] - [bb]}. \tag{8}$$

Aus dem hier eingeschlagenen Entwicklungsgange erkennt man, daß jene Achsen, welche μ_x, μ_y zu extremen Werten (μ_u, μ_v) machen, mit den Hauptachsen der Zentralellipse zusammenfallen, deren Mittelpunkt in dem Kernpunkte zu liegen kommt. Die Formel (8) hat daher mit der Formel (8) des § 7, S. 25 gleiche Bedeutung. Denn multipliziert man Zähler und Nenner von (7) mit $\frac{\mu^2}{[aa][bb] - [ab]^2}$, so erhält man, wenn nach (17), § 47 des I. Bandes, S. 1[illegible]4,

$$q_{xy} = [ab] - \frac{[aa][bb]}{[ab]} = [ab.1]$$

und

$$\mu_{xy} = \frac{\mu_0}{\sqrt{q_{xy}}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{[ab.1]}} = \mu_0\sqrt{\frac{[ab]}{[ab]^2 - [aa][bb]}}$$

gesetzt wird, mit Rücksicht auf die obigen Formeln für μ_x, μ_y (S. [illegible]) die Gleichung:

$$tg\,2v_0 = \frac{2\,\mu_{xy}^2}{\mu_x^2 - \mu_y^2}, \tag{9}$$

welche mit der entsprechenden Formel (8) des § 7 für den Schwerpunkt:

$$tg\,2\,\varepsilon_0 = \frac{2\,\mu^2_{\xi\eta}}{\mu^2_\xi - \mu^2_\eta}$$

wohl dieselbe Form und Bedeutung hat, aber mit derselben nicht auch inhaltsgleich ist, weil in der Formel für den Schwerpunkt die mittleren Fehler

$$\mu^2_\xi = \frac{[\xi\,\xi]}{n-1}, \qquad \mu^2_\eta = \frac{[\eta\,\eta]}{n-1}, \qquad \mu^2_{\xi\eta} = \frac{[\xi\,\eta]}{n-1}$$

wohl gleiche Bedeutung, aber nicht dieselben Werte besitzen, wie die mittleren Fehler in der Formel für den Kernpunkt:

$$\mu^2_x = \frac{\mu^2_0}{[a\,a\,.\,1]}, \qquad \mu^2_y = \frac{\mu^2_0}{[b\,b\,.\,1]}, \qquad \mu^2_{xy} = \frac{\mu^2_0}{[a\,b\,.\,1]}.$$

Um für die Berechnung der auf die Richtungen der Hauptachsen der Fehlerellipsen bezogenen mittleren Koordinatenfehler bequeme Formeln zu erhalten, substituiere man die Werte von (4) in (7), so daß, wenn zur Abkürzung mit D die Koeffizienten-Determinante

$$D = [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]$$

bezeichnet wird, geschrieben werden kann:

$$\frac{\mu^2_{\mathfrak{x}}}{\mu^2_0}\,D = [\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}] = [a\,a]\,sin^2\,\psi_0 - [a\,b]\,sin\,2\,\psi_0 + [b\,b]\,cos^2\,\psi_0$$

$$\frac{\mu^2_{\mathfrak{y}}}{\mu^2_0}\,D = [\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}] = [a\,a]\,cos^2\,\psi_0 + [a\,b]\,sin\,2\,\psi_0 + [b\,b]\,sin^2\,\psi_0.$$

Führt man hier nach (8) das Azimut ψ_0 ein, indem gesetzt wird:

$$cos\,2\,\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\,2\,\psi_0}} = \frac{[a\,a] - [b\,b]}{\sqrt{([a\,a] - [b\,b])^2 + 4\,[a\,b]^2}} = \frac{[a\,a] - [b\,b]}{W}$$

$$sin\,2\,\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + cotg^2\,2\,\psi_0}} = \frac{2\,[a\,b]}{\sqrt{([a\,a] - [b\,b])^2 + 4\,[a\,b]^2}} = \frac{2\,[a\,b]}{W}$$

$$cos^2\,\psi_0 = \frac{1 + cos\,2\,\psi_0}{2} = \frac{W + [a\,a] - [b\,b]}{2\,W}$$

$$sin^2\,\psi_0 = \frac{1 - cos\,2\,\psi_0}{2} = \frac{W - [a\,a] + [b\,b]}{2\,W}$$

$$[\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}] = \frac{[a\,a] + [b\,b] + W}{2} \qquad [\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}] = \frac{[a\,a] + [b\,b] - W}{2},$$

so resultiert endlich:

$$\mu_{\mathfrak{x}}^2 = \mu_0^2 \frac{[aa] + [bb] - W}{2D}, \qquad \mu_{\mathfrak{y}}^2 = \mu_0^2 \frac{[aa] + [bb] + W}{2D}$$

$$M^2 = \mu_{\mathfrak{x}}^2 + \mu_{\mathfrak{y}}^2 = \mu_0^2 \frac{[aa] + [bb]}{D}.$$

Da zwischen den mittleren Koordinatenfehlern und ihren extremen Werten die Beziehungen bestehen:

$$\mu_x^2 = \frac{\mu_0^2}{D}[bb] \qquad \mu_y^2 = \frac{\mu_0^2}{D}[aa]$$

$$\mu_{\mathfrak{x}}^2 = \frac{\mu_0^2}{D}[\mathfrak{b}\mathfrak{b}] \qquad \mu_{\mathfrak{y}}^2 = \frac{\mu_0^2}{D}[\mathfrak{a}\mathfrak{a}],$$

so folgt:

$$\mu_{\mathfrak{x}} = \mu_x \sqrt{\frac{[\mathfrak{b}\mathfrak{b}]}{[bb]}} \qquad \mu_{\mathfrak{y}} = \mu_y \sqrt{\frac{[\mathfrak{a}\mathfrak{a}]}{[aa]}}.$$

Für den Winkel v_0 ergeben sich aus (8) zwei Paare von Lösungen:

$$v_0,\ v_0 + 90^0 \text{ beziehungsweise } v_0 + 180^0,\ v_0 + 270^0,$$

wovon eines dem Minimum und das um 90^0 verschiedene dem Maximum des einen oder des anderen Koordinatenfehlers entspricht, und zwar dient zur Entscheidung hierüber die Regel, daß bei stets positiv genommenem Wurzelausdrucke W das Minimum zu v_0 und das Maximum zu $v_0 + 90^0$ gehört. In welchem Quadranten $2v_0$ zu liegen kommt, richtet sich nach der folgenden schematisch dargestellten Vorzeichenanordnung im Zähler und Nenner des Bruches (8):

$$\mathrm{I} = \frac{+}{+}, \qquad \mathrm{II} = \frac{+}{-}, \qquad \mathrm{III} = \frac{-}{-}, \qquad \mathrm{IV} = \frac{-}{+}.$$

Dieselben Regeln gelten auch bei der Formel (8) des § 7 für den Schwerpunkt.

Nicht unerwähnt mag bleiben, daß in der Formel (8) dieses Paragraphen statt der Koeffizienten der Normalgleichungen auch die Gewichtskoeffizienten eingeführt werden können. Setzt man nach (17) des § 47, I. Band, S. 184:

$$+[aa] = [\beta\beta]\,D$$
$$-[ab] = [\alpha\beta]\,D$$
$$+[bb] = [\alpha\alpha]\,D,$$

so erhält (8) die Form:

$$tg\,2v_0 = \frac{2[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha] - [\beta\beta]}.$$

§ 10. Die Pedale der Ellipse.

Sind in Fig. 6 $T_0\xi$ und $T_0\eta$ die der Berechnung und Ausgleichung direkter Beobachtungen nach dem Prinzip des Schwerpunktes zugrunde gelegten Koordinatenachsen, und entsprechen die zugeordneten mittleren Koordinatenfehler den Achsenstücken

$$T_0 V = \mu_\xi = \sqrt{\frac{[\xi\xi]}{n-1}} \qquad T_0 W = \mu_\eta = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-1}};$$

und ferner die um irgend einen Winkel α gedrehten Achsen $T_0\xi'$ und $T_0\eta'$ und die zugehörigen mittleren Koordinatenfehler

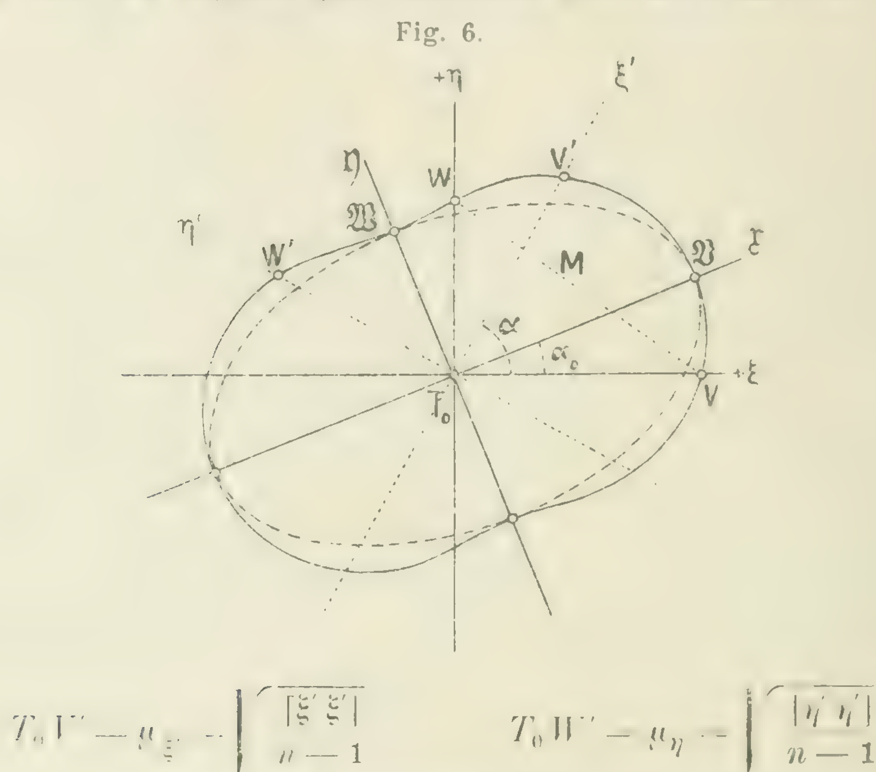


Fig. 6.

$$T_0 V' = \mu_{\xi'} = \sqrt{\frac{[\xi'\xi']}{n-1}} \qquad T_0 W' = \mu_{\eta'} = \sqrt{\frac{[\eta'\eta']}{n-1}}$$

und endlich die um den ausgezeichneten Winkel α_0 gedrehten, mit den Hauptachsen der Zentralellipse zusammenfallenden Achsen $T_0\mathfrak{x}$ und $T_0\mathfrak{y}$ und die entsprechenden mittleren Koordinatenfehler

$$T_0\mathfrak{B} = \mu_\mathfrak{x} = \sqrt{\frac{[\mathfrak{x}\mathfrak{x}]}{n-1}} \qquad T_0\mathfrak{W} = \mu_\mathfrak{y} = \sqrt{\frac{[\mathfrak{y}\mathfrak{y}]}{n-1}},$$

so ist der von der Lage des Koordinatensystems unabhängige mittlere Punktfehler:

$$M = \overline{VW} = \overline{V'W'} = \overline{\mathfrak{B}\mathfrak{W}}.$$

Dividiert man die Gleichungen (9), § 7, S. 27 durch $n-1$, so erhält man für $\alpha = \alpha_0$:

$$\left.\begin{aligned} \mu_\xi^2 &= \mu_\mathfrak{x}^2 \cos^2\alpha_0 + \mu_\mathfrak{y}^2 \sin^2\alpha_0 \\ \mu_\eta^2 &= \mu_\mathfrak{x}^2 \sin^2\alpha_0 + \mu_\mathfrak{y}^2 \cos^2\alpha_0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Addiert man diese Gleichungen, so entsteht das bereits bekannte Resultat:

$$M^2 = \mu_\xi^2 + \mu_\eta^2 = \mu_x^2 + \mu_y^2 \qquad (2)$$

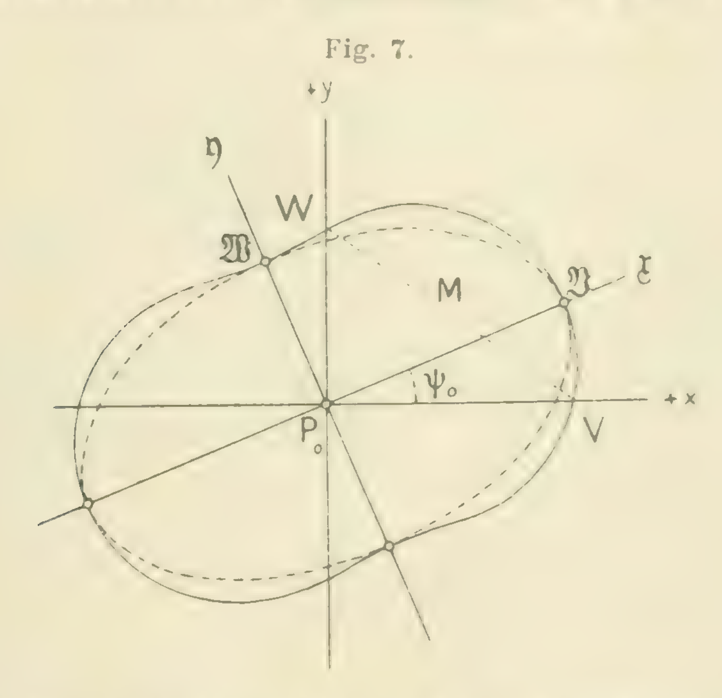
oder

$$M = \sqrt{\frac{[\xi\xi] + [\eta\eta]}{n-1}} = \sqrt{\frac{[\mathfrak{x}\mathfrak{x}] + [\mathfrak{y}\mathfrak{y}]}{n-1}}\,.$$

Dasselbe besagt, daß die mittleren Koordinatenfehler in bezug auf irgend zwei zu einander senkrechte Achsen die Katheten von rechtwinkeligen Dreiecken bilden, deren Hypotenusen eine konstante Länge besitzen.

Dieselben Verhältnisse bestehen auch für den Fall der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen nach dem Prinzip des

Fig. 7.



Kernpunktes. Nur tritt dann, wie in Fig. 7 dargestellt, an die Stelle des Schwerpunktes T_0 der Kernpunkt P_0 und es erhalten die oben erwähnten Elemente folgende Bedeutung:

$$P_0 V = \mu_x = \mu_0 \sqrt{\frac{[bb]}{D}} \qquad P_0 W = \mu_y = \mu_0 \sqrt{\frac{[aa]}{D}}$$

$$P_0 \mathfrak{V} = \mu_\xi = \mu_0 \sqrt{\frac{[\mathfrak{b}\mathfrak{b}]}{D}} \qquad P_0 \mathfrak{W} = \mu_\eta = \mu_0 \sqrt{\frac{[\mathfrak{a}\mathfrak{a}]}{D}}$$

$$\left.\begin{aligned} \mu_x^2 &= \mu_\xi^2 \cos^2\psi_0 + \mu_\eta^2 \sin^2\psi_0 \\ \mu_y^2 &= \mu_\xi^2 \sin^2\psi_0 + \mu_\eta^2 \cos^2\psi_0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$M^2 = \mu_x^2 + \mu_y^2 = \mu_\xi^2 + \mu_\eta^2 \qquad (4)$$

oder

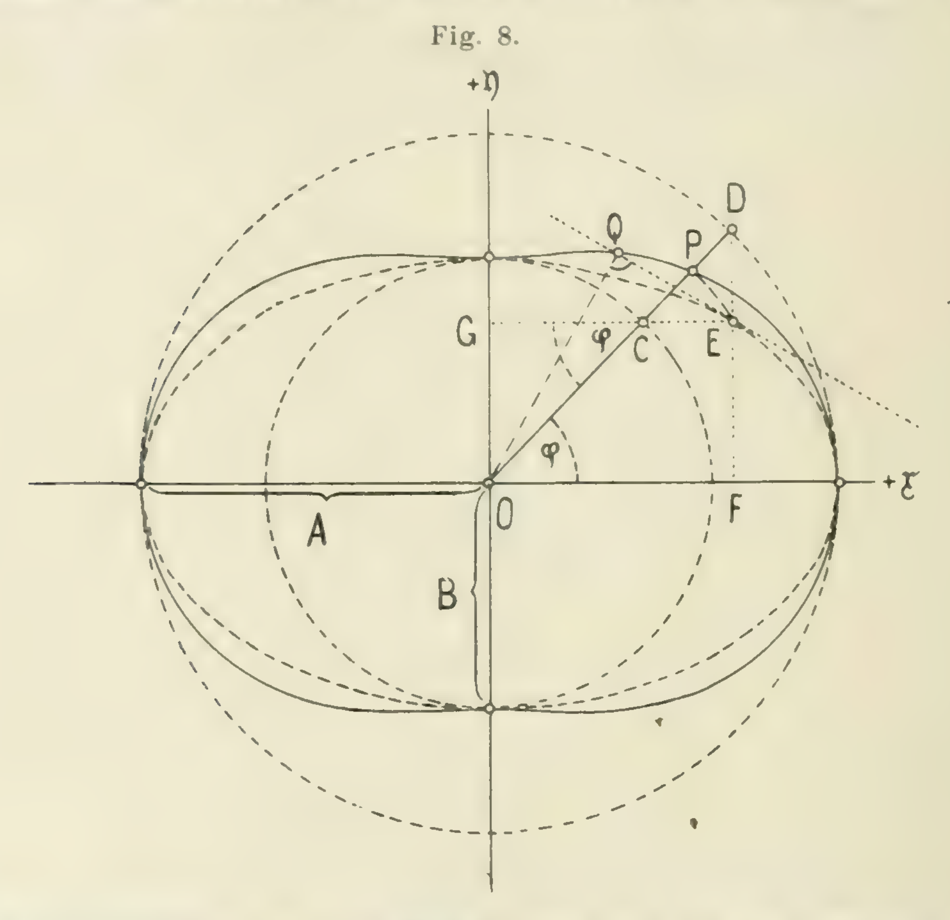
$$M^2 = \mu_0^2 \frac{[a\,a] - [b\,b]}{D} = \mu_0^2 \frac{[\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}] - [\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}]}{D},$$

worin $\mu_0 = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-u}}$ den mittleren Richtungsfehler bedeutet.

In beiden Fällen bilden aber die extremen mittleren Koordinatenfehler $\mu_{\mathfrak{x}}, \mu_{\mathfrak{y}}$ die beiden Halbachsen A, B der Zentralellipse.

Alle Punkte V', V'', $\mathfrak{V}$, . . . sowie W', W'', $\mathfrak{W}$, . . . liegen in einer nach beiden Hauptachsen der Ellipse symmetrischen Kurve, der sogenannten Fußpunktskurve oder Pedale der Ellipse, welche

Fig. 8.



als der geometrische Ort der Fußpunkte aller aus dem Ellipsenmittelpunkte auf sämtliche Ellipsentangenten gefällten Lote definiert ist. Ihre Konstruktion ist mit Hilfe der sie analytisch ausdrückenden Gleichungen (1) oder (3) möglich und kann mit Hilfe von (2) beziehungsweise (4) kontrolliert werden, weshalb sie in Anwendung auf die Fehlertheorie auch als die „Kurve der mittleren Koordinatenfehler" bezeichnet werden kann.

Bekanntlich findet man irgend einen Ellipsenpunkt E mit Benützung der beiden über den Ellipsenachsen als Durchmesser beschriebenen Kreise (Fig. 8), wenn ein beliebiger Radius mit den beiden Kreisen in C und D zum Schnitt gebracht und $DF \parallel O\mathfrak{y}$, so-

wie $GE \parallel O\mathfrak{x}$ gemacht wird; der Schnitt E der beiden Geraden DF und GE ist dann ein Punkt der Ellipse. Denn es sind, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die Koordinaten von E darstellen, die Parametergleichungen der Ellipse:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} &= OD\,.\,cos\,\varphi = A\,cos\,\varphi \\ \mathfrak{y} &= OC\,.\,sin\,\varphi = B\,sin\,\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

und daher die Mittelpunktsgleichung derselben:

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{A^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{B^2} = 1.$$

Quadriert man die beiden Gleichungen (5) und addiert sie sodann, so wird

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = A^2\,cos^2\,\varphi + B^2\,sin^2\,\varphi = \overline{OE}^2 \qquad (6)$$

oder mit Bezug auf (1) beziehungsweise (3):

$$\mu_{\mathfrak{x}}^2\,cos^2\,\varphi + \mu_{\mathfrak{y}}^2\,sin^2\,\varphi = \mu_{\varphi}^2, \qquad (7)$$

d. h. der durch den Zentriwinkel φ gegebene Punkt E der Ellipse hat von O denselben Abstand, wie der demselben Winkel φ entsprechende Punkt P der Pedale. Schlägt man also — nach einer von Hauptmann Exner angegebenen Konstruktion*) — einen Kreisbogen mit O als Mittelpunkt und OE als Halbmesser, so schneidet derselbe den Radiusvektor OD in dem Punkte P. Für jeden beliebigen Punkt Q der Pedale muß der Radiusvektor OQ senkrecht auf der Tangente EQ stehen.

Die Gleichung (6) oder (7) in der Form

$$A^2\,cos^2\,\varphi + B^2\,sin^2\,\varphi = \mu_{\varphi}^2 \qquad (8)$$

gibt den mittleren Punktfehler $\mu_{\varphi} = OE = OP$ in der Richtung φ an, wenn A und B die Halbachsen der Zentralellipse oder die extremen mittleren Koordinatenfehler bedeuten und φ von der großen Halbachse A aus gezählt wird.

§ 11. Beispiel.

(Gegenüberstellung von Kern- und Schwerpunkt).

1. Fall. Der Kernpunkt.

Zur Bestimmung der Koordinaten eines Punktes in der Ebene seien folgende, nach der allgemeinen Form

*) Vgl. J. Kozák: „Theorie des Schießwesens auf Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Fehlertheorie. I. Teil. VI. Abschnitt, Punkt 22.

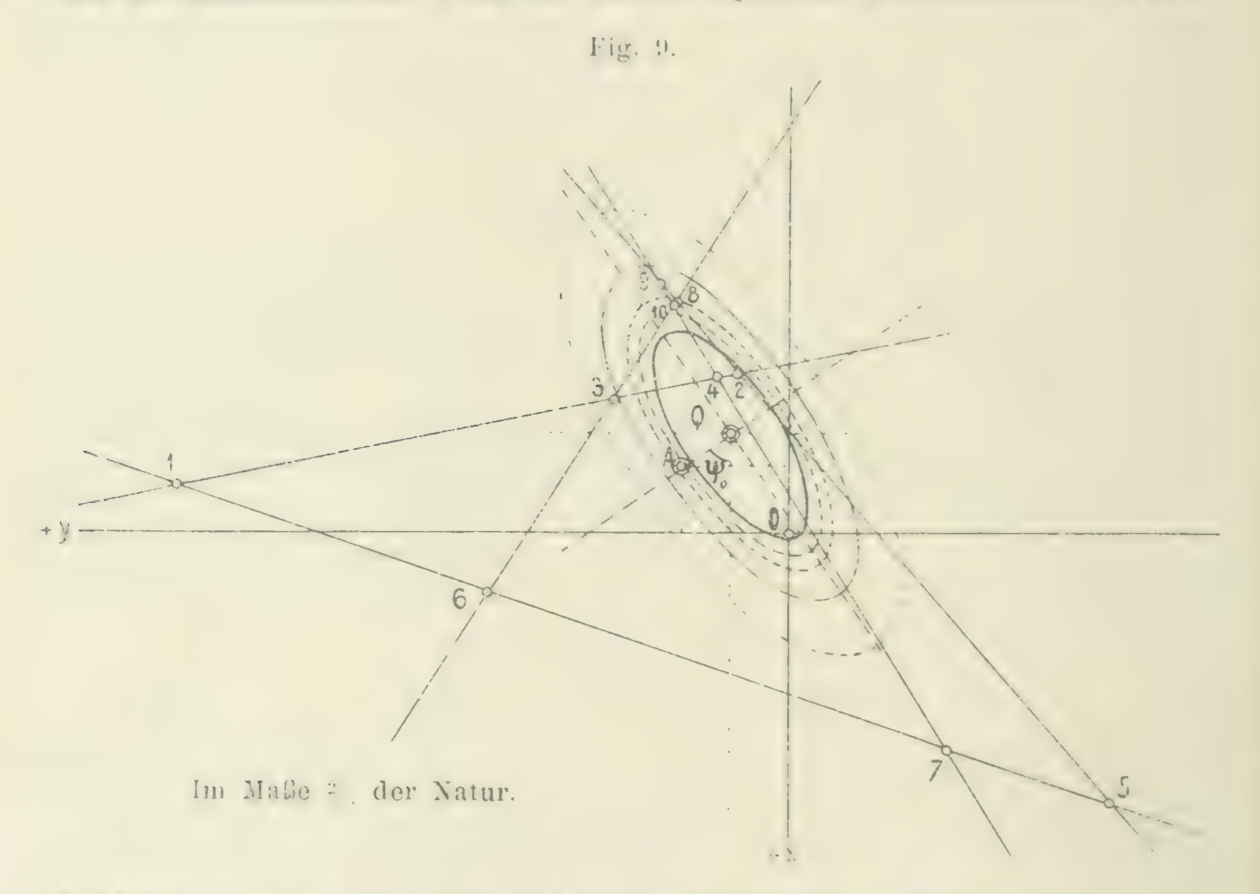
$$a\,\partial x + b\,\partial y + w = 0\ ^{*})$$

gebauten, gleichgewichtigen Vermittlungsgleichungen gegeben (§ 24):

$$\begin{aligned}
51{\cdot}2\ \partial x &+ 10{\cdot}3\ \partial y - 1{\cdot}3 = 0\\
70{\cdot}4\ &+ 23{\cdot}6\ \quad - 1{\cdot}7 = 0\\
53{\cdot}8\ &+ 61{\cdot}5\ \quad\ \ 0{\cdot}8 = 0\\
41{\cdot}5\ &+ 63{\cdot}5\ \quad\ \ 2{\cdot}5 = 0\\
114{\cdot}2\ &- 182{\cdot}1\ \quad\ \ 0{\cdot}7 = 0.
\end{aligned}$$

Hierin bedeuten ∂x, ∂y die an den Näherungskoordinaten x, y des zu bestimmenden Punktes anzubringenden Korrektionen. Diese

Fig. 9.



fünf Gleichungen sind die auf ein rechtwinkeliges Achsensystem mit dem Näherungspunkte (x, y) als Ursprung O (Fig. 9) bezogenen Gleichungen von fünf Geraden, deren 10 Schnittpunkte 1 bis 10 den mit zufälligen Beobachtungsfehlern behafteten Punktbestimmungen entsprechen. Für die wahrscheinlichste Punktlage Q erhält man aus den Normalgleichungen:

$$\begin{aligned}
25219\,\partial x + 22616\,\partial y + 173 &= 0\\
22616\,\partial x + 41637\,\partial y - \ \ 36 &= 0
\end{aligned}$$

*) Hier ist mit Rücksicht auf die Bezeichnung in der „Österreichischen Vermessungsinstruktion" $l = w$ gesetzt.

die auf den Ursprung O bezogenen Koordinatenkorrektionen:

$$\delta x_0 = -0{\cdot}0149 \qquad \delta y_0 = +0{\cdot}0089.$$

Damit erhält man die Verbesserungen v:

$a\,\delta x$ +	$b\,\delta y$ +	w =	v	$v\,v$
− 0·763	− 0·022	+ 1·3	+ 0·44	0·1936
− 1·049	+ 0·210	− 1·7	− 2·54	6·4516
− 0·802	+ 0·547	+ 0·8	+ 0·55	0·3025
+ 0·615	+ 0·565	− 2·5	− 1·32	1·7424
+ 1·702	− 1·621	− 0·7	− 0·62	0·3844
			$[v\,v]$ =	9·0745

und den mittleren Fehler einer einzelnen Richtungsbeobachtung:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-u}} = \sqrt{\frac{9{\cdot}0745}{5-2}} = \pm 1{\cdot}7392.$$

Mit Hilfe der Normalgleichungskoeffizienten erhält man

$$D = [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]^2 = 538\,560\,047$$

$$\mu_x^2 = \frac{\mu_0^2}{D}[b\,b] = 0{\cdot}0002\,3386, \qquad \mu_x = 0{\cdot}0153,$$

$$\mu_y^2 = \frac{\mu_0^2}{D}[a\,a] = 0{\cdot}0001\,4164, \qquad \mu_y = 0{\cdot}0119,$$

$$M^2 = \mu_x^2 + \mu_y^2 = 0{\cdot}0003\,7550, \qquad M = 0{\cdot}0194.$$

$$tg\,2\,\psi_0 = \frac{2\,[a\,b]}{[a\,a] - [b\,b]} = \frac{+\,45232}{-\,16418}.$$

$2\,\psi_0$ liegt im II. Quadranten, folglich ist $2\,\psi_0 = 109^0\,57'$

$$\psi_0 = 54^0\,59'.$$

Es ist ferner: $W = \sqrt{([a\,a] - [b\,b])^2 + 4\,[a\,b]^2} = 48119$

$$[\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}] = \frac{[a\,a] + [b\,b] + W}{2} = 57488, \quad [\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}] = \frac{[a\,a] + [b\,b] - W}{2} = 9368.$$

Die extremen mittleren Koordinatenfehler sind:

$$\mu_I^2 = \frac{\mu_0^2}{D}[\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}] = 0{\cdot}0000\,5262 \qquad \mu_I = 0{\cdot}0073$$

$$\mu_{II}^2 = \frac{\mu_0^2}{D}[\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}] = 0{\cdot}0003\,2288 \qquad \mu_{II} = 0{\cdot}0180.$$

Der mittlere Punktfehler ist übereinstimmend mit dem ersten Ergebnisse:

$$M^2 = \mu_\xi^2 + \mu_\eta^2 = 0{\cdot}0003\,7550 \qquad M = 0{\cdot}0194.$$

Zu dem Azimute φ_ξ [illegible] $= 54^\circ 59'$ gehört das Minimum $\mu_\xi = 0{\cdot}0073$

" " " $\varphi_\eta = 90^\circ + \ldots = 114^\circ 59'$ " " Maximum $\mu_\eta = 0{\cdot}0180$.

Für die charakteristischen Fehlerellipsen ergeben sich folgende Dimensionen:

Zentralellipse	$A = 0{\cdot}0073$	$B = 0{\cdot}0180$
wahrscheinliche Fehlerellipse	0·0085	0·0211
durchschnittliche Fehlerellipse	0·0095	0·0235
mittlere Fehlerellipse	0·0118	0·0291
Fundamentalellipse	0·3585	0·8880.

Die letzteren Maße ergeben sich aus der Bedingung:

$$k_f = \sqrt{\frac{1}{2\pi\mu_\xi\mu_\eta}} = 34{\cdot}9700$$

$$A_f = k_f\,\mu_\xi\sqrt{2}, \qquad B_f = k_f\,\mu_\eta\sqrt{2}.$$

In der Fig. 9 sind der Reihe nach die Zentralellipse, die wahrscheinliche, durchschnittliche und mittlere Fehlerellipse, sowie die im § 13 berechnete Grenzellipse zur Darstellung gebracht.

2. Fall. Der Schwerpunkt.

Angenommen, es seien dieselben 10 Schnittpunkte des 1. Falles nicht durch vermittelnde Beobachtungen, sondern auf direktem Wege durch Abmessen der Koordinaten erhalten worden, wobei sich folgende (in Wirklichkeit aus den 5 Vermittlungsgleichungen durch Kombination je zweier dieser Gleichungen auf analytischem Wege berechnete) Werte ergeben hätten:

	δx	δy
Schnittpunkt 1 . . .	$\delta x = -0{\cdot}0068$	$\delta y = -0{\cdot}0924$
" 2 . . .	$-0{\cdot}0238$	$+0{\cdot}0078$
" 3 . . .	$-0{\cdot}0200$	$-0{\cdot}0263$
" 4 . . .	$-0{\cdot}0232$	$+0{\cdot}0107$
" 5 . . .	$+0{\cdot}0403$	$-0{\cdot}0483$
" 6 . . .	$+0{\cdot}0090$	$+0{\cdot}0452$
" 7 . . .	$+0{\cdot}0322$	$-0{\cdot}0240$
" 8 . . .	$-0{\cdot}0343$	$+0{\cdot}0170$
" 9 . . .	$-0{\cdot}0370$	$+0{\cdot}0194$
" 10 . . .	$-0{\cdot}0338$	$-0{\cdot}0174$
Schwerpunkt A . . .	$\delta x_A = -0{\cdot}0097$	$\delta y_A = +0{\cdot}0164$.

Hieraus erhält man durch einfache Mittelbildung die Koordinaten δx_A, δy_A des Schwerpunktes A und damit die scheinbaren Koordinatenfehler:

$\xi = \delta x - \delta x_A$	$\eta = \delta y - \delta y_A$	$\xi\xi$	$\eta\eta$	$\xi\eta$
+ 0·0029	+ 0·0760	841	577 600	+ 22 040
− 0·0141	− 0·0086	19 881	7 396	− 12 126
+ 0·0103	+ 0·0099	10 609	9 801	+ 10 197
− 0·0135	− 0·0057	18 225	3 249	+ 7 695
+ 0·0500	− 0·0647	250 000	418 609	− 323 500
+ 0·0187	+ 0·0288	34 969	82 944	+ 53 856
+ 0·0419	− 0·0404	175 561	163 216	− 169 276
− 0·0246	+ 0·0006	60 516	36	− 1 476
− 0·0273	+ 0·0030	74 529	900	− 8 190
− 0·0241	− 0·0010	58 081	100	− 2 410
− 0·0004	− 0·0001	703 212	1 263 851	− 419 332

Ferner:

$$tg\, 2\,\alpha_0 = \frac{2\,[\xi\eta]}{[\xi\xi] - [\eta\eta]} = \frac{-838\,664}{-560\,639},$$

$2\,\alpha_0$ liegt im III. Quadranten, folglich ist $2\,\alpha_0 = 236^\circ\,14'$

$$\alpha = 118^\circ\,07'.$$

Es ergibt sich:

$$\mu_\xi^2 = \frac{[\xi\xi]}{n-1} = \frac{0{\cdot}0070\,3212}{9} = 0{\cdot}0007\,8135, \qquad \mu_\xi = 0{\cdot}0280,$$

$$\mu_\eta^2 = \frac{[\eta\eta]}{n-1} = \frac{0{\cdot}0126\,3851}{9} = 0{\cdot}0014\,0428, \qquad \mu_\eta = 0{\cdot}0375,$$

$$M^2 = \mu_\xi^2 + \mu_\eta^2 = 0{\cdot}0021\,8563, \qquad M = 0{\cdot}0468.$$

Die extremen mittleren Fehler ergeben sich wie folgt. Es ist nach (4), § 7, S. 25:

$$[\mathfrak{x}\mathfrak{x}] = 0{\cdot}0148\,7913, \qquad [\mathfrak{y}\mathfrak{y}] = 0{\cdot}0047\,9150,$$

daher

$$\mu_\mathfrak{x}^2 = \frac{[\mathfrak{x}\mathfrak{x}]}{n-1} = 0{\cdot}0016\,5324, \qquad \mu_\mathfrak{x} = 0{\cdot}0407,$$

$$\mu_\mathfrak{y}^2 = \frac{[\mathfrak{y}\mathfrak{y}]}{n-1} = 0{\cdot}0005\,3239, \qquad \mu_\mathfrak{y} = 0{\cdot}0231,$$

und zur Kontrolle: $M^2 = \mu_\mathfrak{x}^2 + \mu_\mathfrak{y}^2 = 0{\cdot}0021\,8563, \qquad M = 0{\cdot}0468.$

Zu dem Azimut $\alpha_0 = 118^\circ\,07'$ gehört das Minimum $\mu_\mathfrak{y} = 0{\cdot}0231$,

" " " $\alpha_0 - 90^\circ = 28^\circ\,07'$ " " Maximum $\mu_\mathfrak{x} = 0{\cdot}0407$.

Eine Vergleichung der in beiden Fällen erhaltenen Ergebnisse läßt dieselben — angefangen von den Koordinaten der wahrscheinlichsten Punktlagen bis zu den Elementen der Fehlerellipsen — als durchaus widersprechend erscheinen. Um zwischen beiden Berechnungsweisen Übereinstimmung zu erzielen, d. h. um vermittelnde Beobachtungen so auszugleichen, wie wenn sie direkte wären, ist es notwendig, im 2. Falle „Koordinatengewichte" einzuführen.

§ 12. Koordinatengewichte.

Bei vermittelnden Beobachtungen hat man die Unbekannten x, y der Fehlergleichungen

$$a_i x - b_i y - l = v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

aus den Normalgleichungen

$$[a a]\, x - [a b]\, y - [a l] = 0$$
$$[a b]\, x - [b b]\, y - [b l] = 0$$

zu berechnen und erhält hiefür:

$$x = \frac{[b b]\,[a l] - [a b]\,[b l]}{[a a]\,[b b] - [a b]\,[a b]}, \qquad y = \frac{[a a]\,[b l] - [a b]\,[a l]}{[a a]\,[b b] - [a b]\,[a b]}.$$

Löst man einerseits die Summenklammern auf, so erhält man für x:

$$x = \frac{(b_1^2 + b_2^2 + \cdots)(a_1 l_1 + a_2 l_2 + \cdots) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots)(b_1 l_1 + b_2 l_2 + \cdots)}{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots)^2}.$$

Wird ausmultipliziert, reduziert und in Faktoren vereinigt, so entsteht:

$$x = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)(b_2 l_1 - b_1 l_2) + (a_1 b_3 - a_3 b_1)(b_3 l_1 - b_1 l_3) + \cdots}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + \cdots}.$$

Berechnet man anderseits aus je zwei Vermittlungsgleichungen die Koordinaten der betreffenden Schnittpunkte, so erhält man z. B. aus den Gleichungen

$$a_1 x - b_1 y - l_1 = 0$$
$$a_2 x - b_2 y - l_2 = 0$$

das Wertepaar:

$$x_{1\,2} = \frac{b_2 l_1 - b_1 l_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \qquad y_{1\,2} = \frac{a_1 l_2 - a_2 l_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

oder aus den Gleichungen:

$$a_1 x - b_1 y - l_1 = 0$$
$$a_3 x - b_3 y - l_3 = 0$$

das Wertepaar:

$$x_{1.3} = \frac{b_3 l_1 - b_1 l_3}{a_1 b_3 - a_3 b_1}, \qquad y_{1.3} = \frac{a_1 l_3 - a_3 l_1}{a_1 b_3 - a_3 b_1},$$

usw. Setzt man der Kürze wegen:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pi_{1.2}$$
$$a_1 b_3 - a_3 b_1 = \pi_{1.3}$$
$$a_2 b_3 - a_3 b_2 = \pi_{2.3} \text{ usw.}$$

so läßt sich der obige Ausdruck für x wie folgt umschreiben:

$$x = \frac{\pi_{1.2}\, x_{1.2} + \pi_{1.3}\, x_{1.3} + \pi_{2.3}\, x_{2.3} + \cdots}{\pi_{1.2} + \pi_{1.3} + \pi_{2.3} + \cdots}.$$

Analog erhält man für y:

$$y = \frac{\pi_{1.2}\, y_{1.2} + \pi_{1.3}\, y_{1.3} + \pi_{2.3}\, y_{2.3} + \cdots}{\pi_{1.2} + \pi_{1.3} + \pi_{2.3} + \cdots}.$$

Die aus vermittelnden Beobachtungen berechneten wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten gehen daher auch aus der Regel des allgemeinen arithmetischen Mittels hervor, wenn die Koordinatengewichte π in Rechnung gestellt werden. Dieser Satz wurde zum ersten Male von Jacobi (1841) in Crelles Journal ganz allgemein in Determinantenform mitgeteilt.

Die Erprobung dieser Regel sei an dem Beispiel des § 11, 2. Fall durchgeführt, wobei die Koordinatengewichte durch 10000 gekürzt eingeführt seien. Man hat:

π	$\pi\,\delta x$	$\pi\,\delta y$
37	+ 0·25	+ 3·42
137	− 3·26	− 1·97
8[illegible]	− 1·60	+ 2·10
1102	− 25·57	+ 11·7[illegible]
94	+ 3·79	− 4·54
296	+ [illegible]	+ [illegible]
1025	+ 33·01	− [illegible]
355	− 12·18	− [illegible]
77	+ 2·85	+ 1·[illegible]
2182	− 73·75	+ [illegible]
[illegible]	− [illegible]	+ [illegible]

$$\delta x_0 = \frac{[\pi\,\delta x]}{[\pi]} = -0·0149, \qquad \delta y_0 = \frac{[\pi\,\delta y]}{[\pi]} = +0·0089,$$

das sind genau die Koordinaten des Kernpunktes S. 43. Kann man also auch nach dem Jacobischen Satze mit Benützung der Regel vom arithmetischen Mittel zu den wahrscheinlichsten Werten vermittelnder Beobachtungen gelangen, so zeigt ein noch so einfacher Versuch, daß diesem Verfahren eine praktische Bedeutung nicht beigemessen werden kann. Nur des theoretischen Interesses wegen sei daher noch folgende Weiterrechnung angestellt. — Verlegt man den Koordinatenursprung in den Kernpunkt und bezieht die Punktkoordinaten auf die neuen Achsen, so erhält man:

ξ'	η'	$\pi\,\xi'\,\xi'$	$\pi\,\eta'\,\eta'$	$\pi\,\xi'\,\eta'$
+ 0·0081	+ 0·0835	0·0024	0·2580	+ 0·0250
— 0·0089	— 0·0011	0·0109	0·0002	+ 0·0013
— 0·0051	+ 0·0174	0·0021	0·0242	0·0071
— 0·0083	+ 0·0018	0·0759	0·0036	— 0·0165
+ 0·0552	— 0·0572	0·2864	0·3076	— 0·2968
+ 0·0239	+ 0·0363	0·1691	0·3900	+ 0·2568
+ 0·0471	— 0·0329	2·2739	1·1095	— 1·5883
— 0·0194	+ 0·0081	0·1336	0·0233	— 0·0558
— 0·0221	+ 0·0105	0·0376	0·0085	— 0·0179
— 0·0189	+ 0·0085	0·7794	0·1576	— 0·3505
		3·7713	2·2825	— 2·0498

$$tg\,2\,\alpha_0' = \frac{2\,[\pi\,\xi'\,\eta']}{[\pi\,\xi'\,\xi'] - [\pi\,\eta'\,\eta']} = \frac{-\,4{\cdot}0996}{+\,1{\cdot}4888},$$

$$2\,\alpha_0' = 289^0\,58'$$

$$\alpha_0' = \psi_0 + 90^0 = 144^0\,59', \qquad \alpha_0' - 90^0 = \psi_0 = 54^0\,59'.$$

Das sind aber genau die Azimute der Achsen der auf den Kernpunkt bezogenen Fehlerellipsen S. 43.

Es ist ferner:

$$[\pi\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}] = [\pi\,\xi'\,\xi']\,cos^2\,\alpha_0' + [\pi\,\xi'\,\eta']\,sin\,2\,\alpha_0' + [\pi\,\eta'\,\eta']\,sin^2\,\alpha_0' = 5{\cdot}207682$$

$$[\pi\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}] = [\pi\,\xi'\,\xi']\,sin^2\,\alpha_0' - [\pi\,\xi'\,\eta']\,sin\,2\,\alpha_0' + [\pi\,\eta'\,\eta']\,cos^2\,\alpha_0' = 0{\cdot}846118;$$

Die mittleren Fehler der Gewichtseinheit sind:

$$\mu^2_{\xi_0} = \frac{[\pi\,\xi'\,\xi']}{n-1} = 0{\cdot}4190 \qquad \mu_{\xi_0} = 0{\cdot}6473$$

$$\mu^2_{\eta_0} = \frac{[\pi\,\eta'\,\eta']}{n-1} = 0{\cdot}2536 \qquad \mu_{\eta_0} = 0{\cdot}5036$$

0·6726

$$\mu_{\mathfrak{x}_0}^2 = \frac{[\pi\mathfrak{x}\mathfrak{x}]}{n-1} = 0{\cdot}5786 \qquad\qquad \mu_{\mathfrak{x}_0} = 0{\cdot}7607$$

$$\mu_{\mathfrak{y}_0}^2 = \frac{[\pi\mathfrak{y}\mathfrak{y}]}{n-1} = 0{\cdot}0940 \qquad\qquad \mu_{\mathfrak{y}_0} = 0{\cdot}3066$$

$$0{\cdot}6726$$

Folglich ist $M_0 = \sqrt{\mu_{\xi_0}^2 + \mu_{\eta_0}^2} = \sqrt{\mu_{\mathfrak{x}_0}^2 + \mu_{\mathfrak{y}_0}^2} = 0{\cdot}8201$.

Die mittleren Fehler einer Punktbestimmung von dem empirisch ermittelnden Gewichte $\pi_0 = 1790$ sind:

$$\frac{\mu_{\xi_0}}{\sqrt{\pi_0}} = 0{\cdot}0153 = \mu_\xi \qquad\qquad \frac{\mu_{\eta_0}}{\sqrt{\pi_0}} = 0{\cdot}0119 = \mu_\eta$$

$$\frac{\mu_{\mathfrak{x}_0}}{\sqrt{\pi_0}} = 0{\cdot}0180 = \mu_\mathfrak{x} \qquad\qquad \frac{\mu_{\mathfrak{y}_0}}{\sqrt{\pi_0}} = 0{\cdot}0073 = \mu_\mathfrak{y}$$

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{\pi_0}} = 0{\cdot}0194,$$

also genau übereinstimmend mit den Ergebnissen S. 43 und 44.

§ 13. Ausscheidung widersprechender Punktbestimmungen.

Für die Fehlerellipse $\frac{\mathfrak{x}^2}{2\mu_\mathfrak{x}^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{2\mu_\mathfrak{y}^2} = k^2$ ist nach § 6 die Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt außerhalb derselben falle, oder kurz die äußere Wahrscheinlichkeit $W_a = e^{-k^2}$ und die innere Wahrscheinlichkeit $W_i = 1 - e^{-k^2}$.

Für die wahrscheinliche Fehlerellipse, für welche bei n Punktbestimmungen $\frac{n}{2}$ innerhalb und $\frac{n}{2}$ außerhalb derselben gesetzlich zu liegen kommen sollen, ist

$$W_a = W_i = \frac{\frac{n}{2}}{n} = \frac{1}{2}.$$

Für diejenige Ellipse, welche bei n Punkten nur einen einzigen Punkt gesetzlich ausschließen, die übrigen $n-1$ Punkte aber umschließen soll, ist

$$W_a = e^{-k^2} = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad W_i = \frac{n-1}{n}.$$

Diese Ellipse gibt die Grenze an, außerhalb welcher alle Punktbestimmungen bis auf eine einzige als dem Grenzgesetze widersprechend vor der definitiven Berechnung der wahrscheinlichsten

Punktlage besser auszuscheiden wären, denn eine gesetzliche Berechtigung, außerhalb dieser Grenzellipse zu fallen, kommt eben nur einem einzigen Punkte zu. Die Halbachsen der Grenzellipse berechnen sich wie folgt:

$$k_n = \sqrt{\frac{\log n}{\log e}},$$

$$A_n = k_n \sqrt{2}\, \mu_r, \qquad B_n = k_n \sqrt{2}\, \mu_p.$$

Nach diesen Formeln erhält man folgende Werte für einige n:

$n =$	$k_n =$	$k_n \sqrt{2} =$
10	1·5174	2·1460
20	1·7308	2·4477
30	1·8442	2·6081
40	1·9206	2·7162
50	1·9756	2·7939
100	2·1460	3·0349
500	2·4929	3·5255
1000	2·6283	3·7169.

In dem Beispiele des § 11 ist für den 1. Fall:

$$n = 10, \qquad A_{10} = 2{\cdot}1460\, \mu_r = 0{\cdot}0157, \qquad B_{10} = 2{\cdot}1460\, \mu_p = 0{\cdot}0386.$$

Nachdem diese in Fig. 9, Seite 42, dargestellte Ellipse die Grenze angibt, bei welcher von 10 Punktbestimmungen gesetzlich nur eine einzige außerhalb derselben fallen darf, in Wirklichkeit aber alle von dem zweiten Strahle herrührenden Schnittpunkte 1, 5, 6, 7 von der Grenzellipse ausgeschlossen sind, so wäre man berechtigt, diesen widersprechenden Strahl als zweifelhaft auszuscheiden.

§ 14. Genauigkeit des Schnittpunktes zweier Geraden.

Die Bestimmung der Genauigkeit eines durch rechtwinkelige Koordinaten festgelegten Punktes durch Ermittlung der mittleren Koordinatenfehler μ_x, μ_y und des mittleren Punktfehlers $M = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2}$ geht darauf hinaus, die Genauigkeit des Schnittpunktes zweier aufeinander senkrechter Geraden, nämlich der Abszissen- und der Ordinatenlinien, zu bestimmen. Diese Aufgabe ist daher nur ein spezieller Fall eines allgemeineren Problems, welches lautet: Es ist die Genauigkeit des Schnittpunktes P zweier unter einem fehlerfrei vorausgesetzten Winkel φ geneigten Geraden PU und PV zu bestimmen. (Fig. 10, S. 51.)

Bei der Bestimmung des Punktes P von den Festpunkten U und V aus rührt zwar die Unsicherheit der Punktbestimmung von den

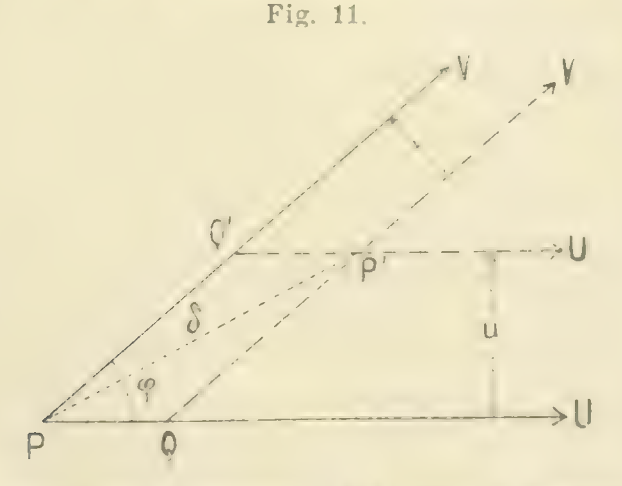
hiebei begangenen Richtungsfehlern $d\varphi_u$ und $d\varphi_v$ her, welche φ um die algebraische Summe der Richtungsfehler verändern und Querabweichungen von der Größe

$$u = PU \,.\, d\varphi_u \,, \qquad v = PV \,.\, d\varphi_v$$

Fig. 10.

erzeugen (Fig. 11). Da aber die Richtungskorrektionen $d\varphi_u$, $d\varphi_v$ oder die Verhältnisse $\frac{u}{PU}$, $\frac{v}{PV}$ so klein sind, daß die beobachteten und die verbesserten Richtungen als zueinander parallel angenommen werden können, so wird man die Querabweichungen u, v wie Pa-

Fig. 11.



rallelverschiebungen der Strahlen PU und PV ansehen und daher φ als fehlerfrei betrachten können, so daß die Punktbestimmung mit den komponentalen Fehlern u, v oder mit dem resultierenden, totalen Punktfehler δ behaftet erscheint. Hiebei finden folgende Beziehungen statt: Nach dem Carnotschen Lehrsatze ist

$$\delta^2 = PQ^2 + QP'^2 + 2\,PQ \,.\, QP' \cos\varphi$$

Da aber

$$PQ = \frac{v}{\sin\varphi}, \qquad QP' = \frac{u}{\sin\varphi},$$

so ist

$$\delta^2 = \frac{u^2}{\sin^2\varphi} + \frac{v^2}{\sin^2\varphi} + \frac{2\,u\,v}{\sin^2\varphi}\cos\varphi.$$

Hat man den Punkt P durch überschüssige Strahlen überbestimmt, so ergibt sich nach dieser Formel der mittlere Punktfehler M, wenn

$$\frac{[\delta\,\delta]}{n-1} = M^2, \qquad \frac{[u\,u]}{n-1} = \mu_u^2, \qquad \frac{[v\,v]}{n-1} = \mu_v^2$$

gesetzt wird:

$$M^2 = \frac{\mu_u^2 + \mu_v^2}{\sin^2\varphi} + 2\,\frac{[u\,v]}{n-1}\,\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Da aber mit Hinweis auf die Entwicklungen des § 25 des I. Bandes $[u\,v] = 0$ ist, weil die Produkte $\pm\, u_i v_i$, welche gleich wahrscheinlich positiv und negativ auftreten, in ihrer Summe sich gegenseitig aufheben, so ergibt sich schließlich die zuerst von Helmert (1868) angegebene Formel für den mittleren Fehler des Schnittpunktes zweier Geraden:

$$M^2 = \frac{\mu_u^2 + \mu_v^2}{\sin^2\varphi}, \qquad M = \frac{\sqrt{\mu_u^2 + \mu_v^2}}{\sin\varphi},$$

welche für $\varphi = 90^0$ in die spezielle Formel für rechtwinkelige Koordinaten übergeht:

$$M^2 = \mu_u^2 + \mu_v^2 = \mu_x^2 + \mu_y^2.$$

Man kann auch Genauigkeitsuntersuchungen nach der Richtung hin anstellen, daß man Kurven konstruiert, in welchen alle Punkte ein konstantes M besitzen. Hiedurch erhält man Kurvenscharen gleicher Genauigkeit, welche Fehler- oder Genauigkeitskurven genannt werden.

Derartige Untersuchungen wurden angestellt von Jordan*) für Vorwärts-, Seitwärts- und Rückwärtseinschneiden, sowie für einfache Triangulierungen und von Klingatsch**) für photogrammetrische und topographische Aufnahmen.

*) Zeitschrift für Mathematik und Physik; 1871, S. 397 bis 427 oder „Handbuch für Vermessungskunde", I. Bd. 3. Aufl. V. Kap.

**) Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien; Math.-naturw. Kl., 1906, S. 1009 bis 1030 und 1907, S. 937 bis 974.

II. Abschnitt.

Triangulierungsausgleichung.

A. Winkelausgleichung.

§ 15. Einfache Winkelmessung.

Der **Winkel** wird in der praktischen Geometrie als der **Unterschied zweier Richtungen** definiert und demgemäß durch Richtungsbeobachtungen gemessen. Es ist der im Scheitel O gemessene Winkel AOB (Fig. 12) gleich der Richtung OB *minus* der Richtung OA.

Umgekehrt wird aber auch die Richtung eines Strahles OA durch den Winkel gemessen, den derselbe mit der positiven Abszissenachse eines rechtwinkeligen Koordinatensystems oder mit irgend einer fest angenommenen Nullrichtung Ox einschließt; man kann daher auch sagen:

Fig. 12.

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle xOB - \sphericalangle xOA.$$

Ist μ_r der mittlere Fehler einer einzelnen Richtung, so ist der Definition des Winkelbegriffes zufolge der mittlere Winkelfehler μ_w nach dem Fehlerübertragungsgesetze, § 23 des I. Bandes, S. 93, bestimmt durch die Gleichung

$$\mu_w = \mu_r \sqrt{2}$$

und es ist, wenn g_r das Richtungsgewicht und g_w das Winkelgewicht bedeutet,

$$g_w = \frac{1}{2} g_r,$$

d. h. eine Winkelmessung hat im Vergleiche mit einer Richtungsmessung, wenn sonst keine näheren Umstände hinzukommen, nur das halbe Gewicht.

Für geodätische Zwecke ist es einerlei, ob mit Winkeln oder mit Richtungen operiert wird; man erhält immer dasselbe Ergebnis, nur muß bei Genauigkeitsuntersuchungen wegen Beachtung der verschiedenen Anzahl der in die Ausgleichung eingehenden Beobachtungen stets darauf Rücksicht genommen werden. Wurden z. B. auf einer Station zur Festlegung aller Strahlen W Winkel (ohne Einrechnung des bloß zur Probe dienenden Horizontabschlußwinkels) und R Richtungen gemessen, so muß $R = W + 1$ sein; in einem Dreiecksnetze mit P Punkten besteht daher die Beziehung: $R = W + P$.

So wie die Genauigkeit der Winkel- oder Richtungsmessung — als des wichtigsten Elementes der Triangulierung — durch Verbesserung der Winkelmeßinstrumente und der Winkelmeßmethoden erhöht wird, so wächst auch das Vertrauen zu den aus Messungen gewonnenen Ergebnissen durch die Anwendung der methodischen Ausgleichungsrechnung, indem ihr die Aufgabe zufällt, aus den trotz der Benützung ausgezeichneter Instrumente und Meßmethoden immer noch widersprechenden Messungsdaten die wahrscheinlichsten Resultate zu ziehen und den Grad der noch zurückbleibenden Unsicherheit in denselben anzugeben.

Je nach den zur Verfügung stehenden instrumentalen Mitteln und dem gewünschten Genauigkeitsgrade kommen verschiedene Methoden der Winkel- oder Richtungsmessung zur Anwendung, und zwar:

1. Die einfache oder reine Winkelmessung,
2. die multiplizierte oder repetierte Winkelmessung,
3. die Winkelmessung aus Summenwinkeln,
4. die Winkelmessung aus Satzbeobachtungen.

Bei der einfachen Winkelmessung wird jeder Winkel für sich allein wiederholt gemessen, wobei man Gelegenheit findet, durch Ablesung an diametral gegenüberliegenden Nonien oder Mikroskopen, durch das Durchschlagen des Fernrohres und durch die nach jeder Wiederholung wechselnde Anordnung der Einstellungen nach dem linken und nach dem rechten Objekte die Instrumentalfehler so gut als möglich unschädlich zu machen. Hat man den Winkel n-mal gemessen, so ist das arithmetische Mittel aller Einzelmessungen sein wahrscheinlichster Wert, der mittlere Fehler einer einzelnen Messung ist $\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$ und der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels $u = \frac{\mu}{\sqrt{n}}$.

Bei der einfachen Winkelmessung kommen zwei unabhängige Einstellfehler, auch Visur- oder Zielfehler genannt, und zwei unabhängige Ablesefehler in Betracht. Bezeichnet man den mittleren Einstellfehler mit ε, den mittleren Ablesefehler mit α, so ist der einer einzelnen Richtung anhaftende mittlere Richtungsfehler $m = \sqrt{\varepsilon^2 + \alpha^2}$, der bei dem einfach gemessenen Winkel erzeugte mittlere Winkelfehler

$$m_1 = m\sqrt{2} = \sqrt{2(\varepsilon^2 + \alpha^2)} \qquad (1)$$

und der bei n-maliger Wiederholung dem arithmetischen Mittel anhaftende mittlere Winkelfehler

$$m_n = \frac{m_1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{n}(\varepsilon^2 + \alpha^2)}, \qquad (2)$$

d. h. durch Wiederholung der Winkelmessung wird der Einfluß beider Fehler in gleichem Maße im Verhältnis zur Quadratwurzel der Wiederholungszahl vermindert.

Wird an diametralen Nonien oder Mikroskopen abgelesen und von beiden Lesungen das Mittel genommen, so ist der Einfluß des Ablesefehlers $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, und obige Formeln gehen über in

$$\mu_1 = \sqrt{2\left(\varepsilon^2 + \frac{\alpha^2}{2}\right)} = \sqrt{2\varepsilon^2 + \alpha^2} \qquad (3)$$

$$\mu_n = \sqrt{\frac{2}{n}\left(\varepsilon^2 + \frac{\alpha^2}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{n}(2\varepsilon^2 + \alpha^2)}. \qquad (4)$$

Macht man die Winkelmessungen überdies in beiden Kreislagen, so wird der Einstellfehler $= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, der Ablesefehler $= \frac{\alpha}{\sqrt{4}}$ und es gehen (1) und (2) über in

$$\mu'_1 = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\alpha^2}{2}} \qquad (5)$$

$$\mu'_n = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\varepsilon^2 + \frac{\alpha^2}{2}\right)}. \qquad (6)$$

§ 16. Repetierte Winkelmessung.

Bei der repetierten oder vervielfältigten Winkelmessung wird der n-fache Winkel bekanntlich derart gemessen, daß nur am Anfange für das erste Objekt und am Ende des n-fachen Winkels für das zweite Objekt am Teilkreise abgelesen wird, die Einstellungen

aber bei jedem einfachen Winkel gemacht werden. Während der Einstellfehler e sohin $2n$-mal begangen wird, macht man Ablesefehler a nur zweimal, so daß für den n-fachen Winkel der mittlere Fehler

$$m' = \sqrt{2(n e^2 + a^2)}$$

und für den einfachen Winkel der mittlere Fehler der n-te Teil davon, also

$$\mu''_n = \frac{m'}{n} = \frac{1}{n}\sqrt{2(n e^2 + a^2)} \tag{1}$$

wird, was insofern gegenüber der wiederholten einfachen Winkelmessung als ein Vorteil erscheint, als dem Bestreben, den schon von Tobias Mayer dem Älteren (1750) und von Borda (1755) erkannten großen Einfluß des Teilungs- und Ablesefehlers auf die Winkelgenauigkeit herabzumindern, hiedurch Genüge getan ist. Arbeitet man mit Instrumenten, die mit diametralen Ablesevorrichtungen ausgerüstet sind, so geht (1) über in

$$\mu''_n = \frac{1}{n}\sqrt{2 n e^2 + a^2}. \tag{2}$$

Führt man überdies die Messungen in beiden Kreislagen aus, so wird

$$\mu''_n = \frac{1}{n}\sqrt{n e^2 + \frac{a^2}{2}}. \tag{3}$$

Übersichtlich zusammengestellt hat man daher folgende Formeln für den mittleren Winkelfehler bei Winkelmessungen in beiden Kreislagen und für diametrale Ablesevorrichtungen:

Bei einfacher Winkelmessung . . . $\mu_1 = \sqrt{e^2 + \frac{a^2}{2}}$

„ wiederholter „ . . . $\mu'_n = \sqrt{\frac{1}{n}\left(e^2 + \frac{a^2}{2}\right)}$

„ repetierter „ . . . $\mu''_n = \sqrt{\frac{1}{n}\left(e^2 + \frac{a^2}{2n}\right)}$.

Um den wahrscheinlichsten Wert eines durch Repetition gemessenen Winkels zu ermitteln, braucht man nur den zwischen der ersten und letzten Einstellung enthaltenen Bogen durch die Anzahl der Repetitionen zu dividieren. Eine Verschärfung des Ergebnisses, verbunden mit einer wirksamen Kontrolle, kann man herbeiführen, wenn man auch nach einer gewissen Anzahl von Repetitionen, z. B. immer nach je n Repetitionen am Limbuskreise Zwischenablesungen macht.

Hat man den Winkel φ im ganzen N-mal repetiert und hiebei m Repetitionen des n fachen Winkels erhalten, so muß $N = m\,n$, also m ein aliquoter Teil von N sein. Bezeichnet man nach dem Vorgange von Bessel mit x den wahrscheinlichsten Wert der Mittellesung und mit y den wahrscheinlichsten Wert des n-fachen Winkels, sind ferner $l, l_1, l_2, \ldots l_m$ die Ablesungen am Kreise zu Anfang der Messung und nach der n-, $2\,n$-, . . . $m\,n$-fachen Repetition, so bestehen, je nachdem m gerade oder ungerade ist, die Gleichungen:

m gerade:	m ungerade:
$x - \frac{m}{2}\,y = l$	$x - \frac{m}{2}\,y = l$
$x - \left(\frac{m}{2} - 1\right) y = l_1$	$x - \left(\frac{m}{2} - 1\right) y = l_1$
$x - \left(\frac{m}{2} - 2\right) y = l_2$	$x - \left(\frac{m}{2} - 2\right) y = l_2$
. . . .	. . . .
$x - y = l_{\frac{m}{2} - 1}$	$x - \frac{1}{2}\,y = l_{\frac{m-1}{2}}$
$x = l_{\frac{m}{2}}$	keine Mittellesung
$x + y = l_{\frac{m}{2} + 1}$	$x + \frac{1}{2}\,y = l_{\frac{m+1}{2}}$
. . . .	. . . .
$x + \left(\frac{m}{2} - 2\right) y = l_{m-2}$	$x + \left(\frac{m}{2} - 2\right) y = l_{m-2}$
$x + \left(\frac{m}{2} - 1\right) y = l_{m-1}$	$x + \left(\frac{m}{2} - 1\right) y = l_{m-1}$
$x + \frac{m}{2}\,y = l_m$	$x + \frac{m}{2}\,y = l_m$

Diese je $m + 1$ Gleichungen haben, da die beiden Unbekannten x, y voneinander unabhängig sind, die allgemeine Form der Vermittlungsgleichungen:

$$a\,x + b\,y = l.$$

Die wahrscheinlichsten Werte von x, y ergeben sich daher aus den Normalgleichungen:

$$[a\,a]\,x + [a\,b]\,y = [a\,l]$$
$$[a\,b]\,x + [b\,b]\,y = [b\,l].$$

Hiebei ist für m gerade:

$[a\,a] = m + 1,$ $[a\,b] = 0,$ $[a\,l] = [l],$

$$[b\,b] = \left\{\frac{m^2}{4} + \frac{(m-2)^2}{4} + \frac{(m-4)^2}{4} + \cdots + \frac{4}{4}\right\},$$

$$[b\,l] = \left\{\frac{m}{2}(l_m - l) + \frac{m-2}{2}(l_{m-1} - l_1) + \frac{m-4}{2}(l_{m-2} - l_2) + \cdots + \frac{2}{2}\left(l_{\frac{m}{2}+1} - l_{\frac{m}{2}-1}\right)\right\},$$

sohin ist:

$$x = \frac{[l]}{m+1}$$

$$y = \frac{m(l_m - l) + (m-2)(l_{m-1} - l_1) + \cdots + 2\left(l_{\frac{m}{2}+1} - l_{\frac{m}{2}-1}\right)}{m^2 + (m-2)^2 + (m-4)^2 + \cdots + 4}$$

und

$$\varphi = \frac{y}{n}.$$

Wenn m ungerade ist, erhält man nur eine andere Formel für y, nämlich:

$$y = \frac{m(l_m - l) + (m-2)(l_{m-1} - l_1) + \cdots + \left(l_{\frac{m+1}{2}} - l_{\frac{m-1}{2}}\right)}{m^2 + (m-2)^2 + (m-4)^2 + \cdots + 4}.$$

Durch Substitution der so gefundenen x, y in die Vermittlungsgleichungen erhält man die scheinbaren Fehler, z. B. für m gerade:

$$r = x - \frac{m}{2}\,y - l$$

$$r_1 = x - \left(\frac{m}{2} - 1\right) y - l_1, \text{ usw.}$$

Alsdann ist der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[r\,r]}{(m+1) - u}} = \sqrt{\frac{[r\,r]}{m-1}},$$

worin $m+1$ die Anzahl der Gleichungen und $u = 2$ die Anzahl der Unbekannten bedeuten. Es ist ferner

der mittlere Fehler von x . . . $\mu_x = \dfrac{\mu_0}{\sqrt{[a\,a\,.\,1]}}$,

" " " " y . . . $\mu_y = \dfrac{\mu_0}{\sqrt{[b\,b\,.\,1]}}$.

Beispiel.

Unter den Annahmen $N = 8$, $n = 2$, $m = 4$ seien folgende gemittelte Ablesungen erhalten worden:

Erste Ablesung:	$0^0\,00'\,00''00 = 0^0\,00'\,00''$	$+\;0''00$
2-facher Winkel:	$58\;12\;44{\cdot}00 = 58\;12\;40$	$+\;4{\cdot}00$
4- „ „ :	$116\;25\;30{\cdot}75 = 116\;25\;20$	$+\;10{\cdot}75$
6- „ „ :	$174\;38\;08{\cdot}00 = 174\;38\;00$	$+\;8{\cdot}00$
8- „ „ :	$232\;50\;44{\cdot}25 = 232\;50\;40$	$+\;4{\cdot}25$
		$[l''] = 27{\cdot}00$

Indem man das Vielfache einer runden Winkelgröße wegläßt und sich in der Berechnung auf die Einheiten der Sekunden l'' beschränkt, gehört dann das ermittelte y'' zu dem zweifachen Näherungswert $58^0\,12'\,40''$ und das gerechnete x'' zur genäherten Mittellesung $116^0\,25'\,20''$. Die Rechnung gibt:

$$y'' = \frac{4\,(4{\cdot}25 - 0{\cdot}00) + 2\,(8{\cdot}00 - 4{\cdot}00)}{16 + 4} = \frac{25{\cdot}00}{20} = 1''25$$

$$y = 2\,\varphi = 58^0\,12'\,41''25, \qquad x'' = \frac{27{\cdot}00}{5} = 5''40,$$

$$\varphi = 29\;06\;20{\cdot}63, \qquad x = 116^0\,25'\,25''40.$$

Es ist ferner:

$$\begin{aligned} v &= x'' - 2\,y'' - l'' = +\,2''90 \\ v_1 &= x'' - y'' - l_1'' = +\,0{\cdot}15 \\ v_2 &= x'' \qquad - l_2'' = -\,5{\cdot}35 \\ v_3 &= x'' + y'' - l_3'' = -\,1{\cdot}35 \\ v_4 &= x'' + 2\,y'' - l_4'' = +\,3{\cdot}65 \end{aligned}$$

$$[v] = 0{\cdot}00, \quad [v\,v] = 52{\cdot}2000,$$

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{52{\cdot}2000}{3}} = \pm\,4''17.$$

Rechnet man aber ohne Zwischenablesungen, so erhält man:

$$\varphi = 232^0\,50'\,44''25 : 8 = 29^0\,06'\,20''53.$$

Man kann auch die Zwischenablesungen zu einem Mittel vereinigen und für die verschiedenen, durch Repetition erhaltenen Beobachtungsresultate auch Gewichte einführen nach der Formel (3):

$$g = \frac{1}{(\mu_n)^2} = \frac{n}{e^2 + \frac{a^2}{2\,n}} = \frac{n^2}{n\,e^2 + \frac{a^2}{2}}. \tag{4}$$

wenn für ein bestimmtes Instrument die bekannten Zahlenwerte von e und a eingesetzt werden. Es ist z. B. für $e = 1''$ und $a = 2''$:

$$g = \frac{n^2}{n + 2}. \tag{I}$$

Statt des strengen aber umständlichen Gewichtsausdruckes (4) setzt Gerling (1843) einfach

$$g = n \qquad \text{(II)}$$

und Doležal (1904):

$$g = n^2. \qquad \text{(III)}$$

Im obigen Beispiele erhält man unter Zugrundelegung dieser drei Gewichtsannahmen folgende Ergebnisse:

n	n-facher Winkel	Doppelter Winkel	r''	Gewichte nach I	II		III	
0	0° 00′ 00″00							
2	58 12 44·00	58° 12′ 44″00	4·00	1	2	1	4	1
4	116 25 30·75	58 12 45·38	5·38	2·7	4	2	16	4
6	174 38 08·00	58 12 42·67	2·67	4·5	6	3	36	9
8	232 50 44·25	58 12 41·06	1·06	6·4	8	4	64	16
			$[g] =$	14·6		10		30

$$\varphi_{I} = 29^0\,06'\,21''28, \quad \varphi_{II} = 29^0\,06'\,21·35, \quad \varphi_{III} = 29^0\,06'\,21·11.$$

§ 17. Horizontabschluß.

Hat man auf einer Beobachtungsstation mehrere aneinander gereihte Winkel und zur Probe auch den zwischen der letzten und ersten Richtung liegenden Winkel, welcher den ganzen Horizont von 360° sozusagen „abschließt", für sich gemessen, so soll die Summe aller Einzelwinkel gleich 360° sein. Trifft dies aber nicht genau zu, so muß der zutage tretende Horizontwiderspruch w auf 360° abgestimmt werden.

Fig. 13.

Bei gleichen Winkelgewichten geschieht die Aufteilung des Horizontwiderspruches auf alle Winkel zu gleichen Teilen, bei ungleichen Gewichten jedoch umgekehrt proportional den Gewichten. Dieser Satz sei nachstehend bewiesen.

Hat man auf der Station S (Fig. 13) außer den drei Winkeln

$$ASB = \alpha, \qquad BSC = \beta, \qquad CSD = \gamma$$

auch den Schlußwinkel $DSA = \delta$ gemessen und hiefür die Beobachtungswerte $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ mit den Gewichten g_α, g_β, g_γ, g_δ erhalten, so besteht zwischen den wahren Werten die Bedingungsgleichung:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0$$

und zwischen den beobachteten Werten die Widerspruchsgleichung:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 360^0 + w.$$

Eliminiert man aus den zugeordneten Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha' &= v_\alpha \\ \beta - \beta' &= v_\beta \\ \gamma - \gamma' &= v_\gamma \\ \delta - \delta' &= v_\delta \end{aligned}$$

mit Hilfe der Bedingungsgleichung eine Unbekannte, z. B.

$$\delta = 360^0 - \alpha - \beta - \gamma,$$

so erhält man folgende, nunmehr voneinander unabhängige Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \alpha' &= v_\alpha \\ \beta \qquad\qquad\qquad - \beta' &= v_\beta \\ \gamma \qquad\qquad - \gamma' &= v_\gamma \\ -\alpha - \beta - \gamma + 360^0 - \delta' &= v_\delta. \end{aligned}$$

Um keine großen Zahlenwerte in die Rechnung hineinzubringen, führt man Näherungswerte $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ ein, deren Summe genau 360° geben, so daß der Überschuß oder der Abgang dieser Summe gleich w sein muß. Man setzt also:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_n + x \\ \beta &= \beta_n + y \\ \gamma &= \gamma_n + z \\ \delta &= \delta_n + t \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \alpha' &= \alpha_n + \alpha_0 \\ \beta' &= \beta_n + \beta_0 \\ \gamma' &= \gamma_n + \gamma_0 \\ \delta' &= \delta_n + \delta_0. \end{aligned}$$

Die nur wenige Sekunden betragenden Werte $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ treten jetzt als Beobachtungswerte der unbekannten Zuschläge x, y, z, t zu den Näherungswerten auf. Addiert man die letzten zwei Gleichungsgruppen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n &= 360^0 \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta - 360^0 &= x + y + z + t = 0 \\ \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' - 360^0 &= \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 + \delta_0 = w. \end{aligned}$$

Es ist ferner:

$$v_\alpha = \alpha - \alpha' = \alpha_n + x - \alpha_n - \alpha_0 = x - \alpha_0$$

und ebenso:

$$v_\beta = y - \beta_0, \quad v_\gamma = z - \gamma_0, \quad v_\delta = t - \delta_0 = -x - y - z - \delta_0.$$

Folglich lauten die unabhängigen Fehlergleichungen:

$$
\begin{aligned}
x \qquad\qquad - \alpha_0 &= v_\alpha \text{ mit dem Gewichte } g_\alpha \\
y \qquad - \beta_0 &= v_\beta \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad g_\beta \\
z - \gamma_0 &= v_\gamma \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad g_\gamma \\
-x - y - z - \delta_0 &= v_\delta \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad g_\delta
\end{aligned}
$$

und die Normalgleichungen:

$$
\begin{aligned}
(g_\alpha + g_\delta)\,x + g_\delta\, y + g_\delta\, z - (g_\alpha \alpha_0 - g_\delta \delta_0) &= 0 \\
g_\delta\, x + (g_\beta + g_\delta)\, y + g_\delta\, z - (g_\beta \beta_0 - g_\delta \delta_0) &= 0 \\
g_\delta\, x + g_\delta\, y + (g_\gamma + g_\delta)\, z - (g_\gamma \gamma_0 - g_\delta \delta_0) &= 0,
\end{aligned}
$$

welche für gleiche Gewichte übergehen in:

$$
\begin{aligned}
2x + y + z - (\alpha_0 - \delta_0) &= 0 \\
x + 2y + z - (\beta_0 - \delta_0) &= 0 \\
x + y + 2z - (\gamma_0 - \delta_0) &= 0.
\end{aligned}
$$

Hieraus ergeben sich die wahrscheinlichsten Werte der Verbesserungen der Näherungswerte

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{4}(\;3\alpha_0 - \beta_0 - \gamma_0 - \delta_0) = \alpha_0 - \frac{w}{4} \\
y &= \frac{1}{4}(-\alpha_0 + 3\beta_0 - \gamma_0 - \delta_0) = \beta_0 - \frac{w}{4} \\
z &= \frac{1}{4}(-\alpha_0 - \beta_0 + 3\gamma_0 - \delta_0) = \gamma_0 - \frac{w}{4} \\
t &= \frac{1}{4}(-\alpha_0 - \beta_0 - \gamma_0 + 3\delta_0) = \delta_0 - \frac{w}{4},
\end{aligned}
$$

womit bewiesen ist, daß bei gleichen Winkelgewichten die Aufteilung des Horizontwiderspruches w auf alle Winkel zu gleichen Teilen erfolgt. Für ungleiche Gewichte geschieht die Aufteilung von w in Gemäßheit der aus den betreffenden Normalgleichungen gewonnenen Ausdrücke

$$
x = \alpha_0 - \frac{1}{g_\alpha}\frac{w}{\left[\frac{1}{g}\right]} \qquad y = \beta_0 - \frac{1}{g_\beta}\frac{w}{\left[\frac{1}{g}\right]}
$$

$$
z = \gamma_0 - \frac{1}{g_\gamma}\frac{w}{\left[\frac{1}{g}\right]} \qquad t = \delta_0 - \frac{1}{g_\delta}\frac{w}{\left[\frac{1}{g}\right]}
$$

umgekehrt proportional den Winkelgewichten. Die Winkelverbesserungen lauten dann:

$$v_\alpha = x - \alpha_0 = -\frac{1}{g_\alpha}\,\frac{w}{\left[\frac{1}{g}\right]}, \qquad v_\beta = y - \beta_0 = -\frac{1}{g_\beta}\,\frac{w}{\left[\frac{1}{g}\right]},$$

$$v_\gamma = z - \gamma_0 = -\frac{1}{g_\gamma}\,\frac{w}{\left[\frac{1}{g}\right]}, \qquad v_\delta = t - \delta_0 = -\frac{1}{g_\delta}\,\frac{w}{\left[\frac{1}{g}\right]},$$

und es ist, da die Anzahl der Bedingungsgleichungen $r = 1$ ist, der mittlere Fehler der Gewichtseinheit:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[g\,v\,v]}{r}} = \frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{g}\right]}}.$$

Der mittlere Fehler eines ausgeglichenen Winkels, z. B. x, ist nach § 55 des 1. Bandes:

$$M_x = w\,\frac{\sqrt{\frac{1}{g_\alpha}\left(\left[\frac{1}{g}\right] - \frac{1}{g_\alpha}\right)}}{\left[\frac{1}{g}\right]}.$$

Bei n gemessenen Winkeln mit gleichen Gewichten wird

$$\mu_0 = \frac{w}{\sqrt{n}} \quad \text{und} \quad M = w\,\frac{\sqrt{n-1}}{n} = \mu_0\sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

Die Aufgabe des Horizontabschlusses, die hier durch Zurückführung auf vermittelnde Beobachtungen gelöst wurde und selbstverständlich auch nach dem Korrelatenverfahren behandelt werden kann, ist nur ein spezieller Fall des allgemeinen Problems des Stationsabschlusses, welches im folgenden Paragraphen durchgenommen wird.

§ 18. Stationsausgleichung.

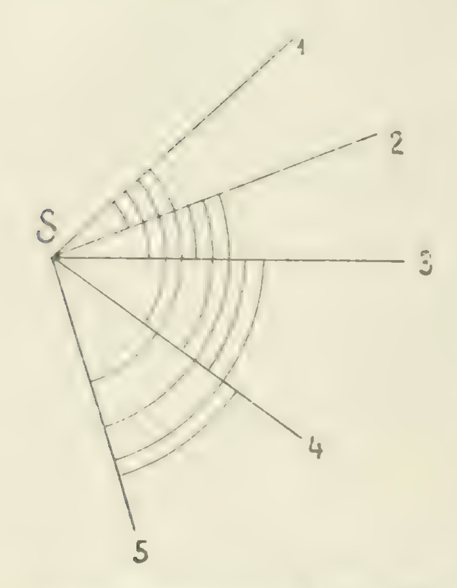
Wenn auf einer Beobachtungsstation mehrere Winkel zu messen sind, so wird man, um die Genauigkeit zu erhöhen, zweckmäßig nicht bloß die einzelnen Winkel, sondern auch die Summen von zwei und mehreren Winkeln messen, wodurch eine entsprechende Anzahl von Bedingungsgleichungen auftreten, denen die wahrscheinlichsten Winkelwerte strenge zu genügen haben. Am zweckmäßigsten ist hiebei die Anwendung der Winkelmessung in allen Kombinationen.

Hat man auf der Station S (Fig. 14, S. 64) die vier Winkel

$$\sphericalangle 1S2 = A, \qquad \sphericalangle 1S3 = B, \qquad \sphericalangle 1S4 = C, \qquad \sphericalangle 1S5 = D$$

zu bestimmen, so wird man als überschüssige Beobachtungen auch noch die Winkel $2S3 = E$, $2S4 = F$, $2S5 = G$, sowie $3S4 = H$, $3S5 = J$ und $4S5 = K$ dazu nehmen. Es handelt sich nun darum, aus den 10 Beobachtungen A', B', C', D', E', F', G', H', J', K' die wahrscheinlichsten Werte der 4 Winkel A, B, C, D durch Ausgleichung zu berechnen.


Fig. 11



Führt man wieder wie bei dem Horizontabschluß Näherungswerte ein, so geht die Aufgabe dahin, aus den restlichen Ergänzungen A_0 bis K_0 zu den Näherungswerten A_n bis K_n die den 4 Näherungswerten A_n, B_n, C_n, D_n zukommenden wahrscheinlichsten Ergänzungen x_1, x_2, x_3, x_4 zu ermitteln. Da zwischen den ausgeglichenen Werten A bis K der 10 Winkel, deren Näherungswerten A_n bis K_n und deren wahrscheinlichsten Ergänzungen x_1 bis x_{10} die 6 Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\begin{array}{llll}
E = B - A & E_n = B_n - A_n & E_n + x_5 = (B_n + x_2) - (A_n + x_1) & x_5 = x_2 - x_1 \\
F = C - A & F_n = C_n - A_n & F_n + x_6 = (C_n + x_3) - (A_n + x_1) & x_6 = x_3 - x_1 \\
G = D - A & G_n = D_n - A_n & G_n + x_7 = (D_n + x_4) - (A_n + x_1) & x_7 = x_4 - x_1 \\
H = C - B & H_n = C_n - B_n & H_n + x_8 = (C_n + x_3) - (B_n + x_2) & x_8 = x_3 - x_2 \\
J = D - B & J_n = D_n - B_n & J_n + x_9 = (D_n + x_4) - (B_n + x_2) & x_9 = x_4 - x_2 \\
K = D - C & K_n = D_n - C_n & K_n + x_{10} = (D_n + x_4) - (C_n + x_3) & x_{10} = x_4 - x_3,
\end{array}$$

so erhält man in ähnlicher Weise wie bei dem Horizontabschlusse 10 Fehlergleichungen von der allgemeinen Form

$$a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d\,x_4 - l = v,$$

welche nur die voneinander unabhängigen vier Unbekannten x_1 bis x_4 enthalten, nämlich:

$$\begin{array}{rrrrl}
x_1 & . & . & . & - A_0 = v_1 \\
. & x_2 & . & . & - B_0 = v_2 \\
. & . & x_3 & . & - C_0 = v_3 \\
. & . & . & x_4 & - D_0 = v_4 \\
- x_1 & + x_2 & . & . & - E_0 = v_5 \\
- x_1 & . & + x_3 & . & - F_0 = v_6 \\
- x_1 & . & . & + x_4 & - G_0 = v_7 \\
. & - x_2 & + x_3 & . & - H_0 = v_8 \\
. & - x_2 & . & + x_4 & - J_0 = v_9 \\
. & . & - x_3 & + x_4 & - K_0 = v_{10}.
\end{array}$$

Nimmt man gleiche Gewichte an, so lauten die entsprechenden Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - (A_0 - E_0 - F_0 - G_0) &= 0\\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 - (B_0 + E_0 - H_0 - J_0) &= 0\\ -x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 - (C_0 + F_0 + H_0 - K_0) &= 0\\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 - (D_0 + G_0 + J_0 + K_0) &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Beispiel. (Entlehnt aus Gerling: „Ausgleichungsrechnung der praktischen Geometrie", 1843.)

Zwischen vier Strahlen seien folgende sechs Winkel A' bis F' gemessen worden, wozu wir die gewählten Näherungswerte (Grade und Minuten) und die übrigbleibenden Zuschläge (Sekunden) ansetzen:

$$\begin{array}{lll} A' = 48^0\,17'\,01''4 & A_{,,} = 48^0\,17' & A_0 = +\ 1''4\\ B' = 96\ 52\ 16{\cdot}8 & B_{,,} = 96\ 52 & B_0 = +\ 16{\cdot}8\\ C' = 152\ 54\ 06{\cdot}8 & C_{,,} = 152\ 54 & C_0 = +\ 6{\cdot}8\\ D' = 48\ 35\ 14{\cdot}3 & D_{,,} = 48\ 35 & D_0 = +\ 14{\cdot}3\\ E' = 104\ 37\ 07{\cdot}8 & E_{,,} = 104\ 37 & E_0 = +\ 7{\cdot}8\\ F' = 56\ 01\ 48{\cdot}9 & F_{,,} = 56\ 02 & F_0 = -\ 11{\cdot}1. \end{array}$$

Bei der Bestimmung der Näherungswerte ist zu beachten, daß sie die Bedingungsgleichungen richtig erfüllen. Um dieser Forderung gerecht zu werden, wurde für $F_{,,} = 56^0\,02'$ und nicht $56^0\,01'$ gesetzt.

Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad - 1{\cdot}4 &= v_1\\ x_2 \qquad - 16{\cdot}8 &= v_2\\ x_3 - 6{\cdot}8 &= v_3\\ -x_1 + x_2 \qquad - 14{\cdot}3 &= v_4\\ -x_1 \qquad + x_3 - 7{\cdot}8 &= v_5\\ -x_2 + x_3 + 11{\cdot}1 &= v_6. \end{aligned}$$

Absolute Glieder der Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} l_1 &= -\ 1{\cdot}4 + 14{\cdot}3 + 7{\cdot}8 = +\ 20{\cdot}7\\ l_2 &= -\ 16{\cdot}8 - 14{\cdot}3 - 11{\cdot}1 = -\ 42{\cdot}2\\ l_3 &= -\ 6{\cdot}8 - 7{\cdot}8 + 11{\cdot}1 = -\ 3{\cdot}5. \end{aligned}$$

Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 + 20{\cdot}7 &= 0\\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - 42{\cdot}2 &= 0\\ -x_1 - x_2 + 3x_3 - 3{\cdot}5 &= 0. \end{aligned}$$

Auflösung der Normalgleichungen:

$$x_1 = +\ 1{\cdot}1, \qquad x_2 = +\ 16{\cdot}8, \qquad x_3 = +\ 7{\cdot}1.$$

Ergebnisse:

$$A = A_0 + x_1 = 48^\circ 17' 01''1$$
$$B = B_0 + x_2 = 96\ 52\ 16{\cdot}8$$
$$C = C_0 + x_3 = 152\ 54\ 07{\cdot}1.$$

§ 19. Winkelmessung in allen Kombinationen.

Das Problem der Ausgleichung von Winkelmessungen in allen Kombinationen zeichnet sich durch eine besonders übersichtliche Anordnung aus. Bildet man die Summe der Normalgleichungen (1) des § 18:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - (A_0 + B_0 + C_0 + D_0) = 0$$

und addiert man diese Summengleichung zu jeder einzelnen Normalgleichung, so ergeben sich die Unbekannten in der Form:

$$x_1 = \frac{2\,A_0 + (B_0 - E_0) + (C_0 - F_0) + (D_0 - G_0)}{5}$$

$$x_2 = \frac{2\,B_0 + (A_0 + E_0) + (C_0 - H_0) + (D_0 - J_0)}{5}$$

$$x_3 = \frac{2\,C_0 + (A_0 + F_0) + (B_0 + H_0) + (D_0 - K_0)}{5}$$

$$x_4 = \frac{2\,D_0 + (A_0 + G_0) + (B_0 + J_0) + (C_0 + K_0)}{5}.$$

Aus diesen Formeln kann man herauslesen, daß der wahrscheinlichste Wert irgend einer Winkelergänzung x in der Weise sich berechnet, daß aus dem doppelten Betrage seines unmittelbar erhaltenen Wertes und den einfachen Beträgen aller aus den übrigen Winkelmessungen durch Subtraktion oder Addition abgeleiteten Werte das allgemeine arithmetische Mittel genommen wird. Was für die Winkelergänzungen gilt, findet selbstverständlich auch auf die Winkelgrößen selbst Anwendung. Man kann daher auch sagen: Um den wahrscheinlichsten Wert eines Winkels, der in allen möglichen Kombinationen gemessen wurde, zu erhalten, nehme man die zu seiner Bestimmung direkt angestellte Messung mit dem doppelten Gewichte und alle diejenigen Winkelwerte, welche aus den übrigen Winkelmessungen indirekt sich ergeben, mit einfachem Gewichte und bilde daraus mit Rücksicht auf diese Gewichte das allgemeine arithmetische Mittel.

In dem Beispiele des § 18 ist übereinstimmend mit den Ergebnissen auf S. 65:

$A_0 = 1''4$	$B_0 = 16''8$	$C_0 = 6''8$
$A_0 = 1{\cdot}4$	$B_0 = 16{\cdot}8$	$C_0 = 6{\cdot}8$
$B_0 - D_0 = 2{\cdot}5$	$C_0 - E_0 = 17{\cdot}9$	$A_0 - E_0 = 9{\cdot}2$
$C_0 - E_0 = -1{\cdot}0$	$A_0 + D_0 = 15{\cdot}7$	$B_0 - F_0 = 5{\cdot}7$
Mittel: $x_1 = 1{\cdot}1$	$x_2 = 16{\cdot}8$	$x_3 = 7{\cdot}1.$

Durch Hinzufügung dieser Verbesserungen zu den genäherten Winkelwerten ergibt sich:

$$A = A_0 + x_1 = 48^\circ\, 17'\, 01''1 \qquad D = 48^\circ\, 35'\, 15''7$$
$$B = B_0 + x_2 = 96\;\; 52\;\; 16{\cdot}8 \qquad E = 104\;\; 37\;\; 06{\cdot}0$$
$$C = C_0 + x_3 = 152\;\; 54\;\; 07{\cdot}1 \qquad F = 56\;\; 01\;\; 50{\cdot}3.$$

Vergleicht man diese ausgeglichenen Winkel mit den gemessenen Winkeln S. 65, so erhält man die übrigbleibenden Fehler v:

$$-0''3, \qquad 0''0, \qquad +0''3, \qquad +1''4, \qquad -1''8, \qquad +1''4$$

und damit den mittleren Fehler eines gemessenen Winkels:

$$\mu = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-u}} = \sqrt{\frac{7{\cdot}34}{6-3}} = \pm 1''56.$$

Macht man Winkelmessungen in allen Kombinationen zwischen s Strahlen, so ist $\frac{s(s-1)}{2}$ die Anzahl aller Winkel und $s-1$ die Anzahl der unabhängigen, unbekannten Winkel, folglich ist die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen

$$n - u = \frac{s(s-1)}{2} - (s-1) = \frac{(s-1)(s-2)}{2}$$

und der mittlere Fehler eines gemessenen Winkels vor der Ausgleichung:

$$\mu = \sqrt{\frac{2\,[v\,v]}{(s-1)(s-2)}}. \tag{1}$$

Führt man die Rechnung in der Form von Richtungen durch, so hat man, da eine Richtungsmessung im Vergleiche zu einer Winkelmessung das doppelte Gewicht hat (§ 15), für den mittleren Fehler einer gemessenen Richtung die Formel:

$$\mu' = \frac{\mu}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[v\,v]}{(s-1)(s-2)}}. \tag{2}$$

Aus den Normalgleichungen (1) des § 18, S. 65, erhält man die Gewichtsgleichungen:

$$\begin{aligned}
4\,[\alpha\alpha] - [\alpha\beta] - [\alpha\gamma] - [\alpha\delta] &= 1 \\
-[\alpha\alpha] + 4\,[\alpha\beta] - [\alpha\gamma] - [\alpha\delta] &= 0 \\
-[\alpha\alpha] - [\alpha\beta] + 4\,[\alpha\gamma] - [\alpha\delta] &= 0 \\
-[\alpha\alpha] - [\alpha\beta] - [\alpha\gamma] + 4\,[\alpha\delta] &= 0
\end{aligned}$$

und hieraus, wenn wieder die Summengleichung

$$[\alpha\alpha] + [\alpha\beta] + [\alpha\gamma] + [\alpha\delta] = 1$$

zu jeder einzelnen Gewichtsgleichung hinzugefügt wird, die Gewichtskoeffizienten:

$$[\alpha\alpha] = \frac{2}{5}, \quad [\alpha\beta] = 0, \quad [\alpha\gamma] = 0, \quad [\alpha\delta] = 0$$

und analog:

$$[\alpha\beta] = 0, \quad [\beta\beta] = \frac{2}{5}, \quad [\beta\gamma] = 0, \quad [\beta\delta] = 0 \text{ usw.}$$

In diesen Ausdrücken ist, wenn allgemein s Strahlen vorkommen, statt 5 überall s zu setzen. Damit erhält man die Winkelgewichte nach der Ausgleichung bei s Strahlen:

$$P = \frac{1}{[\alpha\alpha]} = \frac{1}{[\beta\beta]} = \cdots = \frac{s}{2}$$

und den mittleren Fehler eines Winkels nach der Ausgleichung:

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{P}} = \mu\sqrt{\frac{2}{s}}. \tag{3}$$

In dem voranstehenden Beispiele ist $s = 4$, also $M = \frac{\mu}{\sqrt{2}} = \pm 1''10$.

Bezeichnet man das Gewicht einer Richtung nach der Ausgleichung mit Q, wobei das Gewicht eines Winkels vor der Ausgleichung zur Einheit genommen wird, so hat man, da das Winkelgewicht halb so groß ist als das Richtungsgewicht, die Beziehung:

$$\frac{Q}{2} = P = \frac{s}{2}, \text{ sohin } Q = s.$$

Hat also bei der Winkelmessung in allen Kombinationen mit s Strahlen ein gemessener Winkel das Gewicht 1, so hat jeder ausgeglichene Winkel das Gewicht $P = \frac{s}{2}$ und jede ausgeglichene Richtung das Gewicht $Q = s$. Legt man aber einer beobachteten Richtung das Gewicht 1 bei, so hat ein gemessener Winkel das Gewicht $\frac{1}{2}$, und es kommt jedem ausgegli-

ebenen Winkel das Gewicht $\frac{s}{4}$ und jeder ausgeglichenen Richtung das Gewicht $\frac{s}{2}$ zu. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist hiebei nach den Formeln (1) und (2) zu rechnen, je nachdem Winkel- oder Richtungsmessungen zugrunde gelegt werden.

Aus dieser Untersuchung geht hervor, daß die auf einer Station in allen Kombinationen angestellten Winkelmessungen ersetzt werden können durch einen einzigen vollen Satz von Richtungsmessungen mit einem bestimmten Richtungsgewichte, welches von der Anzahl s der Strahlen und der Anzahl n der Wiederholungen abhängig und daher durch das Produkt ns ausgedrückt ist. Haben in einem Dreiecksnetze die einzelnen Stationen verschiedene Anzahlen von Richtungen und verschiedene Wiederholungen der Kombinationsmessungen, so werden die den letzteren äquivalenten Richtungssätze verschiedene Richtungsgewichte $n_1 s_1$, $n_2 s_2$, $n_3 s_3$. . . . . besitzen, wodurch die Gesamtausgleichung erschwert wird. General Schreiber (1874) hat daher vorgeschlagen, die Wiederholungszahlen n so zu wählen, daß die Produkte ns möglichst gleich werden, also alle Richtungen des ganzen Netzes annähernd gleiche Gewichte erhalten, wobei jedoch die Wiederholungszahlen daran gebunden sind, daß die Richtungen behufs möglichster Eliminierung der Teilungsfehler um aliquote Teile des Kreisumfanges, nämlich um $\frac{180^0}{n}$ gleichmäßig verstellt werden müssen so daß sich die Gleichheit der Gewichte ns im allgemeinen nur annähernd erreichen läßt.

Schreiber setzt ns annähernd gleich 24, z. B. für $s=12$, $n=2$, für $s=8$, $n=3$, für $s=6$, $n=4$, für $s=5$, $n=5$. Bei $s=4$ Richtungen und $n=6$ Wiederholungen ergeben sich z. B. folgende Kreisstellungen, wobei I und II die beiden Fernrohrlagen andeuten:

Winkel	I	I	I	II	II	II
ASB	0°	30°	60°	90°	120°	150°
ASC	10	40	70	100	130	160
ASD	20	50	80	110	140	170
BSC	20	50	80	110	140	170
BSD	10	40	70	100	130	160
CSD	0	30	60	90	120	150

Mit Rücksicht auf die Wiederholungszahl n ergibt sich bei Winkelmessungen als mittlerer Fehler der Gewichtseinheit die Formel:

$$\mu = \sqrt{\frac{2\,n\,[r\,r]}{(s-1)(s-2)}} \tag{4}$$

und als mittlerer Fehler des Winkelmittels:

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2\,[r\,r]}{(s-1)(s-2)}} \tag{5}$$

Für Richtungsmessungen entfällt im Zähler von (4) und (5) der Faktor 2.

Die wesentlichsten Vorteile des Schreiberschen Winkelmeßverfahrens sind:

1. Alle Richtungen des Netzes erlangen gleiche Gewichte.
2. Die Teilungsfehler werden rationell aufgehoben.
3. Die Stationsausgleichung gestaltet sich sehr bequem.
4. Bei möglichster Zeitersparnis wird auch an Genauigkeit gewonnen.

Näheres hierüber enthalten die Mitteilungen von General Schreiber: „Die Königl. Preuß. Landestriangulation. Hauptdreiecke, II. Teil, 2. Abt. 1874" und „Über die Anordnung von Horizontalwinkelbeobachtungen auf der Station" in der Zeitschr. f. Verm. 1878, S. 209 bis 237.

§ 20. Satzbeobachtungen.

a) Vollständige Richtungssätze.

Die Methode der Satz- oder Richtungsbeobachtungen besteht bekanntlich darin, daß man von der Beobachtungsstation aus alle Zielpunkte der Reihe nach zuerst in der einen Kreislage und sodann in umgekehrter Reihenfolge bei durchgeschlagenem Fernrohr in der anderen Kreislage beobachtet und an allen Mikroskopen abliest. Hiedurch befreit man die Beobachtungen vom Kollimations- und Exzentrizitätsfehler, sowie von dem Einflusse der durch die Sonnenbescheinung hervorgerufenen Instrumentendrehung. Bei Anstellung mehrerer Sätze verstellt man den Limbuskreis um aliquote Teile des ganzen Umfanges, und zwar bei n Sätzen um einen Bogen von $\frac{\pi}{n}$ Spannung, wodurch man von dem periodischen Teilungsfehler unabhängig wird.

Hat man auf einer Station einen vollen Richtungssatz bei verschiedener Limbusstellung mehrfach wiederholt, so kann man von den Ablesungen je eines Zielpunktes in allen Sätzen einfach das arithmetische Mittel als Schlußergebnis der Satzmessung nehmen, wobei ein Horizontabschluß entfällt.

Wurden beispielsweise auf der Station S die vier Sichten nach A, B, C, D zu einem Satze vereinigt und dieser Satz bei der jedesmal um 30⁰ verstellten Kreislage sechsmal wiederholt, so stellt sich das Gesamtergebnis wie folgt:

Richtungen von S nach	Limbusstellung						Richtungsmittel I
	0⁰	30⁰	60⁰	90⁰	120⁰	150⁰	
A: 0⁰ 00′	0″0	0″0	0″0	0″0	0″0	0″0	A_m = 0″00
B: 67 15	17·0	20·5	20·0	21·0	18·5	14·5	B_m = 18·58
C: 285 46	44·0	44·5	47·5	48·5	40·0	47·5	C_m = 45·33
D: 332 21	21·5	19·5	20·0	23·5	21·0	18·5	D_m = 20·67
Satzmittel II:	20·63	21· 3	21·88	23·25	19·88	20·13	III = 21·15
Satzverdrehung III—II:	+ 0·52	− 0·02	− 0·73	− 2·10	+ 1·27	+ 1·02	0·00
A': 359⁰ 59′	60·52	60·02	59·27	57·90	61·27	61·02	60·00
B': 67 15	17·52	20·52	19·27	18·90	19·77	15·52	18·58
C': 285 46	44·52	44·52	46·77	46·40	41·27	48·52	45·33
D': 332 21	22·02	19·52	19·27	21·40	22·27	19·52	20·67
Satzmittel II′:	21·15	21·15	21·15	21·15	21·15	21·15	III = 21·15
$v =$ $A_m - A'$	0·52	− 0·02	− 0·73	+ 2·10	1·27	− 1·02	0·00
$B_m - B'$	+ 1·06	− 1·94	− 0·69	− 0·32	− 1·19	− 3·06	− 0·02
$C_m - C'$	+ 0·81	+ 0·81	− 1·44	− 1·07	+ 4·06	− 3·19	− 0·02
$D_m - D'$	− 1·35	+ 1·15	+ 1·40	− 0·73	− 1·60	+ 1·15	0·02
	0·00	0·00	0·00	− 0·02	0·00	0·00	− 0·02
$v^2 =$	0·27	0·00	0·53	4·41	1·61	1·04	7·86
	1·12	3·76	0·48	0·10	1·42	9·36	16·24
	0·66	0·66	2·07	1·14	16·48	10·18	31·19
	1·82	1·32	1·96	0·53	2·56	1·32	9·51
	3·87	5·74	5·04	6·18	22·07	21·90	$[vv]$ = 64·80

Man berechne das Gesamtmittel III sowohl aus den Richtungsmitteln I als auch aus den Satzmitteln II, wobei sich dasselbe bei richtiger Rechnung gleichlautend ergeben muß. Die definitiven Richtungen sind dann:

$$
\begin{aligned}
S - A &: \quad 0^0\,00'\,00''00 \\
S - B &: \quad 67 \;\; 15 \;\; 18{\cdot}58 \\
S - C &: \; 285 \;\; 46 \;\; 45{\cdot}33 \\
S - D &: \; 332 \;\; 21 \;\; 20{\cdot}67.
\end{aligned}
$$

Addiert man die Satzverdrehungen III — II zu den einzelnen Richtungen A, B, C, D, so ergeben sich die verdrehten Richtungen A', B', C', D', deren Satzmittel II′ nunmehr alle gleich werden. Durch Vergleichung der verdrehten Richtungen A', B', C', D' mit den Rich-

tungsmitteln $A_{,,,,}$ $B_{,,,,}$ $C_{,,,,}$ $D_{,,,,}$ erhält man die scheinbaren Fehler v, welche in vertikalen und horizontalen Zeilen addiert bis auf kleine Abrundungsdifferenzen überall die Summe Null ergeben sollen, wie es der angewendeten Regel des arithmetischen Mittels bei gleichen Messungsgewichten entspricht. Der mittlere Fehler einer Richtung in einem Satze ist dann (s. Formel 7, S. 76)

$$\mu = \sqrt{\frac{[v\,v]}{(n-1)\,(s-1)}} = \sqrt{\frac{64{\cdot}80}{5\,.\,3}} = \pm 2''08,$$

wobei n die Anzahl der Sätze und s die Anzahl der Richtungen in einem Satze bedeutet. Der mittlere Fehler einer ausgeglichenen Richtung, welche als das Mittel aus sechs Sätzen hervorgegangen ist, ergibt sich zu

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{6}} = \pm 0''85.$$

b) Unvollständige Richtungssätze.

α) Bessels strenge Methode.

Sind die einzelnen Sätze nicht alle vollständig, was bei Anwendung von Heliotropen durch das Ausfallen einzelner zeitweilig unsichtbarer Objekte oft eintritt, so erfolgt die Ausgleichung nach dem von Bessel angegebenen strengen Verfahren in folgender Weise.

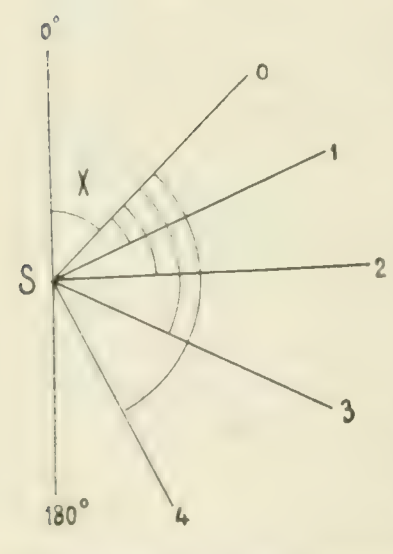


Fig. 15.

Sind auf einer Station S die Winkel $0\,S\,1 = A$, $0\,S\,2 = B$, $0\,S\,3 = C$, $0\,S\,4 = D$ (Fig. 15) durch Satzbeobachtungen zu bestimmen, so bedarf es zu deren strengen Ausgleichung der Einführung desjenigen Winkels X, den die Nullrichtung des Limbuskreises mit der ihr zunächst liegenden Richtung bildet. Denn wenn man die Größe des Einflusses, welchen die Verbesserungen der Richtungen auf den Anfangspunkt üben, kennen lernen will, um daraus zu erfahren, wie große Änderungen dieselben an das Resultat der Beobachtungen aller Richtungen auf jedem Dreieckspunkte anzubringen nötigen, so wird es erforderlich, auch die zum Anfange gewählte Richtung unbestimmt zu lassen. (Bessel-Baeyer: Gradmessung in Ostpreußen, S. 134.)

Liegen unvollständige Richtungssätze vor, so teilt man alle vorhandenen Beobachtungen in Gruppen ein, die immer dasselbe Ausgangs-

objekt enthalten und worin auch dieselben Objekte vorkommen. Erteilt man den in die 1., 2., 3., . . . Gruppe eingereihten Beobachtungen die Fußindizes 1, 2, 3, . . ., den zu den verschiedenen Sätzen gehörigen Beobachtungen die Kopfzeichen ', '', ''', . . .; bezeichnet man ferner die Mittel der Lesungen für die Richtungen 0, 1, 2, 3, . . . im r-ten Satze mit

$$x_r,\ A_r,\ B_r,\ C_r,\ D_r$$

und die wahrscheinlichsten Werte der Richtungen im r-ten Satze mit

$$X_r,\quad X_r + A,\quad X_r + B,\quad X_r + C,\quad X_r + D,$$

daher die übrigbleibenden Fehler für den r-ten Satz mit

$$x_r - X_r,\ A_r - (X_r + A),\ B_r - (X_r + B),\ C_r - (X_r + C),\ D_r - (X_r + D),$$

so hat man für die erste Gruppe, worin alle vollständigen Sätze aufgenommen erscheinen und n_1 Sätze mit s_1 Objekten, also $n_1 s_1$ Gleichungen vorkommen, folgende Summe von Fehlerquadraten:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 = (x_1 - X_1)^2 &+ (A_1 - X_1 - A)^2 + (B_1 - X_1 - B)^2 + (C_1 - X_1 - C)^2 + \\
&+ (D_1 - X_1 - D)^2 + \\
+ (x_1' - X_1')^2 &+ (A_1' - X_1' - A)^2 + (B_1' - X_1' - B)^2 + (C_1' - X_1' - C)^2 + \\
&+ (D_1' - X_1' - D)^2 + \\
+ (x_1'' - X_1'')^2 &+ (A_1'' - X_1'' - A)^2 + (B_1'' - X_1'' - B)^2 + (C_1'' - X_1'' - C)^2 + \\
&+ (D_1'' - X_1'' - D)^2 + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Für die zweite Gruppe mit n_2 Sätzen und s_2 Objekten, worin also D nicht mehr vorkommt, ist:

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 = (x_2 - X_2)^2 &+ (A_2 - X_2 - A)^2 + (B_2 - X_2 - B)^2 + (C_2 - X_2 - C)^2 + \\
+ (x_2' - X_2')^2 &+ (A_2' - X_2' - A)^2 + (B_2' - X_2' - B)^2 + (C_2' - X_2' - C)^2 + \\
+ (x_2'' - X_2'')^2 &+ (A_2'' - X_2'' - A)^2 + (B_2'' - X_2'' - B)^2 + (C_2'' - X_2'' - C)^2 + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Für die dritte Gruppe mit n_3 Sätzen und s_3 Objekten, wobei C und D ausgelassen erscheinen, ist:

$$\begin{aligned}
\Sigma_3 = (x_3 - X_3)^2 &+ (A_3 - X_3 - A)^2 + (B_3 - X_3 - B)^2 + \\
+ (x_3' - X_3')^2 &+ (A_3' - X_3' - A)^2 + (B_3' - X_3' - B)^2 + \\
+ (x_3'' - X_3'')^2 &+ (A_3'' - X_3'' - A)^2 + (B_3'' - X_3'' - B)^2 + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

usw.

Um die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten

$$X_1,\ X_1',\ X_1'',\ \ldots\ X_2,\ X_2',\ X_2'',\ \ldots\ X_3,\ X_3',\ X_3'',\ \ldots\ A,\ B,\ C,\ D$$

zu ermitteln, hat man die partiellen Differentialquotienten der Summe $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \cdots$ nach jeder Unbekannten gleich Null zu setzen und aus den hiedurch erhaltenen Normalgleichungen die Unbekannten zu berechnen. Man erhält:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial \Sigma}{\partial X_1} &= 0 = s_1 X_1 - x_1 - (A_1 + B_1 + C_1 + D_1) + (A + B + C + D) \\
\frac{1}{2}\frac{\partial \Sigma}{\partial X_1'} &= 0 = s_1 X_1' - x_1' - (A_1' + B_1' + C_1' + D_1') + (A + B + C + D) \\
\frac{1}{2}\frac{\partial \Sigma}{\partial X_1''} &= 0 = s_1 X_1'' - x_1'' - (A_1'' + B_1'' + C_1'' + D_1'') + (A + B + C + D) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial \Sigma}{\partial X_2} &= 0 = s_2 X_2 - x_2 - (A_2 + B_2 + C_2) + (A + B + C) \\
\frac{1}{2}\frac{\partial \Sigma}{\partial X_2'} &= 0 = s_2 X_2' - x_2' - (A_2' + B_2' + C_2') + (A + B + C) \\
\frac{1}{2}\frac{\partial \Sigma}{\partial X_2''} &= 0 = s_2 X_2'' - x_2'' - (A_2'' + B_2'' + C_2'') + (A + B + C) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial \Sigma}{\partial X_3} &= 0 = s_3 X_3 - x_3 - (A_3 + B_3) + (A + B) \\
\frac{1}{2}\frac{\partial \Sigma}{\partial X_3'} &= 0 = s_3 X_3' - x_3' - (A_3' + B_3') + (A + B) \\
\frac{1}{2}\frac{\partial \Sigma}{\partial X_3''} &= 0 = s_3 X_3'' - x_3'' - (A_3'' + B_3'') + (A + B) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial \Sigma}{\partial A} = 0 = {} & X_1 + X_1' + X_1'' + \cdots + n_1 A - (A_1 + A_1' + A_1'' + \cdots) + \\
& + X_2 + X_2' + X_2'' + \cdots + n_2 A - (A_2 + A_2' + A_2'' + \cdots) + \\
& + X_3 + X_3' + X_3'' + \cdots + n_3 A - (A_3 + A_3' + A_3'' + \cdots) + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial \Sigma}{\partial B} = 0 = {} & X_1 + X_1' + X_1'' + \cdots + n_1 B - (B_1 + B_1' + B_1'' + \cdots) + \\
& + X_2 + X_2' + X_2'' + \cdots + n_2 B - (B_2 + B_2' + B_2'' + \cdots) + \\
& + X_3 + X_3' + X_3'' + \cdots + n_3 B - (B_3 + B_3' + B_3'' + \cdots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial \Sigma}{\partial C} = 0 = {} & X_1 + X_1' + X_1'' + \cdots + n_1 C - (C_1 + C_1' + C_1'' + \cdots) + \\
& + X_2 + X_2' + X_2'' + \cdots + n_2 C - (C_2 + C_2' + C_2'' + \cdots)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Sigma}{\partial D} = 0 = X_1 + X_1' + X_1'' + \cdots + n_1 D - (D_1 + D_1' + D_1'' + \cdots)$$

oder die letzten vier Gleichungen in einfacherer Form:

$$
\left.\begin{aligned}
0 &= [X_1] + [X_2] + [X_3] + \cdots + A\,(n_1 + n_2 + n_3 + \cdots) - \\
&\qquad - [A_1] - [A_2] - [A_3] - \cdots \\
0 &= [X_1] + [X_2] + [X_3] + B\,(n_1 + n_2 + n_3) - [B_1] - [B_2] - [B_3] \\
0 &= [X_1] + [X_2] + C\,(n_1 + n_2) - [C_1] - [C_2] \\
0 &= [X_1] + n_1 D - [D_1].
\end{aligned}\right\} \qquad (4)
$$

Um aus diesen Gleichungen die Hilfsgrößen $[X_1]$, $[X_2]$, $[X_3]$, ... zu eliminieren, bilde man aus (1), (2), (3), ... beziehungsweise:

$$[X_1] = \frac{1}{s_1}\left\{[x_1] + [A_1] + [B_1] + [C_1] + [D_1]\right\} - \frac{n_1}{s_1}(A + B + C + D)$$

$$[X_2] = \frac{1}{s_2}\left\{[x_2] + [A_2] + [B_2] + [C_2]\right\} - \frac{n_2}{s_2}(A + B + C)$$

$$[X_3] = \frac{1}{s_3}\left\{[x_3] + [A_3] + [B_3]\right\} - \frac{n_3}{s_3}(A + B),$$

womit die Gleichungen (4) übergehen in (5):

$$
\begin{aligned}
0 = A&\left\{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots - \left(\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} + \frac{n_3}{s_3} + \cdots\right)\right\} - B\left\{\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} + \right. \\
&\left. + \frac{n_3}{s_3}\right\} - C\left\{\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2}\right\} - D\frac{n_1}{s_1} - \left\{[A_1] + [A_2] + [A_3] + \cdots - \right. \\
&- \frac{1}{s_1}([x_1] + [A_1] + [B_1] + [C_1] + [D_1]) - \frac{1}{s_2}([x_2] + [A_2] + \\
&\left. + [B_2] + [C_2]) - \frac{1}{s_3}([x_3] + [A_3] + [B_3]) - \cdots\right\} \\
0 = -A&\left\{\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} + \frac{n_3}{s_3}\right\} + B\left\{n_1 + n_2 + n_3 - \left(\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} + \frac{n_3}{s_3}\right)\right\} - \\
&- C\left\{\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2}\right\} - D\frac{n_1}{s_1} - \left\{[B_1] + [B_2] + [B_3] - \frac{1}{s_1}([x_1] + [A_1] + \right. \\
&+ [B_1] + [C_1] + [D_1]) - \frac{1}{s_2}([x_2] + [A_2] + [B_2] + [C_2]) - \\
&\left. - \frac{1}{s_3}([x_3] + [A_3] + [B_3])\right\} \\
0 = -A&\left\{\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2}\right\} - B\left\{\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2}\right\} + C\left\{n_1 + n_2 - \left(\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2}\right)\right\} - D\frac{n_1}{s_1} - \\
&- \left\{[C_1] + [C_2] - \frac{1}{s_1}([x_1] + [A_1] + [B_1] + [C_1] + [D_1]) - \right. \\
&\left. - \frac{1}{s_2}([x_2] + [A_2] + [B_2] + [C_2])\right\} \\
0 = -A&\frac{n_1}{s_1} - B\frac{n_1}{s_1} - C\frac{n_1}{s_1} + D\left(n_1 - \frac{n_1}{s_1}\right) - \left\{[D_1] - \frac{1}{s_1}([x_1] + [A_1] + \right. \\
&\left. + [B_1] + [C_1] + [D_1])\right\}.
\end{aligned}
$$

Aus diesen vier Normalgleichungen erhält man die zu suchenden Unbekannten A, B, C, D. — Auch hier wird man vor der Ausrechnung der Normalgleichungen zweckmäßig Näherungswerte einführen, und zwar:

$$A_n = A - A_0, \quad B_n = B - B_0, \quad C_n = C - C_0, \quad D_n = D - D_0,$$

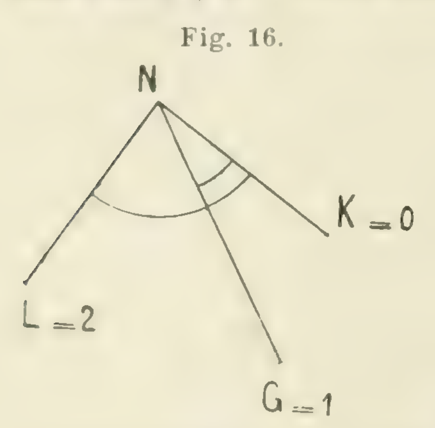
wodurch die übrigbleibenden Fehler für den r-ten Satz übergehen in

$$A_r - X_r - A = A_r - A_n - X_r - A_0 = M_r - X_r - A_0 \text{ usw.},$$

worin die Größen $M_r = A_r - A_n$ gewöhnlich nur wenige Sekunden betragen werden. Die Ausdrücke für die übrigbleibenden Fehler haben also durch Einführung von Näherungswerten ihre Form beibehalten, aber sie enthalten dann statt der großen Zahlen A_r nur noch sehr kleine Zahlen M_r, was auch bei den Unbekannten A_0, B_0, . . . , die nunmehr die Verbesserungen der gewählten Näherungswerte darstellen, der Fall ist.

Der mittlere Fehler einer einzelnen Richtung rechnet sich nach der Formel $\mu = \sqrt{\frac{[v\,v]}{R-u}}$, wo v die übrigbleibenden Fehler und $R-u$ die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen darstellen. Diese Anzahl wird in folgender Weise festgestellt: Wurden nach s Zielpunkten in n Sätzen im ganzen R Richtungen beobachtet, so ist $s-1$ die Anzahl der unbekannten Nullpunktskorrektionen (Orientierungswinkel), also $u = n + s - 1$ die Anzahl aller Unbekannten und es ist allgemein:

Fig. 16.



$$\mu = \sqrt{\frac{[v\,v]}{R-n-s+1}}. \qquad (6)$$

Sind alle Sätze vollständig, so ist $R = n\,s$ und (6) geht über in

$$\mu = \sqrt{\frac{[v\,v]}{(n-1)(s-1)}}. \qquad (7)$$

Beispiel. Als Zahlenbeispiel seien die auf der Station Nidden der „Gradmessung in Ostpreußen" zur Bestimmung der zwei Winkel

$$K\,N\,G = A \quad \text{und} \quad K\,N\,L = B$$

von Bessel angestellten Beobachtungen gewählt (Fig. 16). Die betreffenden, auf die Nullrichtung K reduzierten Lesungen nach den drei Zielpunkten K — Kalleninken, G — Gilge und L — Lattenwalde erscheinen in der folgenden Tabelle eingetragen.

Beobachtungen			Verbesserungen		
Kalleninken K	Gilge G	Lattenwalde L	$v = x_r - X_r$	$v' = A_r - X_r - A_0$	$v'' = B_r - X_r - B_0$
0° 00′ 00″	26° 14′ 50″	87° 04′ 50″			
+ 0″00	+ 0″00	+ 2″75	+ 0″85	— 1″36	+ 0″51
0·00	3·50	2·75	— 0·32	+ 0·98	— 0·66
0·00	1·25	3·00	+ 0·35	— 0·61	+ 0·26
0·00	3·25	4·75	— 0·90	+ 0·14	+ 0·76
0·00	2·25	3·75	— 0·24	— 0·19	+ 0·43
0·00	3·75	3.25	— 0·57	+ 0·98	— 0·41
0·00	— 0·25	1·25	+ 1·43	— 1·03	— 0·41
0·00	1·25	1·75	+ 0·76	— 0·19	— 0·57
0·00	2·25	1·00	+ 0·68	+ 0·73	— 1·41
0·00	0·50	2·25	+ 0·85	— 0·86	+ 0·01
0·00	1·00	4·75	— 0·15	— 1·36	+ 1·51
0·00	1·00	2·25	+ 0·68	— 0·53	— 0·16
$[x_1]$ = 0·00	$[A_1]$ = 19·75	$[B_1]$ = 33·50	— 3·42	— 3·30	— 0·14
		$[v v]$ =	6·51	8·70	6·49
+ 0·00	+ 4·25		— 1·02	+ 1·02	
0·00	3·00		— 0·40	+ 0·40	
0·00	0·75		+ 0·73	— 0·73	
0·00	3·50		— 0·65	+ 0·65	
0·00	4·00		— 0·90	+ 0·90	
0·00	2·50		— 0·15	+ 0·15	
0·00	1·25		+ 0·48	— 0·48	
0·00	4·50		— 1·15	+ 1·15	
0·00	3·00		— 0·40	+ 0·40	
0·00	6·00		— 1·90	+ 1·90	
0·00	1·75		+ 0·23	— 0·23	
0·00	2·75		— 0·27	+ 0·27	
0·00	2·25		— 0·02	+ 0·02	
0·00	0·00		+ 1·10	— 1·10	
0·00	2·00		+ 0·10	— 0·10	
0·00	1·75		+ 0·23	— 0·23	
0·00	0·25		+ 0·98	— 0·98	
0·00	1·00		+ 0·60	— 0·60	
0·00	4·00		— 0·90	+ 0·90	
$[x_2]$ = 0·00	$[A_2]$ = 48·50	$[B_2]$ = 0	— 3·31	+ 3·31	
		$[v v]$ =	11·82	11·82	
+ 0·00		+ 5·00	— 0·96		+ 0·96
0·00		5·75	— 1·33		+ 1·33
0·00		5·50	— 1·21		+ 1·21
0·00		7·00	— 1·96		+ 1·96
0·00		2·00	+ 0·54		— 0·54
0·00		2·75	— 0·17		— 0·17
0·00		1·50	— 0·79		— 0·79
0·00		2·50	+ 0·29		— 0·29
0·00		0·50	+ 1·29		— 1·29
0·00		1·75	+ 0·67		— 0·67
0·00		1·00	+ 1·04		— 1·04
0·00		2·00	+ 0·54		— 0·54
$[x_3]$ = 0·00	$[A_3]$ = 0	$[B_3]$ = 37·25	— 0·13		+ 0·13
		$[v v]$ =	12·49		12·49

Alle Beobachtungen zerfallen in drei Gruppen, und zwar die erste Gruppe mit allen drei Objekten K, G, L und zwölf Sätzen, die zweite Gruppe mit den Objekten K, G und neunzehn Sätzen und die dritte Gruppe mit den Objekten K, L und zwölf Sätzen. Es ist also

$s_1 = 3$	$n_1 = 12$	$n_1 s_1 = 36$
$s_2 = 2$	$n_2 = 19$	$n_2 s_2 = 38$
$s_3 = 2$	$n_3 = 12$	$n_3 s_3 = 24$
$s = 3$	$n = 43$	$R = 98.$

Die Normalgleichungen (5) erhalten für zwei Unbekannte A, B unter der Beachtung, daß alle x gleich Null sind, folgende Gestalt:

$$0 = \left\{n_1 + n_2 - \left(\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2}\right)\right\} A - \frac{n_1}{s_1} B - \left\{[A_1] + [A_2] - \frac{1}{s_1}([A_1] + [B_1]) - \frac{1}{s_2}[A_2]\right\}$$

$$0 = -\frac{n_1}{s_1} A + \left\{n_1 + n_3 - \left(\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_3}{s_3}\right)\right\} B - \left\{[B_1] + [B_3] - \frac{1}{s_1}([A_1] + [B_1]) - \frac{1}{s_3}[B_3]\right\}.$$

Mit den Spezialisierungen für die Normalgleichungskoeffizienten:

$$12 + 19 - \frac{12}{3} - \frac{19}{2} = + 17{\cdot}50, \qquad \frac{12}{3} = + 4{\cdot}00$$

$$12 + 12 - \frac{12}{3} - \frac{12}{2} = + 14{\cdot}00$$

und für die Absolutglieder:

$$19{\cdot}75 + 48{\cdot}50 - \frac{1}{3}(19{\cdot}75 + 33{\cdot}50) - \frac{1}{2} \cdot 48{\cdot}50 = + 26{\cdot}250$$

$$33{\cdot}50 + 37{\cdot}25 - \frac{1}{3}(19{\cdot}75 + 33{\cdot}50) - \frac{1}{2} \cdot 37{\cdot}25 = + 34{\cdot}375,$$

sowie unter Einführung der an die Näherungswerte $A_n = 26^0\,14'\,50''$ und $B_n = 87^0\,04'\,50''$ anzubringenden wahrscheinlichsten Ergänzungen A_0, B_0 als neue Unbekannte erhält man die speziellen Normalgleichungen

$$+ 17{\cdot}50\,A_0 - 4{\cdot}00\,B_0 - 26{\cdot}250 = 0$$
$$- 4{\cdot}00\,A_0 + 14{\cdot}00\,B_0 - 34{\cdot}375 = 0.$$

Die Auflösung gibt:	$A_0 = + 2''205$	$B_0 = + 3''085,$
Näherungswerte:	$A_n = 26^0\,14'\,50''000$	$B_n = 87^0\,04'\,50''000$
Ergebnisse:	$A = 26^0\,14'\,52''205$	$B = 87^0\,04'\,53''085.$

Um die scheinbaren Fehler v zu erhalten, ist die Kenntnis der eliminierten Orientierungsfehler X erforderlich. Dieselben ergeben sich einfach aus den Gleichungen (1), (2) und (3). Es ist z. B.

$$X_1 = \frac{0·00 + 2·75}{3} - \frac{2·205 + 3·085}{3} = 0·917 - 1·763 = - 0·846$$

$$X_1' = 2·083 - 1·763 = + 0·320$$

$$X_1'' = 1·417 - 1·763 = - 0·346, \text{ usw.}$$

$$X_2 = \frac{1}{2}(4·25 - 2·205) = + 1·023$$

$$X_2' = \frac{1}{2}(3·00 - 2·205) = + 0·398, \text{ usw.}$$

Die scheinbaren Fehler sind dann bestimmt nach den allgemeinen Formeln

$$v^0 = x_r - X_r, \qquad v' = A_r - X_r - A_0, \qquad v'' = B_r - X_r - B_0.$$

So ist z. B. in der ersten Gruppe für Gilge:

$$v_1' = 0·00 + 0·846 - 2·205 = - 1·36$$
$$v_2' = 3·50 - 0·320 - 2·205 = + 0·98$$
$$v_3' = 1·25 + 0·346 - 2·205 = - 0·61 \text{ usw.}$$

oder in der ersten Gruppe für Lattenwalde:

$$v_1'' = 2·75 + 0·846 - 3·085 = + 0·51$$
$$v_2'' = 2·75 - 0·320 - 3·085 = - 0·66$$
$$v_3'' = 3·00 + 0·346 - 3·085 = + 0·26 \text{ usw.}$$

Selbstverständlich sind die scheinbaren Fehler v^0 für Kalleninken ohne weiteres gleich den mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen, entsprechenden Orientierungsgrößen X, da alle $x = 0$ sind. Also ist in der ersten Gruppe:

$$v_1^0 = 0·00 + 0·846 = + 0·85$$
$$v_2^0 = 0·00 - 0·320 = - 0·32$$
$$v_3^0 = 0·00 + 0·346 = + 0·35 \text{ usw.}$$

In der zweiten Gruppe ist für Kalleninken: $v_{13}^0 = - 1·02$, $v_{14}^0 = - 0·40$ usw., und für Gilge:

$$v_{13}' = 4·25 - 1·023 - 2·205 = + 1·02 = - v_{13}^0$$
$$v_{14}' = 3·00 - 0·398 - 2·205 = + 0·40 = - v_{14}^0 \text{ usw.}$$

Bei richtiger Rechnung sollen folgende Summen bis auf die Abrundungsdifferenzen auf Null ausgehen:

$$
\begin{aligned}
[v^0] &= +3{\cdot}42 - 3{\cdot}31 - 0{\cdot}13 = -0{\cdot}02 \\
[v'] &= -3{\cdot}30 + 3{\cdot}31 \phantom{- 0{\cdot}13} = +0{\cdot}01 \\
[v''] &= -0{\cdot}14 \phantom{- 3{\cdot}31} + 0{\cdot}13 = -0{\cdot}01 \\
\hline
[v] &= [v^0] + [v'] + [v''] = -0{\cdot}02.
\end{aligned}
$$

Die Summe der Quadrate der 98 Verbesserungen ist:

$$[v\,v] = 6{\cdot}51 + 8{\cdot}70 + 6{\cdot}49 + 2\,(11{\cdot}82 + 12{\cdot}49) = 70{\cdot}32,$$

folglich der mittlere Fehler einer einzelnen Richtung nach der Formel (6):

$$\mu = \sqrt{\frac{70{\cdot}32}{98 - 43 - 3 + 1}} = \sqrt{\frac{70{\cdot}32}{53}} = \pm 1''15.$$

Um den mittleren Fehler eines ausgeglichenen Winkels kennen zu lernen, hat man zunächst folgende Gewichtsgleichungen aufzustellen:

$$
\begin{aligned}
&+17{\cdot}50\,[\alpha\,\alpha] - 4{\cdot}00\,[\alpha\,\beta] = 1 &\qquad& -17{\cdot}50\,[\alpha\,\beta] - 4{\cdot}00\,[\beta\,\beta] = 0 \\
&-4{\cdot}00\,[\alpha\,\alpha] + 14{\cdot}00\,[\alpha\,\beta] = 0 &\qquad& -4{\cdot}00\,[\alpha\,\beta] + 14{\cdot}00\,[\beta\,\beta] = 1.
\end{aligned}
$$

Deren Auflösung liefert die Gewichtskoeffizienten:

$$[\alpha\,\alpha] = +0{\cdot}0611, \qquad [\alpha\,\beta] = +0{\cdot}0175, \qquad [\beta\,\beta] = +0{\cdot}0764.$$

Demnach ist der mittlere Fehler von A: $\mu_A = \mu\sqrt{[\alpha\,\alpha]} = \pm 0''28$,

und der mittlere Fehler von B: $\mu_B = \mu\sqrt{[\beta\,\beta]} = \pm 0''32$.

β) Clarkes Näherungsmethode.

Eine zweckmäßige Näherungsmethode zur Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze wurde bei der Landesvermessung von Großbritannien und Irland angewendet. (Clarke: Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland, 1858.)

In Anwendung auf das vorstehende Zahlenbeispiel besteht dieses Näherungsverfahren darin, daß zunächst von allen auf die Nullrichtung K reduzierten Beobachtungen l (Seite 77) für eine und dieselbe Richtung die Mittel $M_K = 0$, $M_G = 26^0\,14'\,52''20$, $M_L = 87^0\,04'\,52''95$ gebildet werden, welche Mittel zugleich eine erste rohe Näherung der Ergebnisse darstellen. Sodann bildet man die Differenzen $M - l = v$, z. B.

$$
\begin{aligned}
v'_G &= 26^0\,14'\,52''20 - 26^0\,14'\,50''00 = +2''20 \\
v''_G &= 26^0\,14'\,52''20 - 26^0\,14'\,53''50 = -1''30 \\
v'_L &= 87^0\,04'\,52''95 - 87^0\,04'\,52''75 = +0''20
\end{aligned}
$$

und hierauf die Mittel x der zu je einem Satze gehörigen v, z. B.

$$x' = \frac{1}{3}(0{\cdot}00 + 2{\cdot}20 + 0{\cdot}20) = +0''80$$

$$x'' = \frac{1}{3}(0{\cdot}00 - 1{\cdot}30 + 0{\cdot}20) = -0''{\cdot}37$$

Nun addiere man diese Mittel x zu den Beobachtungen l, z. B.

$$l_K + x' = 0^\circ 00' 00''00 + 0''80 = 0^\circ 00' 00''80$$
$$l_a + x' = 26^\circ 14' 50''00 + 0''80 = 26^\circ 14' 50''80$$
$$l_a'' + x'' = 26^\circ 14' 53''50 - 0''37 = 26^\circ 14' 53''13,$$

so geben die Mittel N der um die Satzverdrehungen x orientierten Richtungen $l + x$ bereits die annähernd ausgeglichenen Richtungen. Man erhält:

$N_K = 359^\circ 59' 59''964, \qquad N_a = 26^\circ 14' 52''187, \qquad N_L = 87^\circ 04' 53''026.$

Sohin lauten die annähernd ausgeglichenen Winkel:

$A = N_a - N_K = 26^\circ 14' 52''223, \qquad B = N_L - N_K = 87^\circ 04' 53''062.$

Wiederholt man die ganze Rechnung mit den um x annähernd orientierten Richtungen, die immer noch als unmittelbare Beobachtungswerte anzusehen sind, da die einzelnen Sätze nur eine Verdrehung um eine konstante Größe erfahren haben, so kann man allmählich auch zu den strengen Resultaten, S. 78, gelangen.

Die streng theoretische Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze nach Bessels Methode wird ihrer Schwerfälligkeit wegen gegenwärtig vermieden und durch andere geeignete Verfahren (§ 19) oder einfache Näherungsmethoden, wie z. B. die eben beschriebene, ersetzt.

§ 21. Fehlerdifferenzgleichungen.

Wenn die zu suchenden Größen $x, y, z, \ldots$ nicht durch einfache Beobachtungen l, sondern durch Beobachtungsdifferenzen $l = l' - l$ bestimmt werden, wie dies bei Winkelbestimmungen durch satzweise Richtungsbeobachtungen (§ 20) oder bei Gradmessungen durch Polhöhenbestimmungen (§ 49) der Fall ist, so erscheinen die Angaben l durch die Fehler zweier Beobachtungen entstellt, so daß man für eine Reihe von n Beobachtungen l_1 bis l_n beziehungsweise $n - 1$ Bestimmungen l_2 bis l_n folgende Fehlerdifferenzgleichungen aufstellen kann:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 x + b_2 y + \cdots - l_2 = v_2 - v_1 \\ a_3 x + b_3 y + \cdots - l_3 = v_3 - v_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n x + b_n y + \cdots - l_n = v_n - v_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} u \text{ Unbekannte} \\ n \text{ Beobachtungen} \\ n-1 \text{ Gleichungen} \end{array} \qquad (1)$$

worin $l_2 = l_2 - l_1$, $l_3 = l_3 - l_1$, $\ldots$ $l_n = l_n - l_1$ bedeutet und wobei es ganz gleichgültig ist, welche von den Beobachtungen (wie z. B. hier l_1) bei

der Bildung der Beobachtungsdifferenzen als Anfangs- oder Nullrichtung genommen wird. Gehören zu den einzelnen $l_1, l_2, \ldots l_n$ beziehungsweise $v_1, v_2, \ldots v_n$ die Gewichte $g_1, g_2, \ldots g_n$, so kann man mit Benützung des Ausgleichungsprinzips $[g\,v\,v] = min$ nur $n-1$ von den in der Anzahl n vorkommenden v eliminieren, so daß in den hiedurch entstehenden u Normalgleichungen außer den u Unbekannten $x, y, \ldots$ auch noch ein v als Unbekannte auftritt. Da man also durch die Differentiation von $[g\,v\,v]$ nach den u Unbekannten $x\; y, \ldots$ nur u Gleichungen mit $u+1$ Unbekannten erhält, so hilft man sich damit, daß man irgend ein v, z. B. v_1 schon bei der Differentiation von $[g\,v\,v]$ als eine Unbekannte betrachtet, wodurch dann aus den n Fehlergleichungen

$$\left.\begin{array}{rr|c}
\ldots\ldots\quad v_1 \quad\ldots & = v_1 & g_1 \\
a_2\,x + b_2\,y + v_1 - l_2 & = v_2 & g_2 \\
a_3\,x + b_3\,y + v_1 - l_3 & = v_3 & g_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\
a_n\,x + b_n\,y + v_1 - l_n & = v_n & g_n
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
u \text{ Unbekannte} \\
n \text{ Beobachtungen} \\
n \text{ Gleichungen}
\end{array}
\qquad (2)$$

folgende Normalgleichungen entstehen:

$$\left.\begin{array}{l}
[g\,a\,a]\,x + [g\,a\,b]\,y + [g\,a]\,v_1 = [g\,a\,l] \\
[g\,a\,b]\,x + [g\,b\,b]\,y + [g\,b]\,v_1 = [g\,b\,l] \\
\;\;[g\,a]\,x + \;\;[g\,b]\,y + \;\;[g]\,v_1 = \;\;[g\,l].
\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Da man es in der Praxis gewöhnlich mit mehreren Systemen (2) zu tun hat, worin die eigentlichen Unbekannten $x, y, \ldots$ immer dieselben Werte besitzen, die Verbesserungen v_1 der willkürlich gewählten Anfangsrichtung aber immer andere Werte annehmen, so arbeitet man sich leichter, wenn man die v_1 vorerst eliminiert, weil man dann in den hiedurch entstehenden reduzierten Normalgleichungen

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{[g\,a\,a] - \dfrac{[g\,a]^2}{[g]}\right\}x + \left\{[g\,a\,b] - \dfrac{[g\,a]\;[g\,b]}{[g]}\right\}y = [g\,a\,l] - \dfrac{[g\,a]\;[g\,l]}{[g]} \\
\left\{[g\,a\,b] - \dfrac{[g\,a]\;[g\,b]}{[g]}\right\}x + \left\{[g\,b\,b] - \dfrac{[g\,b]^2}{[g]}\right\}y = [g\,b\,l] - \dfrac{[g\,b]\;[g\,l]}{[g]}
\end{array}\right\} \qquad (4)$$

alle ersten Gleichungen, alle zweiten Gleichungen, usw. durch bloße Addition zu einem einzigen Normalgleichungssystem vereinigen kann.

Beispiel. (Ausgleichung von Richtungsbeobachtungen.)

Auf einer Beobachtungsstation S seien folgende Richtungsbeobachtungen nach den fünf Objekten A, B, C, D, E in vier Gruppen und in gleicher Zahl von Sätzen angestellt worden, wobei die angeführten Daten die Mittelwerte aus allen Sätzen darstellen:

Objekt	Näherungswert	1. Gruppe	2. Gruppe	3. Gruppe	4. Gruppe
A	0° 00′ 00″	0″00	0″00	0″00	0″00
B	44 17 30	2·64	—	4·98	0·69
C	82 33 10	6·90	9·29	—	—
D	198 24 20	2·62	3·64	—	1·54
E	275 12 40	2·10	2·38	2·78	—

Betrachtet man die zu den Näherungswerten gehörenden wahrscheinlichsten Ergänzungen als Unbekannte, so hat man zu setzen:

$$\begin{aligned}\sphericalangle ASB &= 44^\circ 17' 30'' + x\\ \sphericalangle ASC &= 82\ 33\ 10 + y\\ \sphericalangle ASD &= 198\ 24\ 20 + z\\ \sphericalangle ASE &= 275\ 12\ 40 + t.\end{aligned}$$

Somit lauten die Fehlergleichungen in gruppenweiser Anschreibung:

$$\begin{array}{ll} \quad\ \ v_1 \quad\quad = v_1 & \quad\ \ v_1' \quad\quad = v_1' \\ x + v_1 - 2{\cdot}64 = v_2 & \quad \ldots\ldots \\ y + v_1 - 6{\cdot}90 = v_3 & y + v_1' - 9{\cdot}29 = v_3' \\ z + v_1 - 2{\cdot}62 = v_4 & z + v_1' - 3{\cdot}64 = v_4' \\ t + v_1 - 2{\cdot}10 = v_5 & t + v_1' - 2{\cdot}38 = v_5' \\ \hline \quad\ \ v_1'' \quad\quad = v_1'' & \quad\ \ v_1''' \quad\quad = v_1''' \\ x + v_1'' - 4{\cdot}98 = v_2'' & x + v_1''' - 0{\cdot}69 = v_2''' \\ \quad \ldots\ldots & \quad \ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots & z + v_1''' - 1{\cdot}54 = v_4''' \\ t + v_1'' - 2{\cdot}78 = v_5'' & \quad \ldots\ldots \end{array}$$

Damit erhält man die Normalgleichungen, gruppenweise angesetzt:

$$\begin{array}{l} x + y + z + t + 5\,v_1 - 14{\cdot}26 = 0 \\ x \quad\quad\quad\quad + v_1 - 2{\cdot}64 = 0 \\ \quad\ y \quad\quad\quad + v_1 - 6{\cdot}90 = 0 \\ \quad\quad\ z \quad\quad + v_1 - 2{\cdot}62 = 0 \\ \quad\quad\quad\ t + v_1 - 2{\cdot}10 = 0 \\ \hline \quad\ y + z + t + 4\,v_1' - 15{\cdot}31 = 0 \\ \quad\ y \quad\quad\quad + v_1' - 9{\cdot}29 = 0 \\ \quad\quad\ z \quad\quad + v_1' - 3{\cdot}64 = 0 \\ \quad\quad\quad\ t + v_1' - 2{\cdot}38 = 0 \\ \hline x \quad\quad\ + t + 3\,v_1'' - 7{\cdot}76 = 0 \\ x \quad\quad\quad\quad + v_1'' - 4{\cdot}98 = 0 \\ \quad\quad\quad\ t + v_1'' - 2{\cdot}78 = 0 \\ \hline x \quad + z \quad + 3\,v_1''' - 2{\cdot}23 = 0 \\ x \quad\quad\quad\quad + v_1''' - 0{\cdot}69 = 0 \\ \quad\quad\ z \quad\quad + v_1''' - 1{\cdot}54 = 0 \end{array}$$

oder zusammengefaßt:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z + t + 5\,v_1 - 14{\cdot}26 = 0 \\ \quad .\ \ y + z - t - 4\,v_1' - 15{\cdot}31 = 0 \\ x \ .\ \ .\ \ . - t + 3\,v_1'' - 7{\cdot}76 = 0 \\ x \ .\ - z\ .\ \ 3\,v_1''' - 2{\cdot}23 = 0 \end{array}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3\,x + v_1\ .\ \ .\ - v_1'' + v_1''' - 8{\cdot}31 = 0 \\ 2\,y - v_1 + v_1'\ .\ \ .\ \ .\ \ . - 16{\cdot}19 = 0 \\ 3\,z + v_1 - v_1'\ .\ \ .\ \ v_1''' - 7{\cdot}80 = 0 \\ 3\,t + v_1 + v_1' - v_1''\ .\ \ . - 7{\cdot}26 = 0 \end{array}\right\} \quad (6)$$

Eliminiert man mit Hilfe von (5) die v aus dem System (6), so erhält man die sogenannten „Normalgleichungen im engeren Sinne":

$$\begin{array}{l} +\,2{\cdot}133\,x - 0{\cdot}200\,y - 0{\cdot}533\,z - 0{\cdot}533\,t - 2{\cdot}095 = 0 \\ -\,0{\cdot}200\,x + 1{\cdot}550\,y - 0{\cdot}450\,z - 0{\cdot}450\,t - 9{\cdot}510 = 0 \\ -\,0{\cdot}533\,x - 0{\cdot}450\,y + 2{\cdot}217\,z - 0{\cdot}450\,t - 0{\cdot}344 = 0 \\ -\,0{\cdot}533\,x - 0{\cdot}450\,y - 0{\cdot}450\,z + 2{\cdot}217\,t + 2{\cdot}006 = 0, \end{array}$$

deren Auflösung dem Leser überlassen bleibe. Der mittlere Fehler einer einzelnen Richtungsangabe ergibt sich, da im ganzen 15 Beobachtungen und $4 + 4 = 8$ Unbekannte vorkommen, nach der Formel: $\mu = \sqrt{\frac{[v\,v]}{15 - 8}}$. Der mittlere Fehler eines aus einem einfachen Satze hervorgehenden Winkels ist dann: $\mu_w = \mu_r \sqrt{2}$.

B. Punktausgleichung.

§ 22. Vorbereitende Erklärungen.

Bei der Bestimmung von trigonometrischen Netzpunkten im Anschlusse an eine bereits vorhandene Triangulierung werden zwei Hauptfälle unterschieden: das Vorwärtseinschneiden, wobei ausschließlich Richtungen von den gegebenen Punkten nach dem zu bestimmenden Punkte, sogenannte „äußere Richtungen" beobachtet werden, und das Rückwärtseinschneiden, wobei ausschließlich Richtungen von dem festzulegenden Punkte nach gegebenen Punkten hin, sogenannte „innere Richtungen" beobachtet werden. Finden sowohl äußere als innere Richtungsbeobachtungen statt, so gelangt das kombinierte Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden zur Anwendung.

In allen drei Fällen erfolgt zuerst die Ermittlung der genäherten Koordinaten x, y des eingeschnittenen Punktes auf elementarem Wege, und zwar im Falle des Vorwärts- oder kombinierten

Einschneidens aus zwei, beim Rückwärtseinschneiden aber aus drei unter günstigen Bedingungen sich schneidenden Strahlen. Die genäherten Koordinaten werden selbstverständlich nur jenen Beobachtungen vollkommen entsprechen, welche zu deren Berechnung herangezogen wurden, hingegen werden sie den überschüssigen Beobachtungen infolge des Einflusses der zufälligen Beobachtungsfehler nicht strenge genügen. Um die hiedurch entstehenden Widersprüche auszugleichen, sind an den Näherungskoordinaten x, y nach der Methode der kleinsten Quadrate solche Änderungen dx, dy*) anzubringen, welche bewirken, daß bei gleichgewichtigen Beobachtungen die Summe der Quadrate der infolge der vorgenommenen Koordinatenänderungen an den Beobachtungen anzubringenden Verbesserungen v, oder bei ungleichgewichtigen Beobachtungen die Summe der mit den entsprechenden Gewichten g multiplizierten Quadrate der Richtungsverbesserungen v ein Minimum, daß also die Bedingung erfüllt werde:

$$[v\,v] = min \text{ beziehungsweise } [g\,v\,v] = min.$$

Bevor zur Ausgleichung der Koordinatenwidersprüche geschritten wird, ist noch eine Reihe von Vorarbeiten zu erledigen. Zunächst werden aus den genäherten Koordinaten x, y des zu bestimmenden Punktes Q und den gegebenen Koordinaten x_i, y_i derjenigen Netzpunkte P_i, von oder nach welchen Richtungen beobachtet worden sind, die genäherten Richtungswinkel σ_i' (Azimute der Richtungen) von dem zu bestimmenden Punkte nach den gegebenen Punkten, sowie die Seitenlängen $s_i = QP_i$ nach den Formeln

$$tg\,\sigma_i = \frac{y_i - y}{x_i - x} = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \tag{1}$$

$$s_i = \frac{\Delta y_i}{sin\,\sigma_i} = \frac{\Delta x_i}{cos\,\sigma_i} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \tag{2}$$

berechnet**), wobei die Richtungswinkel, welche in Österreich „Südwinkel", in Deutschland „Neigung" heißen, von der positiven x-Achse aus im Sinne der Uhrzeigerdrehung gezählt werden, und deren Größe beziehungsweise deren Quadrantenlage aus dem stets positiv angenommenen spitzen Winkel φ und den Vorzeichen der Koordinatenunterschiede $\Delta x, \Delta y$ aus folgender Zusammenstellung zu entnehmen ist:

*) Diese Änderungen können hier als Differentiale aufgefaßt werden.

**) Zählt man den Südwinkel in entgegengesetzter Richtung von den gegebenen Punkten nach dem zu bestimmenden Punkte, so tritt $\sigma' \pm 180°$ an Stelle von σ' und es ändern $\Delta y, \Delta x$, sowie $sin\,\sigma', cos\,\sigma'$ ihr Vorzeichen. (Vgl. § 28.)

Δx / Δy =	+ / +	+ / −	− / −	− / +
Quadrant =	I	II	III	IV
σ =	φ	$180^0 - \varphi$	$180^0 + \varphi$	$360^0 - \varphi$

Bezeichnet $\sigma = \sigma' + d\sigma$ den aus den verbesserten Koordinaten $X = x + dx$ und $Y = y + dy$ von Q_0 berechneten ausgeglichenen Südwinkel, so erhält man die durch die Änderung der Koordinaten um dx und dy hervorgerufene Änderung des Südwinkels $d\sigma$ durch Differentiation von (1) wie folgt:

$$\sigma' = arc\,tg\frac{y_i - y}{x_i - x} = arc\,tg\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$d\sigma = \frac{\partial\, arc\,tg\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\partial x}dx + \frac{\partial\, arc\,tg\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\partial y}dy.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial\, arc\,tg\frac{y_i - y}{x_i - x}}{\partial x} = \frac{\partial\, arc\,tg\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\partial x} = \frac{\frac{\Delta y}{\overline{\Delta x}^2}}{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \frac{\Delta y}{\overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta y}^2} = \frac{\Delta y}{s^2}$$

$$\frac{\partial\, arc\,tg\frac{y_i - y}{x_i - x}}{\partial y} = \frac{\partial\, arc\,tg\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\partial y} = \frac{-\frac{1}{\Delta x}}{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \frac{-\Delta x}{\overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta y}^2} = -\frac{\Delta x}{s^2},$$

folglich ist:

$$d\sigma = \frac{\Delta y}{s^2}dx - \frac{\Delta x}{s^2}dy$$

oder mit Rücksicht auf (1) und unter gleichzeitiger Einführung des kleinen Winkels $d\sigma$ in Bogenmaß:

$$\frac{d\sigma}{\varrho''} = \frac{\sin\sigma'}{s}dx - \frac{\cos\sigma'}{s}dy,$$

worin $\varrho'' = 1 : \sin 1'' = 206\,265$ bedeutet. Setzt man, die im Vorhinein berechenbaren Größen zusammenfassend,

$$\varrho''\frac{\sin\sigma'}{s} = a, \qquad -\varrho''\frac{\cos\sigma'}{s} = b,$$

so liefert jeder Visierstrahl eine Gleichung von der Form:

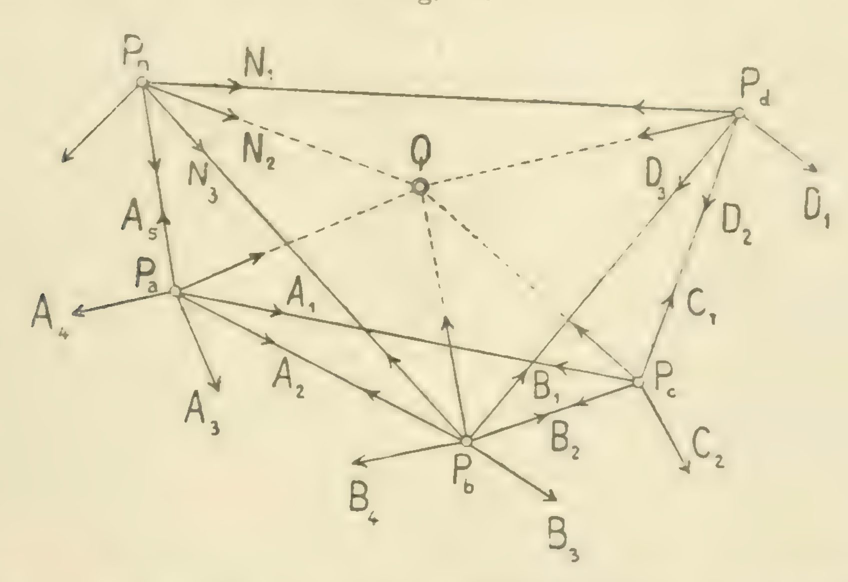
$$d\sigma = a\,dx + b\,dy, \tag{3}$$

worin $d\sigma$, dx, dy unbekannt sind und die sogenannten „Richtungskoeffizienten" a und b im vorhinein berechnet werden können. Hiebei ist zu beachten, daß die Vorzeichen von a und $\sin\sigma$ übereinstimmend, jene von b und $\cos\sigma$ jedoch entgegengesetzt sein müssen. (Über einfache und anschauliche Ableitungen der Formel (3) siehe die Notizen „Über die Differentialformel der Azimute" in der „Österr. Zeitschr. f. Vermessungswesen," 1905, S. 4 und 29.)

§ 23. Vorwärtseinschneiden.

Zur Bestimmung der Koordinaten des Punktes Q durch äußere Richtungen seien auf den gegebenen Punkten $P_a, P_b, \dots P_n$ Richtungs-

Fig. 17.

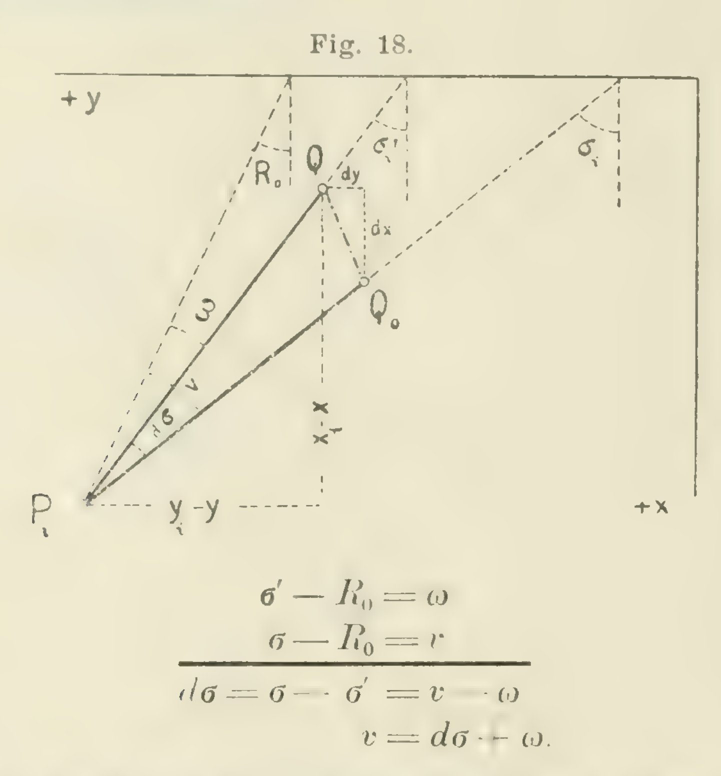


unterschiede gemessen worden zwischen dem zu bestimmenden Punkte Q und den umliegenden, gegebenen Dreieckspunkten $A_1, A_2, A_3, \dots$; $B_1, B_2, B_3, \dots$; $C_1, C_2, C_3, \dots$, usw. (Fig. 17). Sind $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ die bekannten Südwinkel der gegebenen Dreiecksseiten von P_a nach $A_1, A_2, A_3, \dots$, und ist R der Südwinkel der Richtung von der Station P_a nach Q, so hat man, wenn die beobachteten Richtungsunterschiede auf der Station P_a mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ bezeichnet werden, für die zu bestimmende Richtung R die verschiedenen, mit zufälligen Beobachtungsfehlern behafteten Werte

$$R_1 = \nu_1 + \alpha_1$$
$$R_2 = \nu_2 + \alpha_2$$
$$R_3 = \nu_3 + \alpha_3$$
$$\dots\dots$$

deren arithmetisches Mittel die orientierte Richtung R_0 der Beobachtungen auf P_i nach Q genannt wird. In gleicher Weise erhält man für alle Beobachtungsstationen die den Punkt Q bestimmenden orientierten Richtungen, welche an Stelle der direkten Beobachtungen treten und welchen je nach der Anzahl der zu ihrer Berechnung zu einem Mittel vereinigten Einzelbeobachtungen verschiedene Gewichte (Anschnittszahlen) beigegeben werden können. Bezeichnet man (Fig. 18) mit ω die Abweichung der orientierten Richtung R_0 von dem genäherten oder vorläufigen Südwinkel σ' und mit v die Abweichung der orientierten Richtung von dem ausgeglichenen oder endgültigen Südwinkel σ, so finden für jeden Strahl nach Q die Beziehungen statt:

Fig. 18.



$$\sigma' - R_0 = \omega$$
$$\sigma - R_0 = v$$
$$d\sigma = \sigma - \sigma' = v - \omega$$
$$v = d\sigma + \omega.$$

Wird der Wert von $d\sigma$ in die Gleichung (3) des § 22 eingesetzt und gleichzeitig δx, δy statt dx, dy eingeführt, da die Koordinatenänderungen eigentlich keine Differentiale sind (Fußnote S. 85), so erhält man für die Verbesserung der orientierten Richtung in allgemeiner Form die Fehlergleichung:

$$a\,\delta x + b\,\delta y + \omega = v,$$

worin der Abweichung ω der Charakter einer direkten Beobachtung zukommt.*) Solche Fehlergleichungen können in der Anzahl der Stationen P_a bis P_n aufgestellt werden. Ihre Auflösung erfolgt nach den

*) In § 1, Punkt b ist $w = -l$ gesetzt. Vgl. Fußnote S. 42.

Regeln der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen (I. Band, III. Abschnitt).

Als Zahlenbeispiel diene das in der österreichischen „Instruktion zur Ausführung der trigonometrischen und polygonometrischen Vermessungen" enthaltene Muster XI *a* für Vorwärtseinschneiden: Bestimmung des Punktes **3** durch äußere Richtungen aus den fünf gegebenen Netzpunkten „Spielberg **S**, **4**, **1**, Hadi **H** und Neuer Berg **N**".

Die gegebenen Koordinaten x, y und die aus den Beobachtungen hervorgegangenen orientierten Richtungen $R_n \pm 180°$ von Q nach P_i sind:

Punkt P_i	Abszissen x_i	Ordinaten y_i	Orientierte Richtungen von Q nach P, d. i.:	$R_n \pm 180°$
S	— 109 689·27	— 16 547·54	von **3** nach **S**	78° 34′ 54″
4	— 111 354·16	— 17 784·32	„ **3** „ **4**	108 33 17
1	— 112 370·96	— 18 755·73	„ **3** „ **1**	138 50 50
H	— 112 753·60	— 21 902·76	„ **3** „ **H**	213 03 55
N	— 109 657·72	— 20 926·11	„ **3** „ **N**	327 55 11

Nun rechnet man

1. Die Näherungskoordinaten von **3**: $x = -110470{\cdot}66$, $y = -20416{\cdot}54$

2. Die Koordinatenunterschiede Δx, Δy, die genäherten Südwinkel σ' und die Seitenlängen s:

Punkt P_i	$\Delta x = x_i - x$	$\Delta y = y_i - y$	σ' aus $tg\,\sigma' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\log s$ aus $\frac{\Delta y}{\sin \sigma}$ oder $\frac{\Delta x}{\cos \sigma}$
S	+ 781·39	+ 3869·00	78° 34′ 55″·3	3·5963
4	— 883·50	+ 2632·22	108 33 15·3	3·4435
1	— 1900·30	+ 1660·81	138 50 50·8	3·4020
H	— 2282·94	— 1486·22	213 03 52·5	3·4352
N	+ 812·94	— 509·57	327 55 10·3	2·9820

3. Die Koeffizienten und Absolutglieder der Fehlergleichungen:

Punkt	$a = \varrho'' \frac{\sin \sigma'}{s}$	$b = -\varrho'' \frac{\cos \sigma'}{s}$	$\omega = \sigma' - (R_n \pm 180°)$
S	+ 51·2	— 10·3	+ 1·3
4	+ 70·4	+ 23·6	— 1·7
1	+ 53·8	+ 61·5	+ 0·8
H	— 41·3	+ 63·5	— 2·5
N	— 114·2	— 182·1	— 0·7

4. Die Koeffizienten und Absolutglieder der Normalgeichungen:

P	aa	ab	$a\omega$	bb	$b\omega$	$\omega\omega$
S	+ 2621	− 527	+ 67	+ 106	− 13	+ 1·69
4	4956	+ 1661	− 120	557	− 40	2·89
1	2894	3309	− 43	3782	+ 49	0·64
H	1706	− 2623	+ 103	4032	− 159	6·25
N	13042	+ 20796	+ 80	33160	+ 127	0·49
	+ 25219	+ 22616	+ 173	+ 41637	− 36	11·96

Die Normalgleichungen lauten:

$$25219\,\delta x + 22616\,\delta y - 137 = 0$$
$$22616\,\delta x + 41637\,\delta y - 36 = 0.$$

Es sind dies dieselben Gleichungen, von denen im § 11 ausgegangen wurde. Die dort gefundenen Ergebnisse der Genauigkeitsuntersuchung mögen hier der Übersichtlichkeit wegen den Resultaten angeschlossen werden.

Genäherte Werte von Q: $x = -110470{\cdot}66$ $y = -20416{\cdot}54$
Koordinatenverbesserungen: $\delta x = -0{\cdot}0149$ $\delta y = -0{\cdot}0089$
Ausgegl. Koordinaten von Q: $X = -110470{\cdot}67$ $Y = -20416{\cdot}53$.

Mittlerer Fehler einer beobachteten Richtung: $\mu_r = \pm 1''74$,
mittlere Koordinatenfehler: $\mu_x = \pm 0{\cdot}015\,m$, $\mu_y = \pm 0{\cdot}012\,m$,
mittlerer Punktfehler: $M = \pm 0{\cdot}019\,m$,
extreme mittlere Koordinatenfehler:

$\mu_{\mathfrak{x}} = \pm 0{\cdot}007\,m$ zum Südwinkel $54^0\,59'$ gehörend.
$\mu_{\mathfrak{y}} = \pm 0{\cdot}018\,m$ „ „ $144^0\,59'$ „ .

Berechnet man mit den verbesserten Koordinaten X, Y von Q die endgültigen Südwinkel σ nach

$$tg\,\sigma = \frac{y_i - Y}{x_i - X},$$

so müssen die Differenzen $\sigma - R_0 = v$ mit den im § 11 direkt ermittelten v bis auf die unvermeidlichen Abrundungsfehler übereinstimmen. Als Rechenproben hat man nach (10) und (13) Seite 226 des I. Bandes:

$$[v\,v] = [\omega\,\omega\,.\,2] = [\omega\,\omega\,.\,1] - \frac{[b\,\omega\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]}$$

$$[v\,v] = [\omega\,\omega] - \frac{[a\,\omega]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\omega\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} = 11{\cdot}96 - 1{\cdot}19 - 1{\cdot}71 = 9{\cdot}06$$

oder auch nach (14) Seite 227 des I. Bandes, wenn darin $l = -w$ gesetzt wird (Fußnote Seite 42):

$$[v\,v] = [\omega\,\omega] + [a\,\omega]\,\delta x + [b\,\omega]\,\delta y = 11{\cdot}96 - 2{\cdot}57 - 0{\cdot}32 = 9{\cdot}07,$$

nach beiden Formeln übereinstimmend mit der direkten Berechnung im § 11, S. 43.

§ 24. Rückwärtseinschneiden.

Hat man auf dem zu bestimmenden Punkte Q, als Instrumentenstandpunkt, die Richtungen nach den umliegenden gegebenen Punkten $P_a, P_b, \ldots P_n$ beobachtet, so erscheint damit der Richtungssatz noch nicht nach den Koordinatenachsen orientiert; er kann daher beliebig um den Standpunkt gedreht werden. Um dem ganzen Richtungssatze eine vorläufige Orientierung zu geben, ermittelt man von dem zu suchenden Punkte Q auf elementartrigonometrischem Wege Näherungskoordinaten x, y und berechnet irgend einen Richtungswinkel σ_i' von Q nach P_i mit Hilfe der genäherten Koordinaten x, y von Q und der gegebenen Koordinaten x_i, y_i von P_i nach der Formel

$$tg\,\sigma_i' = \frac{y_i - y}{x_i - x}.$$

Dreht man nun den gemessenen Richtungssatz so lange, bis die Richtung R_i des ausgewählten Strahles $Q\,P_i$ mit seinem genäherten Richtungswinkel σ_i' vollkommen übereinstimmt, so erscheinen auch alle übrigen Richtungen um denselben Winkel

$$\sigma_i' - R_i = z$$

gedreht und vorläufig orientiert. Bezeichnet man mit R_i das arithmetische Mittel aller von Q nach P_i angestellten Richtungsmessungen, so erhält man die genäherte orientierte Richtung r_0 irgend einer anderen, von Q nach P_m zielenden Visur, wenn das arithmetische Mittel aller Richtungsmessungen nach P_m mit R_m bezeichnet wird, durch Bildung der Summe

$$R_m + z = r_0.$$

Die auf diese Weise für alle inneren Richtungen ermittelten genäherten oder vorläufig orientierten Richtungen r_0 treten an die Stelle der direkten Beobachtungen.

Der genäherte Drehungswinkel z, welcher nur jenen drei Richtungen entspricht, die zur Bestimmung der Näherungskoordinaten von Q beliebig ausgewählt wurden, ist aber noch nicht derjenige Winkel, welcher sämtlichen Richtungen gleichzeitig am besten genügt. Der Winkel z verlangt infolge der fehlerhaften Richtungsbeobach-

tungen noch eine im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmende Korrektion ∂z, den sogenannten „Orientierungsfehler", auch „Richtungskorrektion" oder „Nullpunktskorrektion" genannt, welche den Unterschied zwischen den genähert orientierten Richtungen r_0 und den endgültig orientierten Richtungen R_0 bildet. Bezeichnet man die Abweichung der genähert orientierten Richtung r_0 von dem genäherten Richtungswinkel σ' mit w und die Abweichung der endgültig orientierten Richtung R_0 von σ' wie beim Vorwärtseinschneiden mit ω, so hat man die Beziehungen:

$$\begin{aligned} r_0 - R_0 &= \partial z \\ \sigma' - r_0 &= w \\ \sigma' - R_0 &= \omega \\ \hline r_0 - R_0 &= \omega - w \\ \omega &= \partial z + w. \end{aligned}$$

Die Differentialformel der Azimute lautet wie beim Vorwärtseinschneiden

$$\partial\sigma = a\,\partial x + b\,\partial y.$$

Die allgemeine Form der Fehlergleichungen des § 23: $\partial\sigma + \omega = v$ oder

$$a\,\partial x + b\,\partial y + \omega = v$$

geht daher über in

$$a\,\partial x + b\,\partial y + \partial z + w = v.$$

Bei n gemessenen Richtungen hat man die Fehlergleichungen

$$\left.\begin{array}{l} a_1\,\partial x + b_1\,\partial y + \partial z + w_1 = v_1 \\ a_2\,\partial x + b_2\,\partial y + \partial z + w_2 = v_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_n\,\partial x + b_n\,\partial y + \partial z + w_n = v_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

und, da die Koeffizienten der dritten Unbekannten ∂z durchaus gleich 1 sind, die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,\partial x + [a\,b]\,\partial y + [a]\,\partial z + [a\,w] = 0 \\ [a\,b]\,\partial x + [b\,b]\,\partial y + [b]\,\partial z + [b\,w] = 0 \\ [a]\,\partial x + [b]\,\partial y + n\,\partial z + [w] = 0. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Durch Elimination der für die Punktbestimmung ganz gleichgültigen Nullpunktskorrektion ∂z erhält man nach den Regeln des I. Bandes, § 44, S. 167 die von ∂z befreiten Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{[a\,a] - \frac{[a]}{n}[a]\right\}\partial x + \left\{[a\,b] - \frac{[a]}{n}[b]\right\}\partial y + \left\{[a\,w] - \frac{[a]}{n}[w]\right\} = 0 \\ \left\{[a\,b] - \frac{[b]}{n}[a]\right\}\partial x + \left\{[b\,b] - \frac{[b]}{n}[b]\right\}\partial y + \left\{[b\,w] - \frac{[b]}{n}[w]\right\} = 0, \end{array}\right\} \qquad (3)$$

woraus die Koordinaten-Verbesserungen ∂x, ∂y in üblicher Weise berechnet werden können. Man kann aber die Elimination von ∂z auf bequeme Art auch nach der Methode der reduzierten Fehlergleichungen (§ 45 des I. Bandes), wie sie auch schon Gauß (1822) angewendet hat, wie folgt vornehmen. Wird das Gleichungssystem (1) addiert und durch n dividiert, so ergibt sich:

$$\frac{[a]}{n}\partial x + \frac{[b]}{n}\partial y + \frac{[w]}{n} + \partial z = [v] = 0.$$

Diese Gleichung von den einzelnen Fehlergleichungen subtrahiert, liefert die von ∂z befreiten, reduzierten Fehlergleichungen:

$$\left(a_1 - \frac{[a]}{n}\right)\partial x + \left(b_1 - \frac{[b]}{n}\right)\partial y + \left(w_1 - \frac{[w]}{n}\right) = v_1$$

$$\left(a_2 - \frac{[a]}{n}\right)\partial x + \left(b_2 - \frac{[b]}{n}\right)\partial y + \left(w_2 - \frac{[w]}{n}\right) = v_2$$

. . . .

$$\left(a_n - \frac{[a]}{n}\right)\partial x + \left(b_n - \frac{[b]}{n}\right)\partial y + \left(w_n - \frac{[w]}{n}\right) = v_n$$

Setzt man zur Abkürzung

$$a_1 - \frac{[a]}{n} = A_1 \qquad b_1 - \frac{[b]}{n} = B_1 \qquad w_1 - \frac{[w]}{n} = W_1$$

$$a_2 - \frac{[a]}{n} = A_2 \qquad b_2 - \frac{[b]}{n} = B_2 \qquad w_2 - \frac{[w]}{n} = W_2$$

. . . .

$$a_n - \frac{[a]}{n} = A_n \qquad b_n - \frac{[b]}{n} = B_n \qquad w_n - \frac{[w]}{n} = W_n,$$

wobei die sogenannten reduzierten Koeffizienten A, B und absoluten Glieder W die Abweichungen der ursprünglichen Koeffizienten a, b und absoluten Glieder w von ihren arithmetischen Mittelwerten $\frac{[a]}{n}$, $\frac{[b]}{n}$, $\frac{[w]}{n}$ bedeuten und daher zur Kontrolle

$$[A] = [B] = [W] = 0$$

sein muß, so kann man auch schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} A_1\,\partial x + B_1\,\partial y + W_1 = v_1 \\ A_2\,\partial x + B_2\,\partial y + W_2 = v_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n\,\partial x + B_n\,\partial y + W_n = v_n \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Die zugehörigen Normalgleichungen lauten dann:

$$\left.\begin{aligned}[AA]\,\delta x + [AB]\,\delta y + [AW] = 0\\ [AB]\,\delta x + [BB]\,\delta y + [BW] = 0.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Dieselben sind identisch mit den Gleichungen (3), wovon man sich leicht überzeugen kann, indem man z. B. bildet:

$$[AA] = A_1^2 + A_2^2 + \cdots = \left(a_1 - \frac{[a]}{n}\right)^2 + \left(a_2 - \frac{[a]}{n}\right)^2 + \cdots =$$

$$= [aa] - 2\,[a]\,\frac{[a]}{n} + \frac{[a]}{n}\,[a] = [aa] - \frac{[a]}{n}\,[a].$$

Werden die Verbesserungen der Richtungswinkel in gleicher Weise reduziert wie die a, b, w und setzt man

$$\delta\sigma_1 - \frac{[\delta\sigma]}{n} = \Sigma_1$$

$$\delta\sigma_2 - \frac{[\delta\sigma]}{n} = \Sigma_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\delta\sigma_n - \frac{[\delta\sigma]}{n} = \Sigma_n,$$

wobei zur Kontrolle $[\Sigma] = 0$ sein muß, so bestehen auch die Beziehungen:

$$\Sigma_1 + W_1 = v_1$$
$$\Sigma_2 + W_2 = v_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$\Sigma_n + W_n = v_n,$$

womit die Richtungsverbesserungen v berechnet werden können. Alles weitere geschieht wie beim Vorwärtseinschneiden mit dem bloßen Unterschiede, daß in der Formel für den mittleren Fehler einer einzelnen Richtung $\mu_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-u}}$ im Nenner $u = 3$ zu setzen ist, da drei Unbekannte $\delta x, \delta y, \delta z$ vorkommen, während beim Vorwärtseinschneiden, wo ein unbekannter Orientierungsfehler δz nicht auftritt, $u = 2$ anzunehmen ist. Es geht diese Unterscheidung auch schon daraus hervor, daß zur eindeutigen Bestimmung eines vorwärts eingeschnittenen Punktes zwei Richtungen genügen und daher $n - 2$ Richtungen überschüssig sind, während zur eindeutigen Bestimmung eines Punktes durch Rückwärtseinschneiden drei Richtungen unumgänglich notwendig sind und daher nur $n - 3$ Beobachtungen als überschüssig zu bezeichnen sind.

Haben die Beobachtungen ungleiche Gewichte, so treten an die Stelle von (2) die folgenden Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [gaa]\,\delta x + [gab]\,\delta y + [ga]\,\delta z + [gaw] = 0 \\ [gab]\,\delta x + [gbb]\,\delta y + [gb]\,\delta z + [gbw] = 0 \\ [ga]\,\delta x + [gb]\,\delta y + [g]\,\delta z + [gw] = 0 \end{array}\right\} \quad (6)$$

und an die Stelle der von δz befreiten Gleichungen (5) folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \left([gaa] - \frac{[ga]}{[g]}[ga]\right)\delta x + \left([gab] - \frac{[ga]}{[g]}[gb]\right)\delta y \\ \qquad + \left([gaw] - \frac{[ga]}{[g]}[gw]\right) = 0 \\ \left([gab] - \frac{[gb]}{[g]}[ga]\right)\delta x + \left([gbb] - \frac{[gb]}{[g]}[gb]\right)\delta y + \\ \qquad \left([gbw] - \frac{[gb]}{[g]}[gw]\right) = 0. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Setzt man:

$$A_1 = a_1 - \frac{[ga]}{[g]} \qquad B_1 = b_1 - \frac{[gb]}{[g]} \qquad W_1 = w_1 - \frac{[gw]}{[g]}$$

$$A_2 = a_2 - \frac{[ga]}{[g]} \qquad B_2 = b_2 - \frac{[gb]}{[g]} \qquad W_2 = w_2 - \frac{[gw]}{[g]}$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$A_n = a_n - \frac{[ga]}{[g]} \qquad B_n = b_n - \frac{[gb]}{[g]} \qquad W_n = w_n - \frac{[gw]}{[g]},$$

so erhält man die Normalgleichungen (7) in der Form

$$\left.\begin{array}{l} [gAA]\,\delta x + [gAB]\,\delta y + [gAW] = 0 \\ [gAB]\,\delta x + [gBB]\,\delta y + [gBW] = 0. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Zur Kontrolle für die Berechnung der reduzierten Ausdrücke A, B, W hat man die Bedingungsgleichungen

$$[gA] = [gB] = [gW] = 0.$$

Als Zahlenbeispiel benützen wir das Muster XI b der österreichischen „Instruktion für Theodolitvermessungen": „Bestimmung des Punktes **53** durch innere Richtungen nach den gegebenen Dreieckspunkten **2, 15, 16, 4, 1**." — Die gegebenen Koordinaten x_i, y_i der Punkte P_i und die Mittelwerte R_m der auf dem Punkte $Q = 53$ beobachteten Richtungen von Q nach P_i sind:

Punkt P_i	Abszissen x_i	Ordinaten y_i	Mittelwerte von Q nach P_i, d. i.:	Mittelwerte R_m
2	— 111 178·68	— 20 272·86	von **53** nach **2**	0° 00′ 05″
15	— 110 873·76	— 18 722·27	„ **53** „ **15**	80 23 33
16	— 111 044·47	— 18 152·68	„ **53** „ **16**	120 47 30
4	— 111 354·16	— 17 784·32	„ **53** „ **4**	146 40 56
1	— 112 370·96	— 18 755·73	„ **53** „ **1**	245 53 23

Die Näherungskoordinaten von **53** sind:

$$x = -111\,643{\cdot}57 \qquad y = -18\,834{\cdot}72.$$

Die weiteren Rechnungen werden nach Anleitung der am Kopfe der nachfolgenden Tabellen gemachten Angaben durchgeführt.

Punkt	$\Delta x = x_i - x$	$\Delta y = y_i - y$	σ' aus $tg\,\sigma' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	$log\,s$ aus $\frac{\Delta y}{sin\,\sigma'}$ oder $\frac{\Delta x}{cos\,\sigma'}$	$r_0 = R_m + z$
2	+ 464·89	− 1438·14	287° 54′ 50″	3·1794	287° 54′ 50″
15	+ 769·81	+ 112·45	8 18 39	2·8910	8 18 18
16	+ 599·10	+ 682·04	48 42 15	2·9580	48 42 15
4	+ 289·41	+ 1050·40	74 35 45	3·0372	74 35 41
1	− 727·39	− 78·99	173 48 08	2·8643	173 48 08

Zur Berechnung der in der letzten Spalte der obigen Tabelle enthaltenen Daten wurde der Drehungswinkel $z = \sigma' - R_m = 287^0\,54'\,50'' - 0^0\,00'\,05'' = 287^0\,54'\,45''$ aus den Daten für den Punkt **2** ermittelt.

P	$a = \varrho''\frac{sin\,\sigma'}{s}$	$b = -\varrho''\frac{cos\,\sigma'}{s}$	$w = \sigma' - r_0$	$A = a - \frac{[a]}{n}$	$B = b - \frac{[b]}{n}$	$W = w - \frac{[w]}{n}$
2	− 129·8	− 42·0	0	− 188·2	+ 2·9	− 5·0
15	+ 38·3	− 262·3	+ 21	− 20·1	− 217·4	+ 16·0
16	+ 170·7	− 150·0	0	+ 112·3	− 105·1	− 5·0
4	+ 182·5	− 50·3	+ 4	+ 124·1	− 5·4	− 1·0
1	+ 30·4	+ 280·3	0	− 28·0	+ 325·2	− 5·0
$\Sigma =$	+ 292·1	− 224·3	+ 25	− 0·1	+ 0·2	0·0
$\Sigma:5 =$	+ 58·4	− 44·9	+ 5	$[A]$	$[B]$	$[W]$
	$\frac{[a]}{n}$	$\frac{[b]}{n}$	$\frac{[w]}{n}$			

P	AA	AB	AW	BB	BW	WW
2	+ 35 419	− 546	+ 941	+ 8	− 15	+ 25
15	404	+ 4 370	− 322	47 263	− 3 478	256
16	12 611	− 11 803	− 562	11 046	+ 526	25
4	15 401	− 670	− 124	29	+ 5	1
1	784	− 9 106	+ 140	105 755	− 1 626	25
Summe:	+ 64 619	− 17 755	+ 73	+ 164 101	− 4 588	+ 332

Normalgleichungen:

$$+ 64619\,\delta x - 17755\,\delta y + 73 = 0$$

$$- 17755\,\delta x + 164101\,\delta y - 4588 = 0.$$

Koordinatenverbesserungen: $\delta x = +0{\cdot}0068$, $\delta y = +0{\cdot}0287$.
Ausgeglichene Koordinaten des Punktes **53**:

$$X = -111643{\cdot}57 + 0{\cdot}01 = -111643{\cdot}56,$$
$$Y = -18834{\cdot}72 + 0{\cdot}03 = -18834{\cdot}69.$$

Wünscht man auch den Orientierungsfehler δz kennen zu lernen, so findet man ihn aus der dritten Normalgleichung von (2), S. 92, wie folgt:

$$\delta z = -\left(\frac{[a]}{n}\delta x + \frac{[b]}{n}\delta y + \frac{[w]}{n}\right) =$$
$$= -(58{\cdot}4 \,.\, 0{\cdot}0068 - 44{\cdot}9 \,.\, 0{\cdot}0287 + 5{\cdot}0) = -4''11.$$

Die Richtungsverbesserungen v können nach vier Methoden berechnet werden, und zwar nach den Formeln:

$$A\,\delta x + B\,\delta y + W \qquad = v$$
$$a\,\delta x + b\,\delta y + \delta z + w \quad = v$$
$$\Sigma + W \qquad = v;$$

Die vierte Formel wird in dem nächsten Paragraphen (S. 101) vorgeführt werden.

P	1. Methode				2. Methode					3. Methode				vv
	$A\delta x$	$+B\delta y$	$+W$	$=v$	$a\delta x$	$+b\delta y$	$+\delta z$	$+w$	$=v$	$\delta\sigma$	Σ	$+W$	$=v$	
2	− 1·28	+ 0·08	− 5	− 6·20	− 0·88	− 1·21	4·11	0	− 6·20	− 2·09	− 1·20	− 5	− 6·20	38·44
15	− 0·14	− 6·24	+ 16	+ 9·62	+ 0·26	− 7·53	4·11	+ 21	+ 9·62	− 7·27	− 6·38	+ 16	+ 9·62	92·54
16	+ 0·76	− 3·02	− 5	− 7·26	+ 1·16	− 4·31	− 4·11	0	− 7·26	− 3·15	− 2·26	− 5	− 7·26	52·71
4	+ 0·84	− 0·15	− 1	− 0·31	+ 1·24	− 1·44	− 4·11	+ 4	− 0·31	− 0·20	+ 0·69	− 1	− 0·31	0·10
1	− 0·19	+ 9·33	− 5	+ 4·14	+ 0·21	+ 8·04	− 4·11	0	+ 4·14	+ 8·25	+ 9·14	5	+ 4·14	17·14
	− 0·01	0·00	0	− 0·01					− 0·01	− 4·46			− 0·01	200·93

$[\delta\sigma] : 5 = -0{\cdot}89.$

Die $\delta\sigma$ sind zu bilden nach der Gleichung: $\delta\sigma_i = a_i\,\delta x + b_i\,\delta y$ und die Σ aus der Differenz: $\Sigma_i = \delta\sigma_i - \frac{[\delta\sigma]}{5}$. Zur Kontrolle für die direkte Berechnung von $[v\,v]$ ist:

$$[v\,v] = [W W] + [A\,W]\,\delta x + [B\,W]\,\delta y = 332 + 0{\cdot}50 - 131{\cdot}68 = 200{\cdot}82$$

oder $$[v\,v] = [W W.2] = 200{\cdot}87.$$

Der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung ist

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-u}} = \sqrt{\frac{200{\cdot}87}{5-3}} = \pm 10''02.$$

Die Koordinatengewichte sind

$$g_x = [A\,A\,.\,1] = [A\,A] - \frac{[A\,B]^2}{[B\,B]} = 62698,$$

$$g_y = [B\,B\,.\,1] = [B\,B] - \frac{[A\,B]^2}{[A\,A]} = 159223.$$

Hiemit ergeben sich die mittleren Koordinatenfehler

$$\mu_x = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_x}} = \pm 0{\cdot}040\,m, \qquad \mu_y = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_y}} = \pm 0{\cdot}025\,m.$$

Der mittlere Punktfehler ist daher $M = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2} = \pm 0{\cdot}047\,m.$

Die Elemente der Zentralellipse berechnen sich wie folgt:

$$tg\,2\,\psi_0 = \frac{2\,[A\,B]}{[A\,A] - [B\,B]} = \frac{-35510}{-99482};$$

$2\,\psi_0$ liegt im III. Quadranten, somit ist

$$2\,\psi_0 = 199^0\,39', \qquad \psi_0 = 99^0\,49'.$$

$$\sqrt{([A\,A] - [B\,B])^2 + 4\,[A\,B]^2} = \pm 92929$$

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}] = \frac{[A\,A] + [B\,B] + 92929}{2} = 160824$$

$$[\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}] = \frac{[A\,A] + [B\,B] - 92929}{2} = 67896.$$

Die extremen mittleren Koordinatenfehler sind nach § 9, S. 37,

$$\mu_I = \mu_x \sqrt{\frac{[\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}]}{[B\,B]}} = \pm 0{\cdot}026 \text{ zum Azimut } \psi_0 = 99^0\,49' \text{ gehörend,}$$

$$\mu_{II} = \mu_y \sqrt{\frac{[\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}]}{[A\,A]}} = \pm 0{\cdot}039 \text{ zum Azimut } \psi_0 - 90^0 = 9^0\,49' \text{ gehörend.}$$

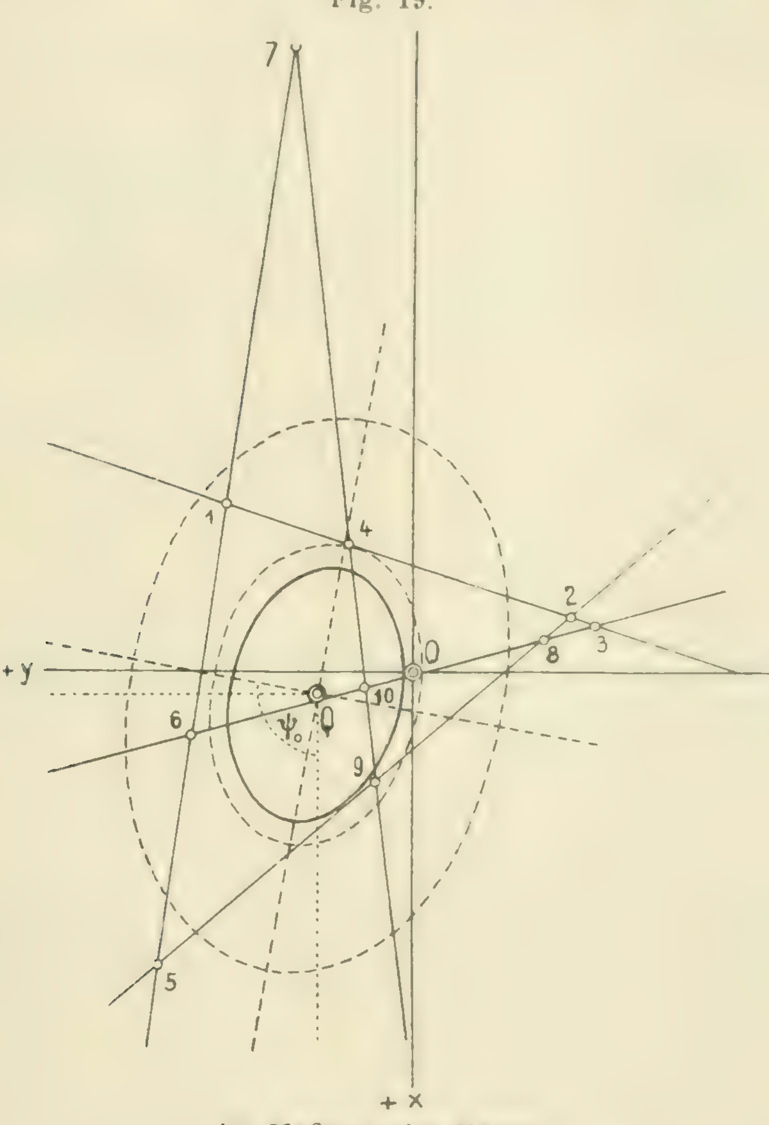
Bringt man die den Fehlergleichungen entsprechenden Geraden $a\,\delta x + b\,\delta y + (\delta z + w) = 0$, nämlich

$$\begin{aligned}
129{\cdot}8\,\delta x - 42{\cdot}0\,\delta y - 4{\cdot}11 &= 0\\
+\ 38{\cdot}3\,\delta x - 262{\cdot}3\,\delta y + 16{\cdot}89 &= 0\\
-\ 170{\cdot}7\,\delta x - 150{\cdot}0\,\delta y - 4{\cdot}11 &= 0\\
+\ 182{\cdot}5\,\delta x - 50{\cdot}3\,\delta y - 0{\cdot}11 &= 0\\
+\ 30{\cdot}4\,\delta x + 280{\cdot}3\,\delta y - 4{\cdot}11 &= 0
\end{aligned}$$

in ein Schaubild (Fig. 19), so erhält man zehn Schnittpunkte. Die wahrscheinlichste Ortslage derselben entspricht dem Kernpunkte Q mit den Koordinaten $\delta x, \delta y$, bezogen auf den im Näherungspunkte O befindlichen Koordinatenursprung. Zeichnet man mit der wahrscheinlichsten Punktlage als Mittelpunkt die Zentralellipse mit den Halb-

achsen $A_\varepsilon = \mu_{\mathrm{I}} = 0{\cdot}026$, $B_\varepsilon = \mu_{\mathrm{II}} = 0{\cdot}039$, die wahrscheinliche Fehlerellipse mit den Halbachsen $A_\rho = 1{\cdot}1774\,\mu_{\mathrm{I}} = 0{\cdot}031$, $B_\rho = 1{\cdot}1774\,\mu_{\mathrm{II}} = 0{\cdot}046$ und die Grenzellipse für zehn Punktbestimmungen mit den Halbachsen $A_g = 2{\cdot}1460\,\mu_{\mathrm{I}} = 0{\cdot}056$, $B_g = 2{\cdot}1460\,\mu_{\mathrm{II}} = 0{\cdot}084$ ein, so gewinnt man ein klares Urteil über die Streuung der Punktfehler Die

Fig. 19.



Im Maße $^1/_3$ der Natur.

wahrscheinliche Fehlerellipse umschließt 3 anstatt 5, die Grenzellipse 5 anstatt 9 Schnittpunkte, was auf eine minder gute Punktbestimmung schließen läßt.

§ 25. Negative Gewichte.

In den beim Rückwärtseinschneiden vorkommenden Fehlergleichungen sind die Koeffizienten der unbekannten Nullpunktskorrektion δz durchaus gleich -1. Diesen Umstand kann man nach **Schreiber** (1877) dazu benützen, um eine Vereinfachung in der

Rechnung herbeizuführen. Eine bloße Überlegung läßt nämlich erkennen, daß man zu denselben reduzierten Normalgleichungen (7) des § 24 gelangt, wenn man an Stelle der n Fehlergleichungen mit drei Unbekannten $\partial x, \partial y, \partial z$, nämlich

$$\begin{array}{ll} a_1\,\partial x + b_1\,\partial y + \partial z + w_1 = v_1, & \text{Gewicht: } g_1 \\ a_2\,\partial x + b_2\,\partial y + \partial z + w_2 = v_2, & \quad \text{"} \quad g_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_n\,\partial x + b_n\,\partial y + \partial z + w_n = v_n, & \quad \text{"} \quad g_n \end{array}$$

die n reduzierten, von ∂z befreiten Fehlergleichungen und außerdem eine fingierte Fehlergleichung setzt, welche durch Summierung der reduzierten Fehlergleichungen unter Berücksichtigung der Gewichte g_1 bis g_n entsteht und das negative Gewicht $-\frac{1}{[g]}$ besitzt. Denn das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} a_1\,\partial x + b_1\,\partial y + w_1 = \mathfrak{v}_1 & \text{Gewicht: } g_1 \\ a_2\,\partial x + b_2\,\partial y + w_2 = \mathfrak{v}_2 & \quad \text{"} \quad g_2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_n\,\partial x + b_n\,\partial y + w_n = \mathfrak{v}_n & \quad \text{"} \quad g_n \\ [g\,a]\,\partial x + [g\,b]\,\partial y + [g\,w] = \mathfrak{V} & \quad \text{"} \quad -\frac{1}{[g]} \end{array}$$

liefert dieselben Normalgleichungen für ∂x und ∂y. Es ist z. B. die Summe der mit den Gewichten multiplizierten Quadrate der ersten Fehlergleichungskoeffizienten:

$$g_1\,a_1^2 + g_2\,a_2^2 + \cdots + g_n\,a_n^2 - \frac{1}{[g]}\,[g\,a]^2 = [g\,a\,a] - \frac{[g\,a]}{[g]}\,[g\,a] = [A\,A]$$

gleich dem ersten Normalgleichungskoeffizienten von (7) des § 24, usw.

Bei gleichgewichtigen Beobachtungen lautet die fingierte Fehlergleichung

$$[a]\,\partial x + [b]\,\partial y + [w] = \mathfrak{V} \text{ und ihr Gewicht: } -\frac{1}{n}.$$

Aus den Widersprüchen $\mathfrak{v}$ ergeben sich die Verbesserungen v der Richtungsbeobachtungen nach (1), § 24, wie folgt:

$$v_1 = \mathfrak{v}_1 + \partial z,\; v_2 = \mathfrak{v}_2 + \partial z,\; \ldots\; v_n = \mathfrak{v}_n + \partial z;$$

aus der Summengleichung:

$$[v] = [\mathfrak{v}] + n\,\partial z = 0$$

erhält man

$$\partial z = -\frac{[\mathfrak{v}]}{n},$$

somit ist

$$r_1 = \mathfrak{v}_1 - \frac{[\mathfrak{v}]}{n}, \quad r_2 = \mathfrak{v}_2 - \frac{[\mathfrak{v}]}{n}, \quad \cdots \quad r_n = \mathfrak{v}_n - \frac{[\mathfrak{v}]}{n}.$$

In Anwendung auf das Beispiel des § 24 hat man die Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned}
-129{\cdot}8\,\partial x - 42{\cdot}0\,\partial y &= \mathfrak{v}_1 \text{ mit dem Gewicht: } 1\\
+38{\cdot}3\,\partial x - 262{\cdot}3\,\partial y + 21 &= \mathfrak{v}_2 \quad " \quad " \quad " \quad 1\\
-170{\cdot}7\,\partial x - 150{\cdot}0\,\partial y &= \mathfrak{v}_3 \quad " \quad " \quad " \quad 1\\
-182{\cdot}5\,\partial x - 50{\cdot}3\,\partial y + 4 &= \mathfrak{v}_4 \quad " \quad " \quad " \quad 1\\
-30{\cdot}4\,\partial x - 280{\cdot}3\,\partial y &= \mathfrak{v}_5 \quad " \quad " \quad " \quad 1\\
-292{\cdot}1\,\partial x - 224{\cdot}3\,\partial y + 25 &= \mathfrak{V} \quad " \quad " \quad " \quad -\tfrac{1}{5}
\end{aligned}$$

Bildung der Koeffizienten und Absolutglieder der Normalgleichungen:

$g\,a\,a$	$g\,a\,b$	$g\,a\,w$	$g\,b\,b$	$g\,b\,w$	$g\,w\,w$
+ 16 848	+ 5 452	—	+ 1 764	—	—
+ 1 467	— 10 046	+ 804	+ 68 801	— 5 508	+ 441
+ 29 138	— 25 605	—	+ 22 500	—	—
+ 33 306	— 9 180	+ 730	+ 2 530	— 201	+ 16
+ 924	+ 8 521	—	+ 78 568	—	—
— 17 064	+ 13 104	— 1 461	— 10 062	+ 1 121	— 125
+ 64 619	— 17 754	+ 73	+ 164 101	— 4 588	+ 332

Die Normalgleichungen

$$\begin{aligned}
+64619\,\partial x - 17754\,\partial y + 73 &= 0\\
-17754\,\partial x + 164101\,\partial y - 4588 &= 0
\end{aligned}$$

stimmen mit den im § 24, S. 96 erhaltenen sehr gut überein. Nun rechnet man mit den hieraus hervorgehenden Koordinatenverbesserungen

$$\partial x = -0{\cdot}0068, \quad \partial y = +0{\cdot}0287$$

die Richtungsverbesserungen in folgender Weise (4. Methode; vgl. § 24):

$a\,\partial x$ +	$b\,\partial y$ +	w =	$\mathfrak{v}$	$r = \mathfrak{v} - \frac{[\mathfrak{v}]}{n}$
— 0·88	— 1·21	0	— 2·09	— 6·20
+ 0·26	— 7·53	+ 21	+ 13·73	+ 9·62
+ 1·16	— 4·31	0	— 3·15	— 7·26
+ 1·24	— 1·44	+ 4	+ 3·80	— 0·31
— 0·21	+ 8·04	0	+ 8·25	+ 4·14
		$[\mathfrak{v}]$ =	+ 20·54	+ 0·01

$$[\mathfrak{v}] : 5 = + 4{\cdot}11.$$

Man kann aus dem System der Fehlergleichungen eine Unbekannte auch dann eliminieren, wenn die Koeffizienten nicht gerade $+1$ oder -1 sind, sondern irgend welche Werte $a_1, a_2, \ldots a_n$ besitzen. Die Verallgemeinerung der Schreiberschen Regel geht dann dahin, daß anstatt der n Fehlergleichungen

$$a_i x + b_i y + c_i z + \cdots - l_i = v_i \text{ mit den Gewichten } g_i$$

ein System von reduzierten Gleichungen ohne x gesetzt werden kann, nämlich n Fehlergleichungen

$$b_i y + c_i z + \cdots - l_i = \mathfrak{v}_i \text{ mit den Gewichten } g_i$$

und eine $(n+1)$-te Fehlergleichung von der Form einer Normalgleichung:

$$[g a b]\, y + [g a c]\, z + \cdots - [g a l] = \mathfrak{V} \text{ mit dem Gewichte } \frac{-1}{[g a a]}\,.$$

Dieses um die Unbekannte x reduzierte System von Gleichungen liefert in bezug auf die Bestimmung der übrigen Unbekannten $y, z, \ldots$ dieselben Normalgleichungen und es gibt auch dieselbe Summe der Fehlerquadrate wie das ursprüngliche, nicht reduzierte Fehlergleichungssystem, denn die aus dem reduzierten System direkt erhaltenen Normalgleichungen:

$$\begin{aligned}
[g b b . 1]\, y + [g b c . 1]\, z + \cdots - [g b l . 1] &= 0\\
[g b c . 1]\, y + [g c c . 1]\, z + \cdots - [g c l . 1] &= 0
\end{aligned}$$

sind nichts anderes als die aus den Normalgleichungen des ursprünglichen Systems abgeleiteten ersten reduzierten Normalgleichungen. Erhält man aber nach beiden Systemen dieselben Werte der Unbekannten $y, z, \ldots$, so ist, wie aus Vergleichungen der ursprünglichen mit den reduzierten Gleichungen hervorgeht,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{v}_i &= v_i - a_i x\\
\mathfrak{V} &= -[g a a]\, x\\
[g \mathfrak{v} \mathfrak{v}] &= [g v v] - 2\,[g a v]\, x + [g a a]\, x^2
\end{aligned}$$

oder, da $[g a v] = 0$ und $[g a a]\, x^2 = -\mathfrak{V} x = \dfrac{\mathfrak{V}^2}{[g a a]}$ ist,

$$[g \mathfrak{v} \mathfrak{v}] = [g v v] + \frac{\mathfrak{V}^2}{[g a a]},$$

folglich:

$$[g v v] = [g \mathfrak{v} \mathfrak{v}] - \frac{\mathfrak{V}\mathfrak{V}}{[g a a]}\,.$$

Krüger (1899) hat gezeigt, daß man, in der angegebenen Weise fortfahrend, nach und nach sämtliche Unbekannte eliminieren kann

und daß das zuletzt übrigbleibende Gleichungssystem ohne Unbekannte dem ursprünglichen Gleichungssystem mit allen Unbekannten vollständig äquivalent ist und auch dieselbe kleinste Summe der Fehlerquadrate gibt. (Vergl. „Über reduzierte Fehlergleichungen" in der Zeitschrift für Vermessungswesen, 1899, S. 396).

§ 26. Anschlußgewichte.

Hat man von einem durch seine Koordinaten gegebenen Punkte O aus mehrere in gleicher Weise gegebene Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$ und einen neu zu bestimmenden Punkt Q anvisiert, so sagt man, man hat eine gemessene Richtung nach einem neu zu bestimmenden Punkte an mehrere feste Richtungen angeschlossen.

Zur eindeutigen Bestimmung des Richtungswinkels von O nach Q würde der Anschluß an einen einzigen festen Strahl, z. B. QP_1, genügen. Bezeichnet man nämlich die beobachteten Richtungen von O nach P_1 und nach Q mit r_1 beziehungsweise r_φ und ist der aus den gegebenen Koordinaten von O und P_1 berechnete Richtungswinkel gleich σ_1, so ist der Richtungswinkel von O nach Q bestimmt durch

$$\sigma_\varphi = \sigma_1 + (r_\varphi - r_1)$$

Durch den Anschluß des neuen Strahles an mehrere feste Strahlen treten überschüssige Bestimmungen hinzu; der wahrscheinlichste Wert des Richtungswinkels ergibt sich dann durch Mittelbildung in folgender Weise. Aus den beobachteten und vorläufig orientierten festen Richtungen $r_1, r_2, \ldots r_n$ und den berechneten unabänderlichen Richtungswinkeln $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ ergeben sich die Differenzen:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - r_1 &= z_1 \\ \sigma_2 - r_2 &= z_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad &\cdot \quad \cdot \\ \sigma_n - r_n &= z_n. \end{aligned}$$

Bildet man davon das arithmetische Mittel $\frac{[z]}{n} = z_0$ und addiert es algebraisch zu r_φ, so erhält man den wahrscheinlichsten Wert der orientierten beobachteten Richtung nach dem Neupunkte: $r_\varphi + z_0 = R_\varphi$, und ebenso die endgültig orientierten Richtungen der festen Strahlen:

$$\begin{aligned} r_1 + z_0 &= R_1 \\ r_2 + z_0 &= R_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad &\cdot \quad \cdot \\ r_n + z_0 &= R_n. \end{aligned}$$

Die Unterschiede zwischen den endgültig orientierten Richtungen R und den gerechneten Richtungswinkeln σ, nämlich die Differenzen

$$\sigma_1 - R_1 = \lambda_1$$
$$\sigma_2 - R_2 = \lambda_2$$
$$\ldots\ldots$$
$$\sigma_n - R_n = \lambda_n,$$

deren Summe gleich Null sein muß, sind die scheinbaren Richtungsfehler der festen Strahlen und es ist der mittlere Fehler einer einzelnen dieser Richtungsmessungen: $\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}$, wobei im Nenner n die Anzahl aller Anschlüsse und daher $n-1$ die Anzahl der überschüssigen Anschlüsse bedeutet. Der mittlere Fehler der Orientierungsgröße z_0 ist, da sie als arithmetisches Mittel aus n Bestimmungen hervorgegangen ist, gleich

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n(n-1)}}$$

oder es ist ihr Gewicht gleich n. Wünscht man den mittleren Fehler m der orientierten Richtung des neuen Strahles kennen zu lernen, so hat man zu beachten, daß entsprechend der Gleichung $R_\varrho = r_\varrho + z_0$ die endgültig orientierte Richtung R_ϱ gleich ist der Summe zweier Größen r_ϱ und z_0, deren mittlere Fehler μ beziehungsweise $\frac{\mu}{\sqrt{n}}$ sind. Daher ist nach dem Fehlerübertragungsgesetze, I. Band, S. 91, Gleichung (2), der mittlere Fehler der durch den Anschluß an n feste Strahlen neu orientierten Richtung:

$$m^2 = \mu^2 + \frac{\mu^2}{n} = \frac{n+1}{n}\mu^2,$$

und es ist ihr Gewicht, abgesehen von einem etwaigen Genauigkeitsgewichte:

$$g = \frac{n}{n+1}. \tag{1}$$

Dieses Ergebnis kann auch in folgender Weise erhalten werden: Bezeichnet man die den orientierten Richtungen R beim Eingehen in eine neue Ausgleichung zukommenden Verbesserungen mit v, so hat man, da sich diese v von den λ nur durch einen allen Richtungen gemeinsamen Orientierungsfehler δz unterscheiden können, für die Richtungsbeobachtungen nach den gegebenen Punkten, deren Koordinaten keine Veränderungen erleiden, die Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} d z + \lambda_1 = v_1 \\ d z + \lambda_2 = v_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ d z + \lambda_n = v_n \end{array}\right\} \qquad (2)$$

wobei die Bedingung $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0$ erfüllt sein muß, während für die beobachtete Richtung nach dem zu bestimmenden Punkte, dessen Näherungskoordinaten x, y die Verbesserungen dx, dy erhalten sollen, die Fehlergleichung

$$a\,dx + b\,dy + dz + \lambda_o = v_o \qquad (3)$$

besteht. Den $n + 1$ Fehlergleichungen (2) und (3) entsprechen die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} aa\,dx + ab\,dy + a\,dz + a\lambda_o &= 0 \\ ab\,dx + bb\,dy + b\,dz + b\lambda_o &= 0 \\ a\,dx + b\,dy + (n+1)\,dz + [\lambda] &= 0. \end{aligned}$$

Durch Elimination des für die Ausgleichungssache gleichgültigen Orientierungsfehlers dz erhält man die reduzierten Normalgleichungen:

$$\left(aa - \frac{a}{n+1}\,a\right)dx + \left(ab - \frac{a}{n+1}\,b\right)dy + \left(a\lambda_o - \frac{a}{n+1}\,[\lambda]\right) = 0$$

$$\left(ab - \frac{b}{n+1}\,a\right)dx + \left(bb - \frac{b}{n+1}\,b\right)dy + \left(b\lambda_o - \frac{b}{n+1}\,[\lambda]\right) = 0$$

oder da unter der Beachtung, daß wegen $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0$, die Summe

$$[\lambda] = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n + \lambda_o = \lambda_o$$

sein muß, nach einer leichten Umwandlung:

$$\frac{n}{n+1}\,(aa\,dx + ab\,dy + a\lambda_o) = 0$$

$$\frac{n}{n+1}\,(ab\,dx + bb\,dy + b\lambda_o) = 0.$$

Wie der bloße Anblick belehrt, gehen diese reduzierten Normalgleichungen auch sofort aus einer einzigen Fehlergleichung ohne dz, jedoch mit dem fingierten Gewichte $g = \frac{n}{n+1}$ hervor, denn es liefert die Gleichung:

$$a\,dx + b\,dy + \lambda_o = 0 \text{ mit dem Gewichte } \frac{n}{n+1} \qquad (4)$$

dieselben Normalgleichungskoeffizienten, woraus hervorgeht, daß aus den $n + 1$ Fehlergleichungen (2) und (3) dieselben Verbesserungen dx, dy erhalten werden, wie aus der einzigen Gleichung (4).

Wird also eine äußere Richtung an n feste Richtungen angeschlossen, so besitzt die mit Zuziehung aller n festen Richtungen orientierte äußere Richtung und auch die entsprechende Fehlergleichung das Anschlußgewicht $g = \frac{n}{n+1}$, wenn einer inneren Richtung (die keinen Anschluß besitzt) das Gewicht 1 zukommt.

§ 27. Verallgemeinerung des Problems der Richtungs-Anschlüsse.

Bisher wurde angenommen, daß nur ein neuer Strahl an mehrere alte Strahlen angebunden werde. Sollen zwei neue Strahlen an n alte Strahlen Anschluß finden, so lauten die entsprechenden $n+2$ Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} \ldots\ldots\ldots\ \delta z + \lambda_1 = v_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ \delta z + \lambda_2 = v_2 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ \delta z + \lambda_n = v_n \end{array}\right\} \begin{array}{l} n \text{ Fehlergleichungen} \\ \text{für die festen Strahlen,} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} a\,\delta x + b\,\delta y + \ldots\ldots\ldots\ \delta z + \lambda_{n+1} = v_{n+1} \\ \ldots\ldots\ a'\,\delta x' + b'\,\delta y' + \delta z + \lambda_{n+2} = v_{n+2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \text{ Fehlergleichungen} \\ \text{für die neuen Strahlen,} \end{array}$$

wobei die Bedingungen bestehen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= 0 \\ [\lambda] &= \lambda_{n+1} + \lambda_{n+2} \\ [v] &= 0. \end{aligned}$$

Die entsprechenden Normalgleichungen sind:

$$\begin{array}{rrrrr} a\,a\,\delta x + a\,b\,\delta y & \ldots\ldots\ldots & +\ a & \delta z + a\,\lambda_{n+1} & = 0 \\ a\,b\,\delta x + b\,b\,\delta y & \ldots\ldots\ldots & +\ b & \delta z + b\,\lambda_{n+1} & = 0 \\ \ldots\ldots & a'a'\,\delta x' + a'b'\,\delta y' & +\ a' & \delta z + a'\,\lambda_{n+2} & = 0 \\ \ldots\ldots & a'b'\,\delta x' + b'b'\,\delta y' & +\ b' & \delta z + b'\,\lambda_{n+2} & = 0 \\ a\ \delta x + b\,\delta y & +\ a'\ \delta x' + \ b'\ \delta y' & + (n+2) & \delta z + \ [\lambda] & = 0. \end{array}$$

Wird hieraus δz eliminiert, so erhält man die reduzierten Normalgleichungen:

$$\left(a\,a - \frac{a}{n+2}\,a\right)\delta x + \left(a\,b - \frac{a}{n+2}\,b\right)\delta y - \frac{a}{n+2}\,a'\,\delta x' - \frac{a}{n+2}\,b'\,\delta y' +$$
$$+ a\,\lambda_{n+1} - \frac{a}{n+2}\,[\lambda] = 0$$

$$\left(a\,b - \frac{b}{n+2}\,a\right)\delta x + \left(b\,b - \frac{b}{n+2}\,b\right)\delta y - \frac{b}{n+2}\,a'\,\delta x' - \frac{b}{n+2}\,b'\,\delta y' +$$
$$+ b\,\lambda_{n+1} - \frac{b}{n+2}\,[\lambda] = 0$$

$$-\frac{a'}{n+2}\,a\,\delta x-\frac{a'}{n+2}\,b\,\delta y+\left(a'a'-\frac{a'}{n+2}\,a'\right)\delta x'$$
$$+\left(a'b'-\frac{a'}{n+2}\,b'\right)\delta y'+a'\lambda_{n+2}-\frac{a'}{n+2}\,[\lambda]=0$$

$$-\frac{b'}{n+2}\,a\,\delta x-\frac{b'}{n+2}\,b\,\delta y+\left(a'b'-\frac{b'}{n+2}\,a'\right)\delta x'$$
$$+\left(b'b'-\frac{b'}{n+2}\,b'\right)\delta y'+b'\lambda_{n+2}-\frac{b'}{n+2}\,[\lambda]=0.$$

Zu denselben Gleichungen gelangt man auch, wenn man die n Fehlergleichungen für die festen Strahlen überhaupt wegläßt und zu den beiden Fehlergleichungen für die neuen Strahlen ohne δz mit dem Gewichte 1 die durch Summierung dieser beiden Fehlergleichungen gebildete Summengleichung mit dem negativen Gewichte $-\frac{1}{n+2}$ hinzugefügt und für diese drei Fehlergleichungen die Normalgleichungen aufstellt, denn es liefern die Fehlergleichungen

$$\begin{array}{llr}
a\,\delta x+b\,\delta y\;\ldots\ldots\ldots\ldots-\lambda_{n+1}=\mathfrak{v}_{n+1} & \text{Gewicht} = & 1\\
\ldots\ldots\quad a'\,\delta x'+b'\,\delta y'-\lambda_{n+2}=\mathfrak{v}_{n+2} & \text{„} & 1\\
a\,\delta x+b\,\delta y+a'\,\delta x'+b'\,\delta y'-\lambda_{n+1}-\lambda_{n+2}=\mathfrak{v}_0 & \text{„} & -\dfrac{1}{n+2}
\end{array}$$

dieselben Normalgleichungskoeffizienten.

Bezeichnet allgemein n die Anzahl der alten festen Strahlen, m die Anzahl der neuen Strahlen eines Satzes, so hat man neben den m Vermittlungsgleichungen für die neuen äußeren Strahlen ohne δz mit den Gewichten 1 noch die durch Summierung dieser Gleichungen gebildete Summengleichung mit dem Gewichte $-\frac{1}{n+m}$ anzusetzen und mit Zuziehung derselben die Normalgleichungen zu bilden.

Für den besonderen Fall, daß auf einem gegebenen Punkte nur 1 neuer Strahl an mehrere feste Strahlen angeschlossen wird, also für $m=1$, ist die einzige Vermittlungsgleichung zugleich auch die Summengleichung, welche somit nur einmal anzusetzen, jedoch mit dem Gewichte

$$1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

zu versehen ist, wie dies bereits im § 26 direkt gefunden wurde.

Für einen gegebenen und einen neuen Strahl, also für eine an einen festen Strahl angelegte Winkelmessung, reduziert sich das Anschlußgewicht auf $\frac{1}{2}$ im Vergleiche mit einer freien Richtungsmessung vom Gewichte 1.

Dieses Resultat geht auch aus folgender Überlegung hervor: Hat man einen Winkel durch zwei Richtungsmessungen bestimmt, deren jeder der mittlere Fehler $\pm \mu_r$ anhaftet, so ist der Winkel als die Differenz dieser beiden Richtungen nach dem Fehlerübertragungsgesetze mit einem mittleren Fehler von der Größe $\mu_w = \sqrt{2\mu_r^2} = \mu_r \sqrt{2}$ oder mit dem Gewichte $\frac{1}{2}$ behaftet. Denselben Fehler oder dasselbe Gewicht besitzt aber auch eine einzelne dieser Richtungen, wenn die andere an einen gegebenen Punkt angeschlossen, also als eine fehlerlose Richtung betrachtet wird, weil dann jene alle beide Fehler $\pm \mu_r$, $\pm \mu_r$, also im Mittel den Fehler $\mu_r \sqrt{2}$ aufzunehmen hat. (Vgl. § 15.)

Ist daher das Gewicht einer inneren Richtung gleich 1, so ist unter sonst gleichen Umständen das Gewicht einer äußeren Richtung, wenn sie an einen festen fehlerlosen Strahl angeschlossen wird, gleich $\frac{1}{2}$; wenn sie an zwei feste Strahlen angeschlossen wird, gleich $\frac{2}{3}$ und wenn sie an n feste Strahlen angeschlossen wird, gleich $\frac{n}{n-1}$.

Besitzen die einzelnen Richtungen von vornherein verschiedene „Genauigkeitsgewichte" p oder schreibt man jedem Strahle ein seiner Länge s angemessenes „Strahlengewicht" s zu, so hat man bei der Ableitung der „Anschlußgewichte" q nur zu beachten, daß an Stelle der Anzahl der Strahlen nunmehr die Summe der betreffenden Gewichte $[p]$, $[s]$ oder $[ps]$ zu treten hat. Die Verallgemeinerung z. B. für ungleiche Strahlengewichte gibt dann folgende Gewichtsansätze:*)

Bezeichnen $s_1, s_2, s_3, \ldots; s_1', s_2', s_3', \ldots; s_1'', s_2'', s_3'', \ldots$ usw. die Strahlengewichte der beobachteten Richtungen je eines auf den gegebenen Punkten gemessenen Satzes; $N, N', N'', \ldots$ die Summe der Strahlengewichte aller in den betreffenden Satz einbezogenen gegebenen Richtungen; $M, M', M'', \ldots$ die Summen der Strahlengewichte aller in dem betreffenden Satze gemessenen neuen Richtungen, also $N + M = [s]$, $N' + M' = [s']$, $N'' + M'' = [s'']$, usw., so hat man im allgemeinen neben den einzelnen Vermittlungsgleichungen ohne Orientierungsfehler δz mit den reinen Strahlengewichten s je eine Zusatzgleichung mit dem fingierten Gewichte $\frac{-s^2}{N+M}$ anzusetzen.

*) Vgl. des Verfassers Artikel über die „Beziehung zwischen den Methoden der Ausgleichung bedingter und vermittelnder Beobachtungen" in der Zeitschrift für Vermessungswesen, 1906, S. 289 und § 62 dieses Bandes.

Für den besonderen Fall, daß nur ein gegebener Strahl von der Länge s_n und ein neuer Strahl von der Länge s_0 vorhanden sind, hat die Vermittlungsgleichung das Gewicht s_0, die Zusatzgleichung (wegen $s = s_0$, $N = s_n$ und $M = s_0$) das Gewicht $\frac{s_n^2}{s_n + s_0}$, somit hat man dem neuen Strahl, da in diesem Falle die Vermittlungsgleichung zugleich auch Zusatzgleichung ist, das neue Gewicht

$$s_0 - \frac{s_0^2}{s_0 + s_n} = s_0 \frac{s_n}{s_0 + s_n}$$

zu erteilen.

Die Ableitung der Gewichtsformel für den Fall des Anschlusses einer gemessenen neuen Richtung an mehrere feste Strahlen nimmt folgenden Verlauf: Wurden auf einem gegebenen Punkte die Strahlen $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n$ nach n gegebenen Punkten und ein Strahl s_0 nach einem neu zu bestimmenden Punkte in einem Satze gemessen, so hat man folgendes System von Vermittlungsgleichungen:

$$\begin{array}{llllll}
\delta z \; . \; . \; . \; . \; . \; + l_1 = 0 & \text{mit} & \text{dem} & \text{Gewichte} & s_1 \\
\delta z \; . \; . \; . \; . \; . \; + l_2 = 0 & \text{"} & \text{"} & \text{"} & s_2 \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & & & & \\
\delta z \; . \; . \; . \; . \; . \; + l_n = 0 & \text{"} & \text{"} & \text{"} & s_n \\
\delta z + a\,\delta x + b\,\delta y + l_0 = 0 & \text{"} & \text{"} & \text{"} & s_0,
\end{array}$$

wobei die Beziehungen bestehen:

$$s_1 l_1 + s_2 l_2 + \cdots + s_n l_n = 0$$
$$[sl] = s_0 l_0.$$

Um hieraus den für die Ausgleichungssache gleichgültigen Orientierungsfehler δz zu eliminieren, bilde man mit Rücksicht auf die Gewichtszahlen die Summe aller Vermittlungsgleichungen

$$[s]\,\delta z + s_0\, a\, \delta x + s_0\, b\, \delta y + [sl] = 0$$

und durch Division dieser Summengleichung durch die Anzahl der Vermittlungsgleichungen $[s]$ die dem allgemeinen arithmetischen Mittel entsprechende Durchschnittsgleichung:

$$\delta z + \frac{s_0}{[s]}\, a\, \delta x + \frac{s_0}{[s]}\, b\, \delta y + \frac{[sl]}{[s]} = 0,$$

welche, von den einzelnen Vermittlungsgleichungen subtrahiert, die folgenden von dem unbekannten Orientierungsfehler δz befreiten, reduzierten Vermittlungsgleichungen liefert:

$$-\frac{s_0}{[s]}\,a\,\partial x - \frac{s_0}{[s]}\,b\,\partial y + l_1 - \frac{[s\,l]}{[s]} = 0, \qquad \text{Anzahl } s_1$$

$$-\frac{s_0}{[s]}\,a\,\partial x - \frac{s_0}{[s]}\,b\,\partial y + l_2 - \frac{[s\,l]}{[s]} = 0, \qquad " \quad s_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{s_0}{[s]}\,a\,\partial x - \frac{s_0}{[s]}\,b\,\partial y + l_n - \frac{[s\,l]}{[s]} = 0, \qquad " \quad s_n$$

$$\left(1-\frac{s_0}{[s]}\right) a\,\partial x + \left(1-\frac{s_0}{[s]}\right) b\,\partial y + l_0 - \frac{[s\,l]}{[s]} = 0, \qquad " \quad s_0$$

Hieraus bildet man die Normalgleichungen:

$$a\,a\left(\frac{s_0^2}{[s]} + s_0 - \frac{2\,s_0^2}{[s]}\right)\partial x + a\,b\left(\frac{s_0^2}{[s]} + s_0 - \frac{2\,s_0^2}{[s]}\right)\partial y + a\,s_0\left(l_0 - \frac{[s\,l]}{[s]}\right) = 0$$

$$a\,b\left(\frac{s_0^2}{[s]} + s_0 - \frac{2\,s_0^2}{[s]}\right)\partial x + b\,b\left(\frac{s_0^2}{[s]} + s_0 - \frac{2\,s_0^2}{[s]}\right)\partial y + b\,s_0\left(l_0 - \frac{[s\,l]}{[s]}\right) = 0.$$

Durch algebraische Reduktion der Klammerausdrücke und Berücksichtigung der Beziehung $[s\,l] = s_0\,l_0$ in den letzten Gliedern der beiden Normalgleichungen ergeben sich die letzteren in der Form:

$$a\,a\left(1-\frac{s_0}{[s]}\right)s_0\,\partial x + a\,b\left(1-\frac{s_0}{[s]}\right)s_0\,\partial y + a\,l_0\left(1-\frac{s_0}{[s]}\right)s_0 = 0$$

$$a\,b\left(1-\frac{s_0}{[s]}\right)s_0\,\partial x + b\,b\left(1-\frac{s_0}{[s]}\right)s_0\,\partial y + b\,l_0\left(1-\frac{s_0}{[s]}\right)s_0 = 0.$$

oder, wenn $\left(1-\frac{s_0}{[s]}\right)s_0 = S$ gesetzt wird, übersichtlicher:

$$a\,a\,S\,\partial x + a\,b\,S\,\partial y + a\,l_0\,S = 0$$
$$a\,b\,S\,\partial x + b\,b\,S\,\partial y + b\,l_0\,S = 0.$$

Diese reduzierten Normalgleichungen erhält man aber auch sofort aus einer einzigen Vermittlungsgleichung ohne ∂z, aber mit dem fingierten Gewichte S, wie dies aus der übersichtlich geschriebenen Form der Normalgleichungen ohne weiteres hervorgeht, denn die Vermittlungsgleichung

$$a\,\partial x + b\,\partial y + l_0 = 0 \text{ mit dem Gewichte } S$$

liefert dieselben Normalgleichungskoeffizienten.

Für den besonderen Fall gleicher Strahlengewichte, also für $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = s_0 = 1$ und $[s] = n+1$, nimmt das Gewicht S den bereits bekannten Wert $\frac{n}{n+1}$ an. Hat man nur *einen* gegebenen Strahl s_n und *einen* neuen Strahl s_0, so geht S für $[s] = s_n + s_0$ über in

$$S = s_0\left(1 - \frac{s_0}{s_0 + s_n}\right) = s_0\,\frac{s_n}{s_0 + s_n},$$

welcher Wert auch schon aus dem allgmeinen Ansatz für das fingierte Zusatzgewicht, das in analoger Weise abgeleitet werden kann, hervorgegangen ist.

§ 28. Kombiniertes Einschneiden.

Besteht für den Richtungswinkel σ_{QP} von dem zu bestimmenden Punkte Q als Standpunkt nach dem gegebenen Punkte P als Zielpunkt die Differentialformel:

$$\delta\sigma_{QP} = \varrho''\,\frac{\sin\sigma_{QP}}{s}\,\delta x - \varrho''\,\frac{\cos\sigma_{QP}}{s}\,\delta y,$$

so hat man für den Richtungswinkel σ_{PQ} von dem gegebenen Punkte P als Standpunkt nach dem zu bestimmenden Punkte Q als Zielpunkt die Formel (vgl. Fußnote S. 85):

$$\delta\sigma_{PQ} = -\varrho''\,\frac{\sin\sigma_{PQ}}{s}\,\delta x + \varrho''\,\frac{\cos\sigma_{PQ}}{s}\,\delta y,$$

wobei δx, δy die Verbesserungen der Näherungskoordinaten x, y von Q bedeuten. Da aber

$$\sigma_{PQ} = \sigma_{QP} \pm 180^\circ,$$

also $\sin\sigma_{QP} = -\sin\sigma_{PQ}$ und $\cos\sigma_{QP} = -\cos\sigma_{PQ}$ ist, so gilt sowohl für die innere, als auch für die äußere Richtung die Formel (3) des § 22, S. 87:

$$\delta\sigma = a\,\delta x + b\,\delta y.$$

Die Fehlergleichungen für die äußere und innere Richtung eines und desselben Strahles haben daher allgemein die Form:

$$a\,\delta x + b\,\delta y \qquad + w_1 = v_1, \qquad \text{Gewicht} = \frac{n}{n-1}$$

$$a\,\delta x + b\,\delta y + \delta z + w_2 = v_2, \qquad \quad " \qquad = 1\;,$$

wenn von beiden Endpunkten P und Q der eine definitiv, der andere nur näherungsweise gegeben ist und δx, δy die Koordinatenverbesserungen des letzteren bedeuten. Sollten aber beide Endpunkte nur durch Näherungskoordinaten gegeben sein, und bezeichnen δx_Q, δy_Q und δx_P, δy_P die Koordinatenverbesserungen von Q beziehungsweise P, so lauten die betreffenden Fehlergleichungen:

$$a\,(\delta x_Q - \delta x_P) + b\,(\delta y_Q - \delta y_P) + \delta z_1 + w_1 = v_1, \quad \text{Gewicht} = 1$$

$$a\,(\delta x_Q - \delta x_P) + b\,(\delta y_Q - \delta y_P) + \delta z_2 + w_2 = v_2, \quad \quad " \qquad = 1$$

Sind beispielsweise die definitiven Koordinaten von P und die genäherten Koordinaten von Q:

$$\begin{array}{llll} P: & X = -111\,354{\cdot}16 & & Y = -17\,784{\cdot}32 \\ Q: & x = -111\,178{\cdot}74 & & y = -20\,272{\cdot}83 \\ \hline \text{also:} & \Delta x = -\quad 175{\cdot}42 & & \Delta y = +\;2\,488{\cdot}51, \end{array}$$

ferner die genäherten Richtungswinkel σ und die gemessenen Richtungen r:

$$\begin{array}{lll} & \sigma_{PQ} = 274^0\,01'\,56''0 & \sigma_{QP} = 94^0\,01'\,56''0 \\ & r_{PQ} = 274^0\,02'\,04''0 & r_{QP} = 94^0\,02'\,00''0 \\ \hline \text{also:} & w_1 = -\quad 8''0 & w_2 = -\quad 4''0 \end{array}$$

die Entfernung $PQ = 2495$ $(log\,PQ = 3{\cdot}39702)$

und die Richtungskoeffizienten: $a = +82{\cdot}5$, $b = +5{\cdot}8$, so lauten die Fehlergleichungen, wenn der Anschluß der äußeren Richtung an einen festen Strahl erfolgt ist:

$$+82{\cdot}5\,\delta x + 5{\cdot}8\,\delta y \qquad -8{\cdot}0 = v_1, \qquad \text{Gewicht} = \frac{1}{2}$$

$$+82{\cdot}5\,\delta x + 5{\cdot}8\,\delta y + \delta z - 4{\cdot}0 = v_2, \qquad \text{„} \quad = 1.$$

Soll nun ein Punkt Q durch mehrere äußere und innere Richtungen festgelegt werden, so ist der Rechnungsvorgang folgender: Nachdem die genäherten Koordinaten von Q und die genäherten Südwinkel σ', sowie die Werte a, b und w nach den in §§ 22 und 23 angegebenen Regeln berechnet sind, erfolgt zunächst die Reduktion der Zahlenwerte a, b, w für die inneren Richtungen in A, B, W nach § 24 und sodann die Bildung der Koeffizienten und absoluten Glieder der Normalgleichungen durch Summierung der Produkte $(g\,a\,a + g\,A\,A)$, $(g\,a\,b + g\,A\,B)$, $(g\,a\,w + g\,A\,W)$, usw. sowohl für die äußeren als auch für die inneren Richtungen, wobei die Gewichte g, abgesehen von den etwa zu berücksichtigenden Genauigkeitsgewichten, für die inneren Strahlen mit 1, für die äußeren Strahlen jedoch nach § 26 mit $\frac{n}{n+1}$ anzusetzen sind. Die zu suchenden Koordinatenverbesserungen ergeben sich dann aus den Normalgleichungen:

$$[g\,a\,a + g\,A\,A]\,\delta x + [g\,a\,b + g\,A\,B]\,\delta y + [g\,a\,w + g\,A\,W] = 0$$
$$[g\,a\,b + g\,A\,B]\,\delta x + [g\,b\,b + g\,B\,B]\,\delta y + [g\,b\,w + g\,B\,W] = 0$$

Bei minder wichtigen Punktbestimmungen kann von der Anwendung verschiedener Anschlußgewichte Umgang genommen werden, wie bei dem folgenden, der österreichischen „Instruktion für Theodolitvermessung" S. 108 entnommenen Beispiele: Bestimmung des

Punktes **2** durch die vier äußeren Richtungen von Spielberg = **Sp**, **4**, **1**, Stromberg = **St** und die sechs inneren Richtungen nach Spielberg = **Sp**, **4**, **1**, Stromberg = **St**, Hadi = **H**, **3**.

Die Koordinaten der gegebenen Punkte sind:

Sp:	$X =$ — 109 689·27	$Y =$ — 16 547·54
4:	— 111 354·16	— 17 784·32
1:	— 112 370·96	— 18 755·73
St:	— 115 651·17	— 18 152·94
H:	— 112 753·60	— 21 902·76
3:	— 110 470·67	— 20 416·53

Die Näherungskoordinaten des Neupunktes **2** sind:

2: $x =$ — 111 178·74 $y =$ — 20 272·83.

Die Rechnung wird nun nach Andeutung der am Kopfe der nachstehenden Tabellen angeführten Bezeichnungen schematisch in folgender Weise durchgeführt.

Netzpunkte	Richtungskoeffizienten a	A	b	B	Vorläufige Südwinkel σ'	Gesamtmittel aus den Beobachtungen R_m	Für die äußeren Richtungen: $R_0 + 180^\circ$ / Für die inneren Richtungen: $r = R_m + z$	$\omega = \sigma' - (R_0 + 180^\circ)$ / $w = \sigma' - r_0$	W
					In betreff der äußeren Richtungen				
Sp	+ 47·7		— 19·1		68° 12′ 25″8		68° 12′ 25″	+ 0·8	
4	+ 82·5		+ 5·8		94 01 56·0		94 02 04	— 8·0	
1	+ 84·1		+ 66·1		128 09 43·9		128 09 43	+ 0·9	
St	+ 17·9		+ 37·7		154 38 22·1		154 38 19	+ 3·1	
					In betreff der inneren Richtungen				
						+ 154° 38′ 20″ = z			
Sp	+ 47·7	+ 29·4	— 19·1	+ 1·9	68 12 25·8	273 34 12	68 12 32	— 6·2	— 3·5
4	+ 82·5	+ 64·2	+ 5·8	+ 26·8	94 01 56·0	299 23 40	94 02 00	— 4·0	— 1·3
1	+ 84·1	+ 65·8	+ 66·1	+ 87·1	128 09 43·9	333 31 29	128 09 49	— 5·1	— 2·4
St	+ 17·9	— 0·4	+ 37·7	+ 58·7	154 38 22·1	0 00 03	154 38 23	— 0·9	+ 1·8
H	— 65·4	— 83·7	+ 63·2	+ 84·2	225 59 04·0	71 20 38	225 58 58	+ 6·0	+ 8·7
3	— 56·8	— 75·1	— 279·7	— 258·7	348 31 40·3	193 53 26	348 31 46	— 5·7	— 3·0
	+ 110·0	+ 0·2	— 126·0	0·0				— 15·9	+ 0·3
: 6	+ 18·3		— 21·0				: 6	— 2·7	

Fehlergleichungen für die äußeren Richtungen:

$$
\begin{aligned}
+ 47{\cdot}7\,\delta x - 19{\cdot}1\,\delta y + 0{\cdot}8 &= v_1 \\
+ 82{\cdot}5\,\delta x + 5{\cdot}8\,\delta y - 8{\cdot}0 &= v_2 \\
+ 84{\cdot}1\,\delta x + 66{\cdot}1\,\delta y + 0{\cdot}9 &= v_3 \\
+ 17{\cdot}9\,\delta x + 37{\cdot}7\,\delta y + 3{\cdot}1 &= v_4,
\end{aligned}
$$

reduzierte Fehlergleichungen für die inneren Richtungen:

$$\begin{aligned}
-29{\cdot}4\,\delta x - 1{\cdot}9\,\delta y - 3{\cdot}5 &= v_5\\
+64{\cdot}2\,\delta x + 26{\cdot}8\,\delta y - 1{\cdot}3 &= v_6\\
+65{\cdot}8\,\delta x + 87{\cdot}1\,\delta y - 2{\cdot}4 &= v_7\\
-0{\cdot}4\,\delta x - 58{\cdot}7\,\delta y + 1{\cdot}8 &= v_8\\
-83{\cdot}7\,\delta x + 84{\cdot}2\,\delta y + 8{\cdot}7 &= v_9\\
-75{\cdot}1\,\delta x - 258{\cdot}7\,\delta y - 3{\cdot}0 &= v_{10}.
\end{aligned}$$

Bildung der Koeffizienten und der absoluten Glieder für die Normalgleichungen unter der Annahme, daß den äußeren und inneren Richtungen gleiche Gewichte $g = 1$ beigegeben werden:

Punkte	$[a\,a]$ $[A\,A]$	$[a\,b]$ $[A\,B]$	$[a\,\omega]$ $[A\,W]$	$[b\,b]$ $[B\,B]$	$[b\,\omega]$ $[B\,W]$
Sp	+ 2 275	− 911	+ 38	+ 365	− 15
4	6 806	+ 479	− 660	34	− 46
1	7 073	+ 5 559	+ 76	4 369	+ 59
St	320	+ 675	+ 55	1 421	+ 117
1. Summe Σ_1	+ 16 474	+ 5 802	− 491	+ 6 189	+ 115
Sp	864	+ 56	− 103	4	− 7
4	4 122	+ 1 721	− 83	718	− 35
1	4 330	+ 5 731	− 158	7 586	− 209
St	0	− 23	− 1	3 446	+ 106
H	7 006	− 7 048	− 728	7 090	+ 733
3	5 640	+ 19 428	+ 225	66 926	+ 776
2. Summe Σ_2	+ 21 962	+ 19 865	− 848	+ 85 770	+ 1 364
$\Sigma_1 + \Sigma_2$	+ 38 436	+ 25 667	− 1 339	+ 91 959	+ 1 479

Die Normalgleichungen lauten:

$$+38436\,\delta x + 25667\,\delta y - 1339 = 0$$
$$+25667\,\delta x + 91959\,\delta y + 1479 = 0$$

Auflösung: $\delta x = -0{\cdot}0560, \qquad \delta y = -0{\cdot}0317.$

Die nun sich anschließende Berechnung der endgültigen Südwinkel σ, der scheinbaren Fehler v, des mittleren Gewichtseinheitsfehlers $\mu = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-u}}$, wobei n die Summe der äußeren und der inneren Strahlen bedeutet und $u = 3$ zu setzen ist, weil drei Unbekannte δx, δy, δz auftreten, erfolgt genau nach § 24. Ebenso die Berechnung der mittleren Koordinatenfehler und des mittleren Punktfehlers.

Nicht unerwähnt mag bleiben, daß so umfangreiche und zum großen Teile auch komplizierte Rechnungen unter Anwendung der im I. Bande vorgetragenen Kontrollen durchgeführt und mit Vorteil

auch in schematischer Weise angeordnet werden. Geeignete Formulare, wie sie in Vermessungsinstruktionen vorgeschrieben werden, erleichtern die Rechenarbeit ganz wesentlich und verleihen ihr große Übersichtlichkeit und Sicherheit.

Rechnet man dieses Beispiel mit Anschlußgewichten, so hat man, wenn die äußeren Richtungen z. B. der Reihe nach an 3, 4, 2 und 5 festen Strahlen angeschlossen wurden, den äußeren Richtungen der Reihe nach die Gewichte $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{6}$ zuzuweisen, während die inneren Richtungen das Gewicht 1 beibehalten. Es ändern sich daher nur die von den vier äußeren Richtungen stammenden Beiträge zu den Koeffizienten und Absolutgliedern, nämlich Σ_1, während Σ_2 unverändert bleibt. Unter Berücksichtigung der Anschlußgewichte ist:

$$\begin{array}{rrrrrr} \Sigma_1' = & +\,12\,133, & -\;3\,969, & -\;402, & +\;4\,399, & +\;89, \\ \Sigma_2 = & +\,21\,962, & -\,19\,865, & -\;848, & +\,85\,770, & +\,1364, \\ \hline \Sigma_1' + \Sigma_2 = & +\,34\,095, & -\,23\,834, & -\,1250, & +\,90\,169, & +\,1453. \end{array}$$

Die Normalgleichungen lauten daher:

$$+\,34095\,\delta x - 23834\,\delta y - 1250 = 0$$
$$-\,23834\,\delta x + 90169\,\delta y + 1453 = 0.$$

Die daraus gewonnenen Ergebnisse $\delta x = -\,0{\cdot}0588$, $\delta y = -\,0{\cdot}0317$ weichen von jenen ohne Rücksicht auf die Anschlußgewichte erhaltenen nur wenig ab. Die größten Abweichungen in den Koordinatenverbesserungen sind zu erwarten, wenn jede äußere Richtung nur je an einen einzigen festen Strahl angebunden wird. In diesem Falle hat man statt Σ_1 nur $\frac{\Sigma_1}{2}$ zu nehmen, die Normalgleichungen werden aus der Summe $\frac{\Sigma_1}{2} + \Sigma_2$ gebildet und lauten:

$$+\,30199\,\delta x + 22766\,\delta y - 1093 = 0$$
$$+\,22766\,\delta x + 93264\,\delta y + 1422 = 0$$

Auflösung: $\delta x = +\,0{\cdot}0584, \qquad \delta y = -\,0{\cdot}0208.$

Hat man allgemein beim kombinierten Einschneiden den zu bestimmenden Punkt von n' Standpunkten vorwärts eingeschnitten und nach n'' Zielpunkten rückwärts eingeschnitten; bezeichnet man die scheinbaren Fehler der äußeren Richtungen mit r, die der inneren Richtungen mit r', ferner die Anschlußgewichte mit g und die Zahl der Unbekannten mit u, so ist der mittlere Gewicht-einheit-fehler

$$\mu = \sqrt{\frac{[g\,r'\,r'] + [r\,r]}{n - n'' - u}}$$

und speziell im letzt besprochenen Falle:

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\frac{v'v'}{2}\right] + [v''v'']}{4 + 6 - 3}}.$$

Da einerseits Beobachtungen mit Richtungsanschluß an wenigen festen Strahlen nur bei Kleintriangulierungen vorkommen, bei welchen ihrer geringeren Genauigkeit wegen eine Verschärfung der Resultate durch Einführung von Anschlußgewichten für überflüssig gehalten wird, anderseits aber bei Präzisionstriangulierungen wieder so viele Anschlüsse gemacht werden, daß die betreffenden Gewichte, da sie von der Einheit nur sehr wenig abweichen, ihre Bedeutung verlieren, so kann in den meisten Fällen der Praxis von der Anwendung strenger Anschlußgewichte Umgang genommen werden. Wenn aber die Theorie der Anschlußgewichte praktisch auch wenig Bedeutung hat, so lassen die nach dieser Richtung hin angestellten Betrachtungen doch deutlich durchblicken, wie fein die Theorie der Methode der kleinsten Quadrate bereits ausgebildet ist. Der folgende Paragraph wird zeigen, welchen Wert die Theorie der Anschlußgewichte zur Klarstellung mancher verwickelterer Verhältnisse besitzt.

§ 29. Punktbestimmung aus einem Dreieck.

Werden bei einer Punktbestimmung durch Einschneiden vermittelnder Richtungsbeobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate sämtliche Richtungen gleichgewichtig eingeführt, so erhält man, wie die Theorie der Richtungsanschlüsse beweist, nicht dieselben Ergebnisse, wie bei der Punktbestimmung nach den Regeln bedingter Beobachtungen mit Korrelaten. Um eine Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen beider Rechnungsverfahren herbeizuführen, darf man bei Punktbestimmungen durch vermittelnde Beobachtungen die an gegebenen festen Strahlen angelegten neuen Strahlen nicht als unabhängige Richtungsmessungen behandeln, sondern man muß den neuen äußeren Richtungen Gewichte beilegen, welche von der Anzahl der gegebenen und der Anzahl der neuen Strahlen abhängen, oder man hat unter Beibehaltung der gleichgewichtigen Vermittlungsgleichungen für jeden Richtungssatz eine Zusatzgleichung mit einem fingierten Gewichte einzuführen.

Um die Beziehung zwischen den Methoden der Ausgleichung bedingter und vermittelnder Beobachtung*) leicht zu erkennen, wählen

*) Vgl. den auf S. 108 zitierten Aufsatz.

wir den einfachsten Fall der Punktbestimmung aus einem geschlossenen Dreiecke. Zu einem Zahlenbeispiele entnehmen wir die Angaben der österreichischen „Instruktion für Theodolitvermessungen" S. 108: „Bestimmung des Punktes **2** durch gegenseitige Richtungsbeobachtungen von und nach den beiden gegebenen Punkten **4** und **1**". (Fig. 20.)

Fig. 20.

Die drei Dreieckswinkel α, β, γ seien wie folgt bestimmt:

Gerechnete Richtung	von	**4**	nach	**1**	$= 223^0\,41'\,31''9$	$\alpha = 50^0\,20'\,32''1$
gemessene	„	**4**	„	**2**	$= 274\;\;02\;\;04{\cdot}0$	
„	„	**1**	„	**2**	$= 308\;\;09\;\;43{\cdot}0$	$\beta = 95\;\;31\;\;48{\cdot}9$
gerechnete	„	**1**	„	**4**	$= 43\;\;41\;\;31{\cdot}9$	
gemessene	„	**2**	„	**4**	$= 94\;\;02\;\;00{\cdot}0$	$\gamma = 34\;\;07\;\;49{\cdot}0$
„	„	**2**	„	**1**	$= 128\;\;09\;\;49{\cdot}0$	

Summenprobe: $180^0\,00'\,10''0$

Winkelwiderspruch: $w = +10''0$.

Nach den Regeln für die Ausgleichung bedingter Beobachtungen erfolgt die Aufteilung des Winkelwiderspruches gemäß der Normalgleichung

$$[a\,a]\,k + w = 0$$

auf alle drei Winkel zu gleichen Teilen:

$$v_\alpha = v_\beta = v_\gamma = -\frac{w}{3} = -3''3.$$

Rechnet man hingegen nach den Regeln der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, so erhält man mit Hinweis auf die im § 28 gebrauchte Bezeichnungsweise:

Punkte	Richtungen	a	A	b	B	σ	R_r	$R_0 + 180^0$ / $= R_r - z$	ω / w	W
4	äußere	$+\;82{\cdot}5$		$+\;5{\cdot}8$		$94^0\,01'\,56''0$		$94^0\,02'\,04''$	$-8{\cdot}0$	
1		$+\;84{\cdot}1$		$+66{\cdot}1$		$128\;\;09\;\;43{\cdot}9$		$128\;\;09\;\;43$	$+\;0{\cdot}9$	
	innere						$154^0\,38'\,20'' = z$			
4		$+\;82{\cdot}5$	$-0{\cdot}8$	$+\;5{\cdot}8$	$-30{\cdot}2$	$94\;\;01\;\;56{\cdot}0$	$299\;\;23\;\;40$	$94\;\;02\;\;00$	$-4{\cdot}0$	$-0{\cdot}55$
1		$+\;84{\cdot}1$	$+0{\cdot}8$	$+66{\cdot}1$	$+30{\cdot}1$	$128\;\;09\;\;43{\cdot}9$	$333\;\;31\;\;29$	$128\;\;09\;\;49$	$-5{\cdot}1$	$-0{\cdot}55$
		$+166{\cdot}6$	$0{\cdot}0$	$+71{\cdot}9$	$-\;0{\cdot}1$				$-9{\cdot}1$	$0{\cdot}00$
	:2	$+\;83{\cdot}3$		$+36{\cdot}0$				:2	$-4{\cdot}55$	

Die Näherungsrechnung mit durchaus gleichen Gewichten $g = 1$ gibt:

g	$\frac{g\,a\,a}{g\,A\,A}$	$\frac{g\,a\,b}{g\,A\,B}$	$\frac{g\,a\,\omega}{g\,A\,W}$	$\frac{g\,b\,b}{g\,B\,B}$	$\frac{g\,b\,\omega}{g\,B\,W}$
1	6 806	+ 479	− 660	34	− 46
1	7 073	+ 5 559	+ 76	4 369	+ 59
1	1	+ 24	0	912	− 17
1	1	+ 24	0	906	− 16
2	13 881	+ 6 086	− 584	6 221	− 20

Normalgleichungen:

$$13881\,\delta x + 6086\,\delta y - 584 = 0$$
$$6086\,\delta x + 6221\,\delta y - 20 = 0$$

Auflösung: $\delta x = + 0{\cdot}071, \qquad \delta y = - 0{\cdot}066.$

$a\,\delta x$	+ $b\,\delta y$	= $\delta\sigma$	Σ	$\frac{\omega}{W}$	Richtungs-verbes-serungen	Winkel-verbesserungen
+ 5·9	− 0·4	+ 5·5		− 8·0	− 2·5	$v_\alpha = - 2{\cdot}5$
− 6·0	− 4·4	+ 1·6		+ 0·9	+ 2·5	$v_\beta = - 2{\cdot}5$
+ 5·9	− 0·4	+ 5·5	+ 1·95	+ 0·55	+ 2·5	$v_\gamma = - 5{\cdot}0$
− 6·0	− 4·4	+ 1·6	− 1·95	− 0·55	− 2·5	
		+ 7·1	0·00		$v = 10''0$	$w = + 10''0$
	: 2	+ 3·55				

Die Richtungsverbesserungen sind: $\delta\sigma + \omega$ beziehungsweise $\Sigma + W$.

Nach Maßgabe der eingeführten gleichen Gewichte erfolgt auch die Verteilung des Winkelwiderspruches auf alle vier Richtungen zu gleichen Teilen, die Winkelverbesserungen aber betragen dann nicht $\frac{w}{3}$. Denn bringt man die Richtungsverbesserungen an den gemessenen Richtungen an und bildet man mit den ausgeglichenen Richtungen die ausgeglichenen Winkel, so ergibt sich an dem zu bestimmenden Punkte die Winkelverbesserung $v_\gamma = -\frac{w}{2}$, an den beiden gegebenen Punkten eine Winkelverbesserung von $v_\alpha = -\frac{w}{4}$ beziehungsweise $v_\beta = -\frac{w}{4}$. Um zwischen den Ergebnissen der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit jenen nach bedingten Beobachtungen Übereinstimmung zu erzielen, hat man, da im vorliegenden Falle auf den gegebenen Punkten nur je eine neue und eine gegebene

Richtung in Betracht kommt, den äußeren Richtungen **halbe** Gewichte zu erteilen. Die Weiterrechnung gibt sodann:

g	$\frac{g\,a\,a}{g\,A\,A}$	$\frac{g\,a\,b}{g\,A\,B}$	$\frac{g\,a\,\omega}{g\,A\,W}$	$\frac{g\,b\,b}{g\,B\,B}$	$\frac{g\,b\,\omega}{g\,B\,W}$
0·5	3 403	+ 240	− 330	17	23
0·5	3 536	+ 2 779	+ 38	2 185	+ 30
1	1	+ 24	0	912	− 17
1	1	− 24	0	906	− 16
2	6 941	+ 3 067	− 292	4 020	− 26

$$6941\,\partial x + 3067\,\partial y - 292 = 0$$
$$3067\,\partial x + 4020\,\partial y - 26 = 0$$
$$\partial x = +0{\cdot}060, \qquad \partial y = -0{\cdot}039.$$

$a\,\delta x$ +	$b\,\delta y$ =	$\delta\sigma$	Σ	$\frac{\omega}{W}$	Richtungs-verbes-serungen	Winkel-verbesserungen
+ 4·9	− 0·2	+ 4·7		− 8·0	− 3·3	$v_\alpha = -3{\cdot}3$
+ 5·0	− 2·6	+ 2·4		+ 0·9	+ 3·3	$v_\beta = -3{\cdot}3$
+ 4·9	− 0·2	+ 4·7	+ 1·15	+ 0·55	+ 1·7	$v_\gamma = -3{\cdot}4$
+ 5·0	− 2·6	+ 2·4	− 1·15	− 0·55	− 1·7	
		+ 7·1				
	: 2	+ 3·55			$v = 10''0$	$w = -10''0$

Die Winkelverbesserungen erscheinen nunmehr übereinstimmend mit den Ergebnissen der Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

§ 30. Einschalten eines Punktsystems.

Werden mehrere Neupunkte durch Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden gegen ein System von Festpunkten eingemessen und soll deren Koordinatenausgleichung gemeinsam oder gleichzeitig erfolgen, so hat man hiebei drei Arten von Fehlergleichungen zu unterscheiden:

1. Für die äußeren Richtungen von einem Festpunkte nach einem Neupunkte:

$$\left.\begin{aligned} a'\,\partial x_1 + b'\,\partial y_1 + \omega_1' &= v_1' \\ a''\,\partial x_1 + b''\,\partial y_1 + \omega_1'' &= v_1'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}$$ für den ersten Neupunkt,

$$\left.\begin{array}{l} c'\ \delta x_2 + d'\ \delta y_2 + \omega_2' = v_2' \\ c''\ \delta x_2 + d''\ \delta y_2 + \omega_2'' = v_2'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ \text{für den zweiten Neupunkt,}$$

usw.

2. Für die inneren Richtungen von einem Neupunkte nach einem Festpunkte:

$$\left.\begin{array}{l} a'\ \delta x_1 + b'\ \delta y_1 + \delta z_1 + w_1' = \mathfrak{v}_1' \\ a''\ \delta x_1 + b''\ \delta y_1 + \delta z_1 + w_1'' = \mathfrak{v}_1'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ \text{für den ersten Neupunkt.}$$

$$\left.\begin{array}{l} c'\ \delta x_2 + d'\ \delta y_2 + \delta z_2 + w_2' = \mathfrak{v}_2' \\ c''\ \delta x_2 + d''\ \delta y_2 + \delta z_2 + w_2'' = \mathfrak{v}_2'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ \text{für den zweiten Neupunkt,}$$

usw.

3. Für die Richtungen von einem Neupunkte zu einem anderen:

$$\left.\begin{array}{l} a_0'\,\delta x_1 + b_0'\,\delta y_1 - a_0'\,\delta x_2 - b_0'\,\delta y_2 + \delta z_1 + \mathfrak{w}_1' = \lambda_1' \\ a_0''\,\delta x_1 + b_0''\,\delta y_1 - a_0''\,\delta x_3 - b_0''\,\delta y_3 + \delta z_1 + \mathfrak{w}_1'' = \lambda_1'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ \text{von dem 1. nach dem 2., 3., ... Neupunkt,}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_0'\,\delta x_1 + b_0'\,\delta y_1 - a_0'\,\delta x_2 - b_0'\,\delta y_2 + \delta z_2 + \mathfrak{w}_2' = \lambda_2' \\ c_0'\,\delta x_2 + d_0'\,\delta y_2 - c_0'\,\delta x_3 - d_0'\,\delta y_3 + \delta z_2 + \mathfrak{w}_2'' = \lambda_2'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ \text{von dem 2. nach dem 1., 3., ... Neupunkt.}$$

usw.

Werden von den Fehlergleichungen *ad* 2. und 3. die Nullpunktskorrektionen δz_1, δz_2, . . . eliminiert, so erhält man die reduzierten Fehlergleichungen von der allgemeinen Form:

$$\begin{array}{l} A'\ \delta x_1 + B'\ \delta y_1 + C'\ \delta x_2 + D'\ \delta y_2 + E'\ \delta x_3 + F'\ \delta y_3 + W' = V' \\ A''\ \delta x_1 + B''\ \delta y_1 + C''\ \delta x_2 + D''\ \delta y_2 + E''\ \delta x_3 + F''\ \delta y_3 + W'' = V'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

1. Beispiel. Einschaltung eines Dreiecks.

Aufgabe ist die gleichzeitige Bestimmung der trigonometrischen Punkte **1**, **4** und **5**, welche sowohl gegenseitig als auch mit den gegebenen Punkten: Spielberg = **Sp**, Kozja = **K**, Stromberg = **St**, Hadi = **H**, Neuer Berg = **B** und Langenfeld = **L** nach Maßgabe der Darstellung in Fig. 21 durch Richtungsbeobachtungen verbunden sind. (Muster X der österr. Instruktion für Theodolitvermessungen, S. 98 bis 105).

Die vorläufigen (genäherten) Koordinaten der Punkte **1**, **4** und **5** und die definitiven Koordinaten der gegebenen Punkte sind:

P	x	y
1	− 112 370·94	− 18 756·74
4	− 111 354·20	− 17 784·35
5	− 107 789·22	− 19 916·03
Sp	− 109 689·27	− 16 547·54
K	− 113 097·20	− 14 194·41
St	− 115 651·17	− 18 152·94
H	− 112 753·60	− 21 902·76
N	− 109 657·72	− 20 926·11
L	− 104 828·35	− 15 357·45

Es folgen in schematischer Anordnung die vorläufigen Südwinkel σ', und zwar von den zu suchenden Punkten nach den gegebenen Punkten; die Fehlergleichungskoeffizienten, welche bezüglich der zu bestimmenden Punkte **1**, **4** und **5** mit (a, b), (c, d) beziehungsweise (e, f) bezeichnet sind; die um 180° geänderten, orientierten äußeren Richtungen R_0; die Gesamtmittel R_m der in Betracht kommenden inneren Richtungen; die Absolutglieder $\omega = \sigma - (R_0 - 180°)$ der in betreff der äußeren Richtungen aufzustellenden Fehlergleichungen und mit Hilfe der vorläufig orientierten inneren Richtungen r_0 und der Differenzen $w = \sigma' - r_0$ die Absolutglieder $W_r = w_r - \frac{[w]}{n}$ der in betreff der inneren Richtungen aufzustellenden reduzierten Fehlergleichungen.

In der Zusammenstellung Seite 122 ist zu beachten, daß in betreff der Richtungen von einem zu bestimmenden Punkte P_m nach einem anderen P_n für die Richtungen $P_m P_n$ und $P_n P_m$ die Koeffizienten (a, b), (c, d) beziehungsweise (e, f) zwar numerisch gleich, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen sind. So ist z. B. für die Richtung von **1** nach **4**, $a = + 101{\cdot}4$, $b = - 106{\cdot}1$, aber für die entgegengesetzte Richtung von **4** nach **1**, $a = - 101{\cdot}4$, $b = + 106{\cdot}1$.

Bei dieser Zusammenstellung ergeben sich folgende Rechenproben:

a) Für die äußeren Richtungen: $[\sigma] - [(R_0 - 180°)] = [\omega]$, z. B. für die den Punkt **1** betreffende Gruppe (wenn nur Minuten und Sekunden in Rechnung gezogen werden): $30' \, 48''{\cdot}0 - 30' \, 47''{\cdot}0 = + 1''{\cdot}0$

b) Für die inneren Richtungen:

$$[R_m] + n z = [r_0],$$
$$[\sigma'] - [r_0] = [w],$$
$$[W] = 0,$$

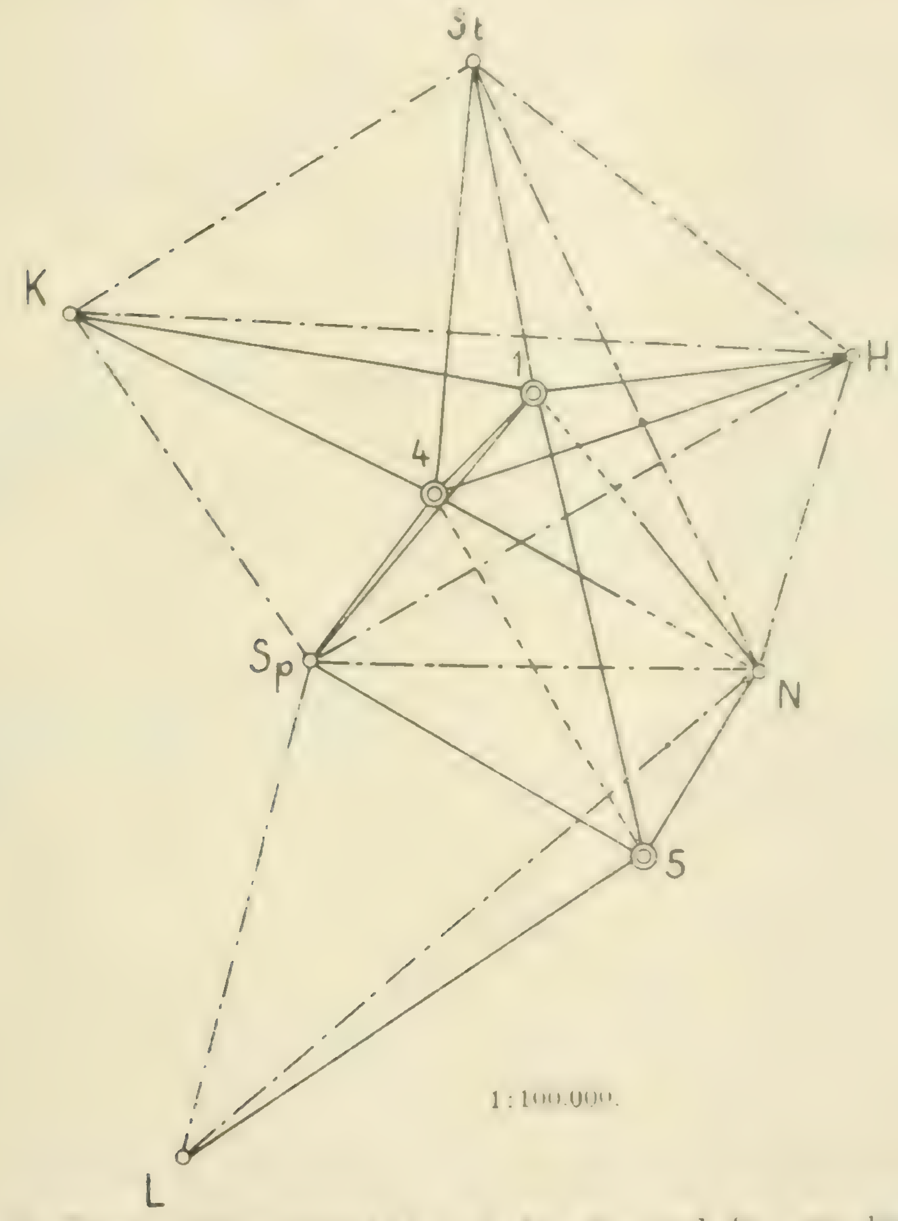
z. B. für die den Punkt **1** betreffende Gruppe (Fortsetzung S. 123).

Zielpunkt	Koeffizienten		Äußere Richtungen ω	Äußere Richtungen $R_z \pm 180^0$	Vorläufige Südwinkel σ'	z = genäherter Orientierungswinkel R_m	Innere Richtungen $r_0 = R_m + z$	w	W
Zu bestimmender Punkt 1.									
	a	b			z_1 =	169° 35′ 10″			
Sp	+ 37·7	— 45·8	+ 1·1	39° 28′ 09″	39° 28′ 10″1	229° 52′ 51″	39° 28′ 01″	+ 9·1	+ 1·1
4	— 101·4	— 106·1	—	— — — —	43 41 35·8	234 06 15	43 41 25	+ 10.8	+ 2·8
K	+ 44·1	+ 7·0	— 0·7	99 02 49	99 02 48·3	289 27 28	99 02 38	+ 10·3	+ 2·3
St	— 11·2	+ 60·8	+ 1·5	169 35 12	169 35 13·5	0 00 00	169 35 10	+ 3·5	— 4·5
H	— 64·6	+ 7·9	— 1·1	263 04 03	263 04 01·9	93 28 46	263 03 56	+ 5·9	— 2·1
N	— 37·1	— 46·4	+ 0·2	321 20 34	321 20 34·2	— — — —	— — — —	—	—
5	— 10·7	— 42·3	—	— — — —	345 47 20·4	176 12 02	345 47 12	+ 8·4	+ 0·4
			+ 1·0	30 47	30 48·0	07 22	38 22	+ 48·0	0·0
					39 10·0	$6\,z_1$ = 31 00	$[w]:n$ =	+ 8·0	
Zu bestimmender Punkt 4.									
	c	d			e_4 =	184° 54′ 00″			
Sp	+ 59·3	— 79·8	— 1·1	36° 36′ 27″	36° 36′ 25″9	211° 42′ 21″	36° 36′ 21″	+ 4·9	+ 1·6
K	+ 46·5	+ 22·6	— 6·4	115 53 58	115 53 51·6	290 59 55	115 53 55	— 3·4	— 6·7
St	— 4·1	— 47·7	— 1·0	184 54 11	184 54 10·0	0 00 07	184 54 07	+ 3·0	— 0·3
1	— 101·4	+ 106·1	—	— — — —	223 41 35·8	38 47 27	223 41 27	+ 8·8	+ 5·5
H	— 44·9	+ 15·3	— 1·4	251 13 59	251 13 57·6	66 19 53	251 13 53	+ 4·6	+ 1·3
N	— 50·8	— 27·4	0·0	298 22 05	298 22 05·0	113 28 03	298 22 03	+ 2·0	— 1·3
			— 9·9	00 40	0′ 30·1	17 46	41 46	+ 19·9	+ 0·1
					42 05·9	$6\,z_4$ = 24 00	$[w]:n$ =	+ 3·3	
Zu bestimmender Punkt 5.									
	e	f			z_5 =	359° 59′ 30″			
L	+ 31·8	— 20·7	+ 3·3	56° 59′ 41″	56° 59′ 44″3	57° 00′ 08″	56° 59′ 38″	+ 6·3	+ 3·7
Sp	+ 46·5	+ 26·2	+ 1·1	119 25 32	119 25 33·1	119 26 00	119 25 30	+ 3·1	+ 0·5
1	+ 10·7	+ 42·3	—	— — — —	165 47 20·4	165 47 51	165 47 21	— 0·6	— 3·2
N	— 46·2	+ 85·4	— 0·3	208 23 42	208 23 41·7	208 24 10	208 23 40	+ 1·7	— 0·9
			+ 4·1	48 55	48 59·1	38 09	36 09	+ 10·5	+ 0·1
					36 19·5	$4\,z_5$ = 58 00	$[w]:n$ =	+ 2·6	

$$7' \, 22'' + 6 \, . \, 35' \, 10'' = 38' \, 22'',$$
$$39' \, 10'' - 38' \, 22'' \quad = + \; 48'',$$
$$- 6''6 - 6''6 \quad = 0.$$

Bezeichnet man die Koordinatenverbesserungen der Punkte **1**, **4** und **5** mit $(\delta x_1, \delta y_1)$, $(\delta x_4, \delta y_4)$, $(\delta x_5, \delta y_5)$ und die bezüglichen Korrek-

Fig. 21.



tionen der Orientierungswinkel mit δz_1, δz_4 und δz_5, so lauten die Vermittlungsgleichungen in betreff der äußeren Richtungen

nach Punkt **1**:

Nr. 1 . . . . $+ 37{\cdot}7 \, \delta x_1 - 45{\cdot}8 \, \delta y_1 - 1{\cdot}1 = 0$

" 2 . . . . $+ 44{\cdot}1 \, \delta x_1 + 7{\cdot}0 \, \delta y_1 - 0{\cdot}7 = 0$

" 3 . . . . $- 11{\cdot}2 \, \delta x_1 + 60{\cdot}8 \, \delta y_1 + 1{\cdot}5 = 0$

" 4 . . . . $- 64{\cdot}6 \, \delta x_1 + 7{\cdot}9 \, \delta y_1 - 1{\cdot}1 = 0$

" 5 . . . . $- 37{\cdot}1 \, \delta x_1 - 46{\cdot}4 \, \delta y_1 - 0{\cdot}2 = 0,$

nach Punkt **4**:

Nr. 12 . . . $-59{\cdot}3\,\delta x_4 - 79{\cdot}8\,\delta y_4 - 1{\cdot}1 = 0$

" 13 . . . $+46{\cdot}5\,\delta x_4 + 22{\cdot}6\,\delta y_4 - 6{\cdot}4 = 0$

" 14 . . . $-4{\cdot}1\,\delta x_4 + 47{\cdot}7\,\delta y_4 - 1{\cdot}0 = 0$

" 15 . . . $-44{\cdot}9\,\delta x_4 + 15{\cdot}3\,\delta y_4 - 1{\cdot}4 = 0$

" 16 . . . $-50{\cdot}8\,\delta x_4 - 27{\cdot}4\,\delta y_4 + 0{\cdot}0 = 0$,

nach Punkt **5**:

Nr. 23 . . . $+31{\cdot}8\,\delta x_5 \quad 20{\cdot}7\,\delta y_5 + 3{\cdot}3 = 0$

" 24 . . . $-46{\cdot}5\,\delta x_5 - 26{\cdot}2\,\delta y_5 + 1{\cdot}1 = 0$

" 25 . . . $-46{\cdot}2\,\delta x_5 + 85{\cdot}4\,\delta y_5 - 0{\cdot}3 = 0$,

und in betreff der inneren Richtungen

von Punkt **1**:

Nr. 6* . . . $+37{\cdot}7\,\delta x_1 - 45{\cdot}8\,\delta y_1 + 9{\cdot}1 + \delta z_1 = 0$

" 7* . . . $-101{\cdot}4\,\delta x_1 - 106{\cdot}1\,\delta y_1 - 101{\cdot}4\,\delta x_4 + 106{\cdot}1\,\delta y_4 + 10{\cdot}8 + \delta z_1 = 0$

" 8* . . . $+44{\cdot}1\,\delta x_1 - 7{\cdot}0\,\delta y_1 - 10{\cdot}3 + \delta z_1 = 0$

" 9* . . . $+11{\cdot}2\,\delta x_1 + 60{\cdot}8\,\delta y_1 - 3{\cdot}5 + \delta z_1 = 0$

" 10* . . . $-64{\cdot}6\,\delta x_1 + 7{\cdot}9\,\delta y_1 - 5{\cdot}9 + \delta z_1 = 0$

" 11* . . . $-10{\cdot}7\,\delta x_1 - 42{\cdot}3\,\delta y_1 - 10{\cdot}7\,\delta x_5 + 42{\cdot}3\,\delta y_5 - 8{\cdot}4 + \delta z_1 = 0$

von Punkt **4**:

Nr. 17* . . . $-59{\cdot}3\,\delta x_4 - 79{\cdot}8\,\delta y_4 + 4{\cdot}9 + \delta z_4 = 0$

" 18* . . . $-46{\cdot}5\,\delta x_4 + 22{\cdot}6\,\delta y_4 - 3{\cdot}4 + \delta z_4 = 0$

" 19* . . . $-4{\cdot}1\,\delta x_4 - 47{\cdot}7\,\delta y_4 - 3{\cdot}0 + \delta z_4 = 0$

" 20* . . . $+101{\cdot}4\,\delta x_1 - 106{\cdot}1\,\delta y_1 - 101{\cdot}4\,\delta x_4 - 106{\cdot}1\,\delta y_4 - 8{\cdot}8 + \delta z_4 = 0$

" 21* . . . $-44{\cdot}9\,\delta x_4 + 15{\cdot}3\,\delta y_4 - 4{\cdot}6 + \delta z_4 = 0$

" 22* . . . $-50{\cdot}8\,\delta x_4 - 27{\cdot}4\,\delta y_4 + 2{\cdot}0 + \delta z_4 = 0$

von Punkt **5**:

Nr. 26* . . . $-31{\cdot}8\,\delta x_5 - 20{\cdot}7\,\delta y_5 + 6{\cdot}3 + \delta z_5 = 0$

" 27* . . . $-46{\cdot}5\,\delta x_5 + 26{\cdot}2\,\delta y_5 - 3{\cdot}1 + \delta z_5 = 0$

" 28* . . . $-10{\cdot}7\,\delta x_1 - 42{\cdot}3\,\delta y_1 - 10{\cdot}7\,\delta x_5 + 42{\cdot}3\,\delta y_5 \quad 0{\cdot}6 + \delta z_5 = 0$

" 29* . . . $-46{\cdot}2\,\delta x_5 - 85{\cdot}4\,\delta y_5 - 1{\cdot}7 + \delta z_5 = 0$

Werden aus den Gleichungen in betreff der inneren Richtungen die Orientierungsfehler δz_1, δz_4, δz_5 nach der im § 24 angegebenen Regel durch Bildung der reduzierten Größen $A_i = a_i - \frac{[a]}{n}$, $B_i = b_i - \frac{[b]}{n}$, $C_i = c_i - \frac{[c]}{n}$, $D_i = d_i - \frac{[d]}{n}$, $E_i = e_i - \frac{[e]}{n}$, $F_i = f_i - \frac{[f]}{n}$, $W_i = w_i - \frac{[w]}{n}$ eliminiert, so erhält man die reduzierten, bei der Bildung der Normalgleichungen zu berücksichtigenden Gleichungen:

Nr.	δx_1	δy_1	δx_4	δy_4	δx_5	δy_5		
Nr. 6 . . .	$-17{\cdot}8\,\delta x_1$	$-26{\cdot}1\,\delta y_1$	$+16{\cdot}9\,\delta x_4$	$-17{\cdot}7\,\delta y_4$	$-1{\cdot}8\,\delta x_5$	$-7{\cdot}0\,\delta y_5$	$+1{\cdot}1$	$= v$
„ 7 . . .	$-81{\cdot}5$	$-86{\cdot}4$	$-84{\cdot}5$	$+88{\cdot}4$	$-1{\cdot}8$	$-7{\cdot}0$	$+2{\cdot}8$	
„ 8 . . .	$-24{\cdot}2$	$+26{\cdot}7$	$+16{\cdot}9$	$-17{\cdot}7$	$-1{\cdot}8$	$-7{\cdot}0$	$-2{\cdot}3$	
„ 9 . . .	$-8{\cdot}7$	$-80{\cdot}5$	$+16{\cdot}9$	$-17{\cdot}7$	$-1{\cdot}8$	$-7{\cdot}0$	$+4{\cdot}5$	
„ 10 . . .	$-84{\cdot}5$	$-27{\cdot}6$	$+16{\cdot}9$	$-17{\cdot}7$	$-1{\cdot}8$	$-7{\cdot}0$	$-2{\cdot}1$	
„ 11 . . .	$-30{\cdot}6$	$-22{\cdot}6$	$+16{\cdot}9$	$-17{\cdot}7$	$+8{\cdot}9$	$+35{\cdot}3$	$+0{\cdot}4$	
„ 17 . . .	$-16{\cdot}9$	$+17{\cdot}7$	$+75{\cdot}2$	$-93{\cdot}9$	. . .	. . .	$+1{\cdot}6$	
„ 18 . . .	$-16{\cdot}9$	$+17{\cdot}7$	$+62{\cdot}4$	$+8{\cdot}5$	. . .	. . .	$-6{\cdot}7$	
„ 19 . . .	$-16{\cdot}9$	$+17{\cdot}7$	$+11{\cdot}8$	$+33{\cdot}6$	. . .	. . .	$-0{\cdot}3$	
„ 20 . . .	$-84{\cdot}5$	$-88{\cdot}4$	$-85{\cdot}5$	$+92{\cdot}0$	. . .	. . .	$+5{\cdot}5$	
„ 21 . . .	$-16{\cdot}9$	$+17{\cdot}7$	$-29{\cdot}0$	$-1{\cdot}2$	. . .	. . .	$+1{\cdot}3$	
„ 22 . . .	$-16{\cdot}9$	$+17{\cdot}7$	$-34{\cdot}9$	$-41{\cdot}5$	. . .	. . .	$-1{\cdot}3$	
„ 26 . . .	$-2{\cdot}7$	$+10{\cdot}6$	. . .	. . .	$+21{\cdot}1$	$-54{\cdot}0$	$+3{\cdot}7$	
„ 27 . . .	$-2{\cdot}7$	$+10{\cdot}6$	. . .	. . .	$+35{\cdot}8$	$-7{\cdot}1$	$+0{\cdot}5$	
„ 28 . . .	$-8{\cdot}0$	$-31{\cdot}7$	. . .	. . .	$0{\cdot}0$	$+9{\cdot}0$	$-3{\cdot}2$	
„ 29 . . .	$-2{\cdot}7$	$+10{\cdot}6$	. . .	. . .	$-56{\cdot}9$	$+52{\cdot}1$	$-0{\cdot}9$	

Aus den Gleichungen Nr. 1 bis 29 ergeben sich folgende Normalgleichungen:

δx_1	δy_1	δx_4	δy_4	δx_5	δy_5		
$+33392\,\delta x_1$	$-17353\,\delta y_1$	$-16\,939\,\delta x_4$	$+17\,983\,\delta y_4$	$-327\,\delta x_5$	$-1\,389\,\delta y_5$	$+1\,190$	$= 0$
	$+35\,394$	$-17\,828$	$-18\,925$	-241	$-1\,335$	$-1\,066$	
		$+37\,918$	$-24\,724$	$+181$	$+715$	$-1\,344$	
			$+39\,726$	-189	-748	-516	
				$+10\,368$	$-7\,366$	$+322$	
					$+15\,661$	-327	

Fügt man die hieraus berechneten Verbesserungen den vorläufigen Koordinaten hinzu, so erhält man folgende endgültige Koordinaten:

Punkt	Vorläufige Koordinaten	Koordinaten-Verbesserungen	Endgültige Koordinaten
1	$x_1 = -112\,370{\cdot}94$	$\delta x_1 = -0{\cdot}02$	$X_1 = -112\,370{\cdot}96$
	$y_1 = -18\,755{\cdot}74$	$\delta y_1 = +0{\cdot}01$	$Y_1 = -18\,755{\cdot}73$
4	$x_4 = -111\,354{\cdot}20$	$\delta x_4 = +0{\cdot}04$	$X_4 = -111\,354{\cdot}16$
	$y_4 = -17\,784{\cdot}35$	$\delta y_4 = +0{\cdot}03$	$Y_4 = -17\,784{\cdot}32$
5	$x_5 = -107\,789{\cdot}22$	$\delta x_5 = -0{\cdot}03$	$X_5 = -107\,789{\cdot}25$
	$y_5 = -16\,916{\cdot}03$	$\delta y_5 = +0{\cdot}01$	$Y_5 = -19\,916{\cdot}02$

Rechnet man mit den endgültigen Koordinaten die endgültigen Südwinkel σ, so ergeben sich für die äußeren Richtungen aus den Differenzen $\delta\sigma = \sigma' - \sigma = r - w$ und für die inneren Richtungen aus den Gleichungen $\Sigma = r - W$ die Richtungsverbesserungen r, die zur Kontrolle auch nach den Regeln des § 24 berechnet werden können. Die bezüglichen Berechnungen sind auf Seite 126 zusammengestellt.

Der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung ist (s. S. 127)

Neu-punkte	Richtungen		$a\,\delta x_1$ + / $c\,\delta x_4$ + / $e\,\delta x_5$ +	$b\,\delta y_1$ = / $d\,\delta y_4$ = / $f\,\delta y_5$ =	$\delta\sigma_1$ / $\delta\sigma_4$ / $\delta\sigma_5$	Σ	ω / W	$v = \omega + \delta\sigma$ / $v = W - \Sigma$	vv
1	äußere	Sp	−0·754	−0·458	−1·212		+1·1	−0·112	0·01
		K	−0·882	+0·070	−0·812		−0·7	−1·512	2·25
		St	−0·224	+0·608	+0·384		+1·5	+1·884	3·61
		H	+1·292	+0·079	+1·371		−1·1	+0·271	0·09
		N	+0·742	−0·464	+0·278		+0·2	+0·478	0·25
	innere	Sp	−0·754	−0·458	−1·212	−0·489	+1·1	+0·611	0·36
		K	−0·882	+0·070	−0·812	−0·089	+2·3	+2·211	4·84
		St	−0·224	+0·608	+0·384	+1·107	−4·5	−3·393	11·56
		H	+1·292	+0·079	+1·371	+2·094	−2·1	−0·006	0·00
			$a\,(\delta x_1 - \delta x_4)$	$b\,(\delta y_1 - \delta y_4)$					
		4	−6·084	+2·122	−3·962	−3·239	+2·8	−0·439	0·16
			$a\,(\delta x_1 - \delta x_5)$	$b\,(\delta y_1 - \delta y_5)$					
		5	−0·107	0·000	−0·107	+0·616	+0·4	+1·016	1·00
					−4·338	0·000	0·0	0·0	
				$[\delta\sigma_1]:6 =$	−0·723				
4	äußere	Sp	+2·372	−2·394	−0·022		−1·1	−1·122	1·21
		K	+1·860	+0·678	+2·538		−6·4	−3·862	15·21
		St	−0·164	+1·431	+1·267		−1·0	+0·267	0·09
		H	−1·796	+0·459	−1·337		−1·4	−2·737	7·29
		N	−2·032	−0·822	−2·854		−0·0	−2·854	8·41
	innere	Sp	+2·372	−2·394	−0·022	+0·706	+1·6	+2·306	5·29
		K	+1·860	+0·678	+2·538	+3·266	−6·7	−3·434	11·56
		St	−0·164	+1·431	+1·267	+1·995	−0·3	+1·695	2·89
		H	−1·796	+0·459	−1·337	−0·609	+1·3	+0·691	0·49
		N	−2·032	−0·822	−2·854	−2·126	−1·3	−3·426	11·56
			$c\,(\delta x_4 - \delta x_1)$	$d\,(\delta y_4 - \delta y_1)$					
		1	−6·084	+2·122	−3·962	−3·234	+5·5	+2·266	5·29
					−4·370	−0·002	+0·1	+0·1	
				$[\delta\sigma_4]:6 =$	−0·728				
5	äußere	L	−0·954	−0·207	−1·161		+3·3	+2·139	4·41
		Sp	−1·395	+0·262	−1·133		+1·1	−0·033	0·00
		N	+1·386	+0·854	+2·240		−0·3	+1·940	3·61
	innere	L	−0·954	−0·207	−1·161	−1·121	+3·7	+2·579	6·76
		Sp	−1·395	+0·262	−1·133	−1·093	+0·5	−0·593	0·36
		N	+1·386	+0·854	+2·240	+2·280	−0·9	+1·380	1·96
			$e\,(\delta x_5 - \delta x_1)$	$f\,(\delta y_5 - \delta y_1)$					
		1	−0·107	0·000	−0·107	−0·067	−3·2	−3·267	10·89
					−0·161	−0·001	+0·1	+0·1	121·41
				$[\delta\sigma_5]:4 =$	−0·040				

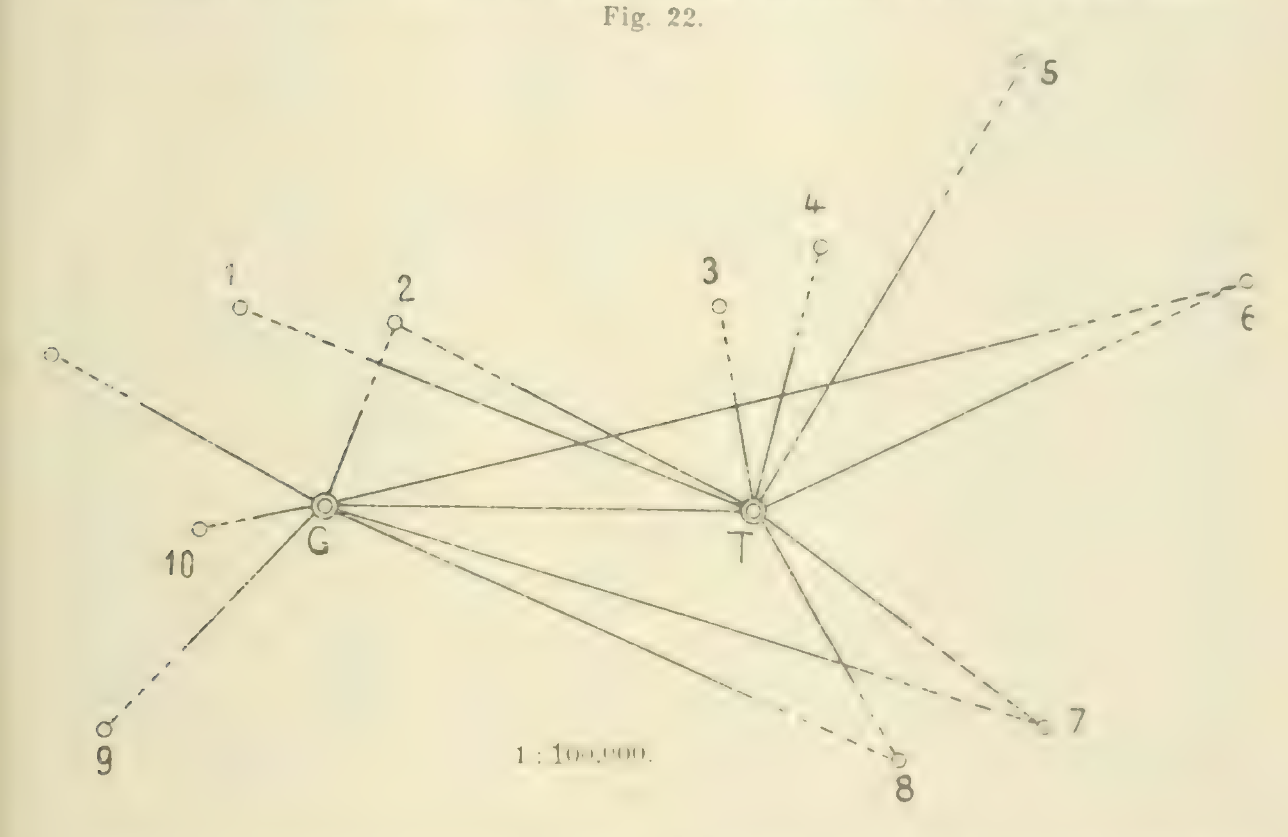
$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-u}} = \pm\sqrt{\frac{121{\cdot}41}{29-6}} = \pm 2''30.$$

Der Nenner ist 29 − 6, weil 29 gemessene Richtungen und 6 Unbekannte, das sind die sechs Koordinatenverbesserungen vorhanden sind.

2. Beispiel. Einschaltung eines Punktpaares (Hansens Problem).

(Gleichzeitige Bestimmung der Punkte „Türkenschanze" und „Goldbergl", welche sowohl gegenseitig als auch mit den gegebenen

Fig. 22.



Punkten: Wildungsmauer, Winkel, Petronell, Burgfeld, Altenburg, Hundsheim, Schönabrunn, Hollern, Höflein, Scharndorf und Regelsbrunn nach Maßgabe der Darstellung in Fig. 22 durch innere Richtungen allein verbunden sind*).

In Anlehnung an das erste Beispiel seien hier ohne viel Worte die nötigen Ansätze zusammengestellt.

Die vorläufigen Koordinaten der zu bestimmenden und die definitiven Koordinaten der gegebenen Punkte sind:

*) Dieses Beispiel ist dem Triangulierungselaborate entnommen, das Prof. J. Lička in der Zeit seiner Geometerpraxis als Grundlage für die Zusammenlegung der landwirtschaftlichen Grundstücke in der Marktgemeinde Petronell an der Donau gemeinsam mit dem Verfasser im Jahre 1890 ausgeführt hat.

		x	y
T	Türkenschanze . . .	$x =$ + 12 294·22	$y =$ — 37 347·93
G	Goldbergl	+ 12 399·36	— 33 060·44
1	Wildungsmauer . . .	+ 10 512·57	— 32 173·21
2	Winkel	+ 10 609·27	— 33 718·80
3	Petronell	+ 10 269·95	— 36 896·36
4	Burgfeld	+ 9 655·19	— 37 893·55
5	Altenburg	+ 7 718·44	— 39 797·43
6	Hundsheim	+ 9 839·47	— 42 144·71
7	Schönabrunn	+ 14 344·34	— 40 270·45
8	Hollern	+ 14 710·91	— 38 846·97
9	Höflein	+ 15 818·27	— 30 978·76
10	Scharndorf	+ 12 720·88	— 31 841·81
11	Regelsbrunn	+ 11 058·53	— 30 310·25

Koeffizienten für T:

Punkt	a	A	b	B	c	C	d	D
G	+ 48·07	+ 48·26	— 1·18	— 19·23	— 48·07	— 42·73	+ 1·18	+ 1·05
1	+ 35·64	+ 35·83	+ 12·27	— 5·78		+ 5·34		— 0·13
2	+ 46·76	+ 46·95	+ 21·71	+ 3·66		+ 5·34		— 0·13
3	+ 21·65	+ 21·84	+ 97·06	+ 79·01		+ 5·34		— 0·13
4	— 15·50	— 15·31	+ 74·96	+ 56·91		+ 5·34		— 0·13
5	— 18·76	— 18·57	+ 35·03	+ 16·98		+ 5·34		— 0·13
6	— 34·08	— 33·89	+ 17·44	— 0·61		+ 5·34		— 0·13
7	— 47·30	— 47·11	— 33·18	— 51·23		+ 5·34		— 0·13
8	— 38·23	— 38·04	— 61·63	— 79·68		+ 5·34		— 0·13
	— 1·75	— 0·04	+ 162·48	+ 0·03	— 48·07	— 0·01	+ 1·18	+ 0·01
:9	— 0·19		+ 18·05		— 5·34		+ 0·13	

Koeffizienten für G:

Punkte	a	A	b	B	c	C	d	D
T	+ 48·07	+ 42·06	— 1·18	— 1·03	— 48·07	— 58·29	+ 1·18	— 2·93
9		— 6·01		+ 0·15	+ 26·80	+ 16·58	— 44·01	— 48·12
10		— 6·01		+ 0·15	+ 158·25	+ 148·03	— 41·75	— 45·86
11		— 6·01		+ 0·15	+ 60·60	+ 50·38	+ 29·54	+ 25·43
2		— 6·01		+ 0·15	— 37·33	— 47·55	+ 101·50	+ 97·39
6		— 6·01		+ 0·15	— 21·04	— 31·26	+ 5·93	+ 1·82
7		— 6·01		+ 0·15	— 26·67	— 36·89	— 7·19	— 11·30
8		— 6·01		+ 0·15	— 30·74	— 40·96	— 12·28	— 16·39
	+ 48·07	— 0·01	— 1·18	+ 0·02	+ 81·80	+ 0·04	+ 32·92	+ 0·04
:8	+ 6·01		— 0·15		+ 10·22		+ 4·11	

Berechnung der absoluten Glieder:

Punkte		o	R	[illegible]	n	W
T	G	88°35′42″88	0°00′00″	88°35′42″88	0·00	− 14·76
	1	108 59 54·69	20 24 04	108 59 46·88	+ 7·81	− 6·95
	2	114 54 17·62	26 18 34	114 54 16·88	+ 0·14	− 14·62
	3	167 25 28·12	78 49 41	167 25 23·88	+ 4·24	− 10·52
	4	191 40 52·79	103 04 26	191 40 08·88	+ 43·91	+ 29·15
	5	208 09 39·49	119 33 43	208 09 25·88	+ 13·61	− 1·15
	6	242 53 56·13	154 17 56	242 53 38·88	+ 17·25	+ 2·49
	7	305 02 57·43	216 26 55	305 02 37·88	+ 19·55	+ 4·79
	8	328 11 21·23	239 35 12	328 10 54·88	+ 26·35	+ 11·59
					+ 132·86	+ 0·02
					+ 14·76	
G	T	268°35′42″88	237°16′03″	268°36′12″87	− 29·99	− 20·56
	9	31 20 09·87	0 00 00	31 20 09·87	0·00	+ 9·43
	10	75 13 12·14	43 53 02	75 13 11·87	+ 0·27	+ 9·70
	11	115 59 28·05	84 59 18	115 59 27·87	+ 0·18	+ 9·61
	2	200 11 33·11	168 51 14	200 11 23·87	+ 9·24	+ 18·67
	6	254 15 45·00	222 55 48	254 15 57·87	− 12·87	− 3·44
	7	285 05 48·52	253 45 56	285 06 05.87	− 17·35	− 7·92
	8	291 46 30·97	260 26 46	291 46 55·87	− 24·90	− 15·47
					− 75·42	+ 0·02
					− 9·43	

Normalgleichungen und deren Reduzierungen samt Summengliedern:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
-13\,710\,\partial x_1 & -\;4991\,\partial y_1 & -\;5\,122\,\partial x_2 & -\;84\,\partial y_2 & -1\,042 = 0 & -\;9\,453 \\
 & -19\,161 & 993 & 19 & -\;68 & -25\,058 \\
 & & -36\,454 & -\;9\,782 & -4\,130 & -26\,673 \\
 & & & -14\,959 & -1\,544 & -\;6\,618 \\
\hline
 & -17\,344\,\partial y_1 & -\;2\,858\,\partial x_2 & -\;11\,\partial y_2 & +1\,404 = 0 & -21\,617 \\
 & & -34\,540 & -\;9\,813 & +2\,620 & -30\,205 \\
 & & & +14\,959 & +1\,519 & -\;6\,676 \\
\hline
 & & -34\,070\,\partial x_2 & -\;9\,815\,\partial y_2 & -2\,889 = 0 & -26\,645 \\
 & & & +14\,959 & -1\,518 & -\;6\,662 \\
\hline
 & & & -12\,131\,\partial y_2 & -2\,206 = 0 & -14\,587
\end{array}
$$

Ergebnisse:

$$
T \begin{cases} x_1 = +12\,294{\cdot}22 & \partial x_1 = +0{\cdot}27 & X_1 = +12\,294{\cdot}49 \\ y_1 = -37\,347{\cdot}93 & \partial y_1 = -0{\cdot}06 & Y_1 = -37\,347{\cdot}99 \end{cases}
$$

$$
G \begin{cases} x_2 = -12\,309{\cdot}36 & \partial x_2 = -0{\cdot}12 & X_2 = -12\,309{\cdot}48 \\ y_2 = -33\,060{\cdot}44 & \partial y_2 = -0{\cdot}18 & Y_2 = -33\,060{\cdot}62. \end{cases}
$$

$$\mu = \sqrt{\frac{1091{\cdot}51}{17-6}} = \pm 9''96.$$

Der Nenner ist 17 — 6, weil 17 gemessene Richtungen und 6 Unbekannte, nämlich die 4 Koordinatenverbesserungen und die 2 eliminierten Richtungskorrektionen, vorhanden sind.

§ 31. Mittlerer Entfernungsfehler.

Ist δs eine lineare Funktion von Größen, die durch vermittelnde Beobachtungen gefunden wurden, z. B.

$$\delta s = f_1\,\delta x_1 + f_2\,\delta y_1 + f_3\,\delta x_2 + f_4\,\delta y_2, \tag{1}$$

wobei die Größen δx_1, δy_1, δx_2, δy_2 durch die reduzierten Fehlergleichungen des § 30 von der allgemeinen Form

$$a\,\delta x_1 + b\,\delta y_1 + c\,\delta x_2 + d\,\delta y_2 + w = v, \tag{2}$$

worin $c = -a$ und $d = -b$ ist, miteinander verbunden seien, so ist nach § 51 des I. Bandes die Gewichtsreziproke der Funktion δs gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{G} = \frac{f_1^2}{[aa.3]} &+ \frac{2f_1f_2}{[ab.3]} + \frac{2f_1f_3}{[ac.3]} + \frac{2f_1f_4}{[ad.3]} + \\ &+ \frac{f_2^2}{[bb.3]} + \frac{2f_2f_3}{[bc.3]} + \frac{2f_2f_4}{[bd.3]} + \\ &\qquad + \frac{f_3^2}{[cc.3]} + \frac{2f_3f_4}{[cd.3]} + \\ &\qquad\qquad + \frac{f_4^2}{[dd.3]}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

oder in der abgekürzten Form nach (15) des § 51, I. Band, S. 196:

$$\frac{1}{G} = \frac{f_1^2}{[aa]} + \frac{[f_2.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[f_3.2]^2}{[cc.2]} + \frac{[f_4.3]^2}{[dd.3]}. \tag{4}$$

Hierin bedeutet:

$$[f_2.1] = f_2 - \frac{[ab]}{[aa]} f_1$$

$$[f_3.2] = f_3 - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[f_2.1] - \frac{[ac]}{[aa]} f_1$$

$$[f_4.3] = f_4 - \frac{[cd.2]}{[cc.2]}[f_3.2] - \frac{[bd.1]}{[bb.1]}[f_2.1] - \frac{[ad]}{[aa]} f_1.$$

Außer der Formel (4) kann man sich auch einer anderen Gewichtsformel bedienen, welche wie folgt erhalten wird. Schreibt man das

System (3) mit Bezug auf die Beziehungen (16) des § 47 im I. Bande S. 182:

$$\frac{1}{[a\,a\,.\,3]} = [\alpha\,\alpha], \qquad \frac{1}{[a\,b\,.\,3]} = [\alpha\,\beta], \quad \text{usw.}$$

in der Form:

$$\begin{aligned}\frac{1}{G} = & f_1\{f_1[\alpha\alpha] + f_2[\alpha\beta] + f_3[\alpha\gamma] + f_4[\alpha\delta]\} + \\ & f_2\{f_1[\alpha\beta] + f_2[\beta\beta] + f_3[\beta\gamma] + f_4[\beta\delta]\} + \\ & f_3\{f_1[\alpha\gamma] + f_2[\beta\gamma] + f_3[\gamma\gamma] + f_4[\gamma\delta]\} + \\ & f_4\{f_1[\alpha\delta] + f_2[\beta\delta] + f_3[\gamma\delta] + f_4[\delta\delta]\}\end{aligned}$$

oder, wenn man die Ausdrücke in den geschlungenen Klammern der Reihe nach mit q_1, q_2, q_3, q_4 bezeichnet, übersichtlicher:

$$\frac{1}{G} = f_1 q_1 + f_2 q_2 + f_3 q_3 + f_4 q_4 = [f\,q], \tag{5}$$

so bestehen die in der Hammerschen Schreibweise (I. Bd., S. 165) angesetzten Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}[a\,a]\,q_1 + [a\,b]\,q_2 + [a\,c]\,q_3 + [a\,d]\,q_4 &= f_1 \\ [b\,b] \quad\quad [b\,c] \quad\quad [b\,d] \quad\quad &= f_2 \\ [c\,c] \quad\quad [c\,d] \quad\quad &= f_3 \\ [d\,d] \quad\quad &= f_4,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man für q die obigen Klammerausdrücke einsetzt. Es ist z. B.

$$\begin{aligned}[a\,a]\,q_1 + [a\,b]\,q_2 + [a\,c]\,q_3 + [a\,d]\,q_4 = \\ = \{[a\,a]\,[\alpha\alpha] + [a\,b]\,[\alpha\beta] + [a\,c]\,[\alpha\gamma] + [a\,d]\,[\alpha\delta]\}\,f_1 \\ + \{[a\,a]\,[\alpha\beta] + [a\,b]\,[\beta\beta] + [a\,c]\,[\beta\gamma] + [a\,d]\,[\beta\delta]\}\,f_2 \\ + \{[a\,a]\,[\alpha\gamma] + [a\,b]\,[\beta\gamma] + [a\,c]\,[\gamma\gamma] + [a\,d]\,[\gamma\delta]\}\,f_3 \\ + \{[a\,a]\,[\alpha\delta] + [a\,b]\,[\beta\delta] + [a\,c]\,[\gamma\delta] + [a\,d]\,[\delta\delta]\}\,f_4,\end{aligned}$$

woraus, da der Faktor von f_1 gleich 1 und die Faktoren von f_2, f_3 und f_4 gleich Null sind, die erste Gleichung von (6) entsteht. Da das System (6) die Form von Normalgleichungen hat, so kann man es auch entsprechend behandeln und erhält nach S. 169 des I. Bandes:

$$\begin{aligned}[a\,a]\,q_1 + [a\,b]\,q_2 + [a\,c]\,q_3 + [a\,d]\,q_4 &= f_1 \\ [b\,b\,.\,1]\,q_2 + [b\,c\,.\,1]\,q_3 + [b\,d\,.\,1]\,q_4 &= [f_2\,.\,1] \\ [c\,c\,.\,2]\,q_3 + [c\,d\,.\,2]\,q_4 &= [f_3\,.\,2] \\ [d\,d\,.\,3]\,q_4 &= [f_4\,.\,3].\end{aligned}$$

Werden hieraus die q berechnet und sodann in (5) eingesetzt, so erhält man ebenfalls die Gewichtsreziproke.

Sind nun die Koordinaten der Endpunkte A, B einer Strecke x_1, y_1, beziehungsweise x_2, y_2, so ist die Entfernung s der beiden Punkte A, B bestimmt aus

$$s^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = (\Delta y)^2 + (\Delta x)^2.$$

Durch Differenziation erhält man:

$$s\,\delta s = -(y_2 - y_1)\,\delta y_1 + (y_2 - y_1)\,\delta y_2 - (x_2 - x_1)\,\delta x_1 + (x_2 - x_1)\,\delta x_2$$

oder

$$\delta s = -\frac{\Delta y}{s}\,\delta y_1 + \frac{\Delta y}{s}\,\delta y_2 - \frac{\Delta x}{s}\,\delta x_1 + \frac{\Delta x}{s}\,\delta x_2$$

oder auch, da unter Einführung des Südwinkels σ der Richtung $A\,B$,

$$\frac{\Delta y}{s} = \sin \sigma \qquad \text{und} \qquad \frac{\Delta x}{s} = \cos \sigma \text{ ist,}$$

$$\delta s = -\cos \sigma\,\delta x_1 - \sin \sigma\,\delta y_1 + \cos \sigma\,\delta x_2 + \sin \sigma\,\delta y_2. \qquad (7)$$

Rechnet man nach (4) oder (5) das Gewicht G von s, so ist, wenn μ_0 den mittleren Richtungsfehler darstellt, der mittlere Entfernungsfehler

$$\mu_s = \frac{\mu_0}{\sqrt{G}}.$$

Zum besseren Verständnisse dieser Theorie sei ein Beispiel im Anschlusse an die Hansensche Aufgabe des § 30 ausgeführt.

Der Südwinkel von T nach G ist aus S. 129: $\sigma = 88^0\,36{\cdot}7'$, so $\sin \sigma = 0{\cdot}9997$, $\cos \sigma = 0{\cdot}0244$. Mit Benützung der Koordinatenverbesserungen der Endpunkte T und G der Seite $TG = s$

$$T \begin{cases} \delta x_1 = +0{\cdot}27 \\ \delta y_1 = -0{\cdot}06 \end{cases} \qquad G \begin{cases} \delta x_2 = -0{\cdot}12 \\ \delta y_2 = -0{\cdot}18 \end{cases}$$

ergibt sich nach Gleichung (7) die Seitenverbesserung:

$$\delta s = +0{\cdot}06 - 0{\cdot}19 = -0{\cdot}13\ m.$$

Rechnet man zur Probe die Entfernung TG zuerst aus den vorläufigen Koordinaten und sodann aus den endgültigen Koordinaten der Endpunkte T und G, so erhält man:

$$s' = 4\,288{\cdot}78\ m$$
$$s = 4\,288{\cdot}65\ m$$
$$\delta s = -0{\cdot}13\ m \text{ wie oben.}$$

Um das Gewicht von s zu berechnen, benutze man die Gleichung (7):

$$\delta s = -0{\cdot}0244\,\delta x_1 - 0{\cdot}9997\,\delta y_1 + 0{\cdot}0244\,\delta x_2 + 0{\cdot}9997\,\delta y_2$$

und erhält, wenn ∂s in Millimetern und die ∂x, ∂y in Metern gezählt werden:

$$\partial s = -24{\cdot}4\,\partial x_1 - 999{\cdot}7\,\partial y_1 + 24{\cdot}4\,\partial x_2 + 999{\cdot}7\,\partial y_2$$

oder genau genug:

$$\partial s = -24\,\partial x_1 - 1000\,\partial y_1 + 24\,\partial x_2 + 1000\,\partial y_2;$$

folglich ist nach Gleichung (1):

$$f_1 = -24,\ f_2 = -1000,\ f_3 = +24,\ f_4 = +1000$$

und nach Gleichung (6) mit Bezug auf die Normalgleichungen S. 129:

$$\begin{array}{rrrrl} 13710\,q_1 & +\ 4991\,q_2 & -\ 5122\,q_3 & -\ 84\,q_4 & = -\ 24 \\ & +\ 19161 & -\ 993 & -\ 19 & = -\ 1000 \\ & & +\ 36454 & -\ 9782 & = +\ 24 \\ & & & +\ 14959 & = +\ 1000. \end{array}$$

Die Auflösung gibt:

$$q_1 = +0{\cdot}0328,\ q_2 = -0{\cdot}0622,\ q_3 = +0{\cdot}0303,\ q_4 = +0{\cdot}0867,$$

folglich ist nach Gleichung (5):

$$\frac{1}{G} = [f\,q] = +148{\cdot}84$$

und der mittlere Entfernungsfehler:

$$\mu_s = \frac{\mu_0}{\sqrt{G}} = 9{\cdot}96\,\sqrt{148{\cdot}84} = \pm 121{\cdot}5\ mm.$$

Die Entfernung TG ist also nach der Ausgleichung:

$$s = 4288{\cdot}65 \pm 0{\cdot}12\ m.$$

C. Netzausgleichung.

§ 32. Aufstellung der Bedingungsgleichungen.

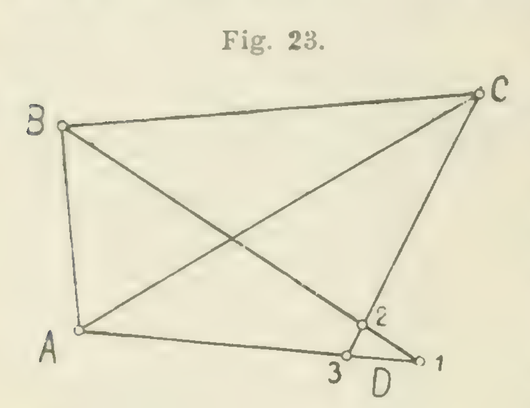
In einem Dreiecksnetze kommen zwei wesentlich verschiedene Arten von Bedingungsgleichungen oder Zwangsgleichungen vor: Winkelgleichungen und Seitengleichungen. (§ 62 des 1. Bandes.)

Die Winkelbedingungsgleichungen, Winkelsummengleichungen oder kurz „Winkelgleichungen", sprechen entweder die Bedingung aus, daß die Summe der um einen Punkt herumliegenden Winkel gleich 360° sein muß und werden dann „Stationsgleichungen" oder „Horizontgleichungen" genannt, oder sie drücken die Forderung aus, daß sämtliche in einem geschlossenen Polygon gemessenen Innenwinkel der von der Theorie festgestellten Winkelsumme vermehrt um

den sphärischen Exzeß gleich kommen muß; sie heißen dann beziehungsweise „Dreiecks-", „Vierecks-" oder allgemein „Polygongleichungen". In einem n-Ecke muß die Summe der Innenwinkel, abgesehen vom sphärischen Exzesse, gleich $2n - 4$ Rechte ausmachen.

Die Seitengleichungen, auch Sinusgleichungen genannt, sorgen dafür, daß alle nach einem bestimmten Zielpunkte gerichteten Strahlen auch wirklich in diesem Punkte sich schneiden; sie bewirken, daß nach entsprechender Verbesserung der beobachteten Richtungen für alle Dreiecksseiten auf jedem beliebigen Rechnungswege dieselben Werte erhalten werden.

Fig. 23.



Soll beispielsweise in D (Fig. 23) kein Fehlerdreieck 1, 2, 3 entstehen, sondern alle drei Strahlen AD, BD, CD in einem und demselben Punkte D sich schneiden, so müssen die in den Standpunkten A, B, C gemessenen Winkel durch Ausgleichung so geändert werden, daß für die Dreiecksseite BD aus den Dreiecken ABD, ACD und BCD dieselbe Länge erhalten wird.

a) Die Winkelgleichungen.

Die bei einer Triangulierung hauptsächlich vorkommenden Polygone sind Dreiecke. Bezeichnet man die wahren Winkelwerte eines Dreieckes mit A, B, C, die gemessenen Winkel mit α, β, γ, die Winkelverbesserungen mit v_α, v_β, v_γ und den sphärischen Exzeß mit E, so lautet die Dreiecksgleichung:

$$A + B + C = 180^0 + E$$

oder $$\alpha + \beta + \gamma + v_\alpha + v_\beta + v_\gamma = 180^0 + E.$$

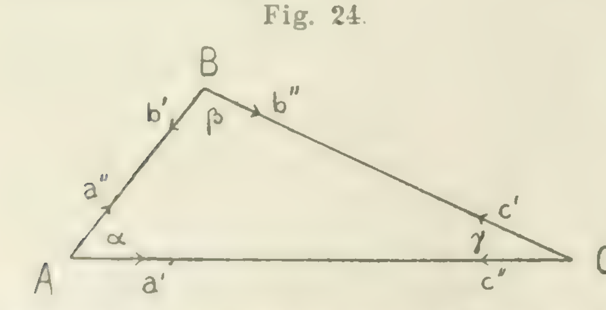
Faßt man die im vorhinein angebbaren Größen zusammen, indem man setzt:

$$\alpha + \beta + \gamma - (180^0 + E) = w,$$

so erhält man die Dreiecksgleichung in der Form:

$$v_\alpha + v_\beta + v_\gamma + w = 0, \quad (1)$$

Fig. 24.



wenn „Winkelmessungen" vorliegen. Hat man jedoch gegenseitige „Richtungsbeobachtungen" angestellt, so treten an die Stelle der Winkelwerte die entsprechenden Richtungsunterschiede, so daß man hat (Fig. 24):

$$\alpha = a' - a'', \qquad \beta = b' - b'', \qquad \gamma = c' - c'',$$

$$A = a' + v'_a - (a'' + v''_a)$$
$$B = b' + v'_b - (b'' + v''_b)$$
$$C = c' + v'_c - (c'' + v''_c).$$

Die Dreiecksgleichung lautet dann:

$$(a'-a'') + (b'-b'') + (c'-c'') + (v'_a - v''_a) + (v'_b - v''_b) + (v'_c - v''_c) = 180^0 + E$$

oder, wenn die bekannten Größen wieder vereinigt und

$$(a'-a'') + (b'-b'') + (c'-c'') - (180^0 + E) = w$$

gesetzt wird, die Winkelgleichung in der Form:

$$v'_a - v''_a + v'_b - v''_b + v'_c - v''_c + w = 0. \qquad (2)$$

Bei einer Dreieckskette (Fig. 25), welche durch einfaches Aneinanderreihen einzelner Dreiecke entsteht, gibt es ebenso viele

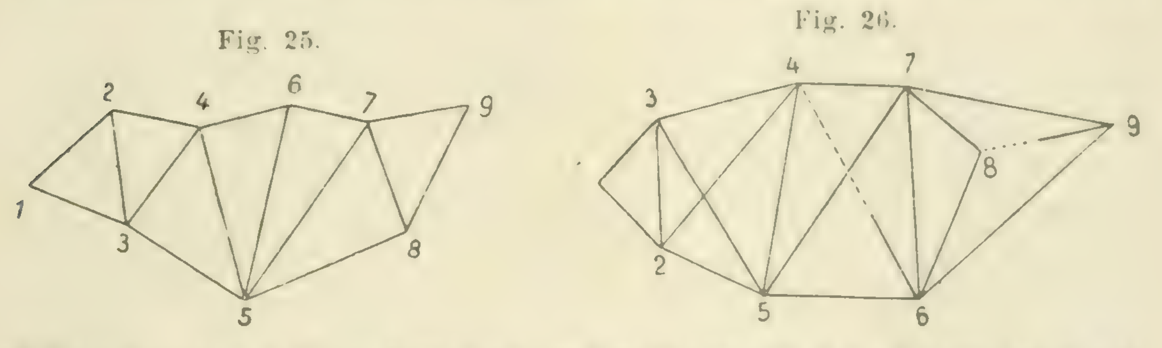


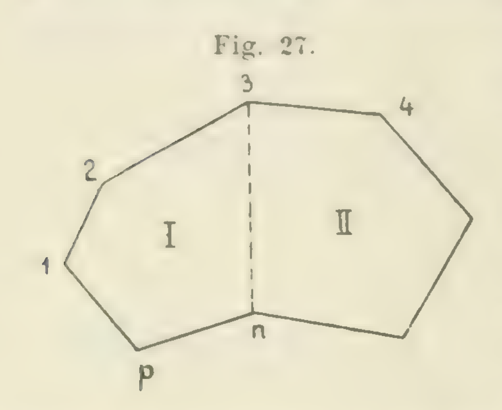
Fig. 25. Fig. 26.

Winkelgleichungen als Dreiecke. Bei Dreiecksnetzen aber (Fig. 26), wo Richtungsdurchkreuzungen vorkommen, können mehr Bedingungsgleichungen aufgestellt werden, als überhaupt notwendig sind. In diesem Falle ist es erforderlich, nur solche Bedingungsgleichungen aufzustellen, die voneinander unabhängig sind, so daß es nicht vorkommen kann, daß eine und dieselbe Bedingung in verschiedenen Gleichungen enthalten ist. Es kommt also zunächst darauf an, die Anzahl der von einander unabhängigen Winkelgleichungen zu bestimmen.

Bei einem n-Eck, wo alle Eckpunkte durch gegenseitige Richtungsmessungen zu einer geschlossenen Figur verbunden sind, geben die Innenwinkel eine ganz bestimmte theoretische Winkelsumme, ein bestimmtes Vielfaches von 180°, weshalb auch nur eine einzige Winkelgleichung zustande kommt. Hiebei ist zu bemerken, daß ein Polygon nur dann zum Schluß gebracht ist, wenn alle Umfangsseiten, die bei einem n-Eck offenbar in der gleichen Anzahl n vorhanden sein müssen, gegenseitig, d. h. hin und her, beobachtet sind, und daß einseitig gemessene Richtungen, oder nur vorwärts und nur rückwärts

eingeschnittene Punkte bei der Abzählung der Winkelgleichungen nicht mitzählen. Sind z. B. in einem Dreiecke nur auf zwei Eckpunkten Richtungen beobachtet worden, so erhält man nur zwei Winkel, aber keine Summenprobe, also auch keine Winkelgleichung. Damit eine geschlossene Figur zustande komme, sind daher in einem n-Eck die n gegenseitig beobachteten Richtungen am Polygonumfange unbedingt erforderlich.

Fig. 27.



Wird nun außer den n unentbehrlichen Seiten noch eine überschüssige Linie, z. B. die Diagonale $3 - n$ in Fig. 27 gegenseitig beobachtet, wodurch das Hauptpolygon in zwei Teile I und II zerfällt, so kann, da jedes Teilpolygon für sich eine geschlossene Figur bildet, deren Innenwinkel eine ganz bestimmte theoretische Winkelsumme geben müssen, auch für jedes Teilpolygon eine Winkelgleichung aufgestellt werden. Von den drei nunmehr vorhandenen Winkelgleichungen sind aber nur zwei von einander unabhängig; denn da die Winkelsumme der beiden Teilpolygone I und II der Winkelsumme des Hauptpolygons gleich kommen muß, so läßt sich die Winkelsumme irgend eines der drei Polygone aus der Summe der Winkel der beiden anderen Polygone durch Subtraktion beziehungsweise Addition berechnen. Das Hinzutreten der einen überschüssigen, gegenseitig beobachteten Richtung zieht daher nur eine neue, unabhängige Winkelgleichung mit sich.

Hat man nun in einem Dreiecksnetze m überschüssige Linien beiderseitig beobachtet, so treten zu der einen Winkelgleichung des Hauptpolygons noch m weitere Winkelgleichungen hinzu, so daß zusammen $W = m + 1$ unabhängige Winkelgleichungen aufgestellt werden können. Besteht sohin das Dreieckssystem aus p vor- und rückwärts eingeschnittenen Punkten, und wurden zwischen denselben l Richtungen gegenseitig gemessen, wobei $l > p$ ist, so ist die Anzahl der überschüssigen anrechenbaren Richtungen $m = l - p$ und die Anzahl der Winkelgleichungen

$$W = l - p + 1. \qquad (1)$$

Befinden sich unter den L Verbindungslinien des ganzen Netzes l' nur einseitig gemessene Linien, so ist $l = L - l'$ und die Anzahl der Winkelgleichungen

$$W = (L - l') - p + 1; \qquad (2)$$

kommen außerdem unter den P Punkten des ganzen Netzes p' Punkte vor, welche nur vorwärts oder nur rückwärts eingeschnitten sind, so ist $p = P - p'$ und

$$W = (L - l) - (P - p) + 1. \tag{3}$$

Sind in dem Dreiecksnetze (Fig. 26) mit neun Punkten die Verbindungslinien 4 — 6 und 8 — 9 nur einseitig, alle übrigen aber gegenseitig beobachtet worden, was in der Zeichnung durch teilweise punktierte und durch volle Linien zum Ausdruck gebracht erscheint, so ist $p = P = 9$, $L - l = 18 - 2 = 16$ und $W = 16 - 9 + 1 = 8$. Die acht selbständigen Winkelgleichungen entsprechen den Dreiecken:

1 2 3, 2 3 4, 3 4 5, 2 4 5, 4 5 7, 5 6 7, 6 7 8, 6 7 9.

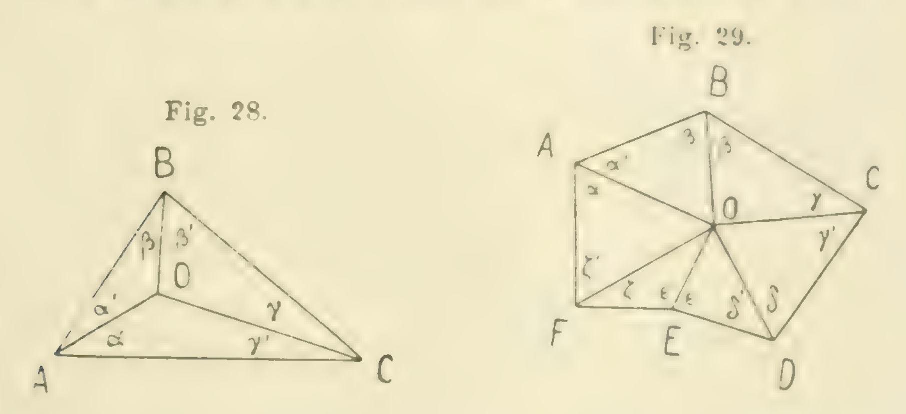


Fig. 28. Fig. 29.

b) Die Seitengleichungen.

Die Seitengleichungen sprechen die Bedingung aus, daß für jede Dreiecksseite, zu welcher man durch verschiedene Reihen von Dreiecken, also auf verschiedenen Rechnungswegen gelangen kann, immer derselbe Wert erhalten werde. Da es bei einer Dreieckskette keine verschiedenen Wege zur Berechnung der einzelnen Dreiecksseiten gibt, so kommen in solchen Dreieckssystemen auch keine Seitengleichungen vor. In einem Dreiecksnetze hingegen können die Seiten durch verschiedene Reihen von Dreiecken erhalten werden, wie dies bereits im § 62 des I. Bandes bei einem Vierecke mit beiden Diagonalen, der einfachsten Gestalt eines Dreiecksnetzes, dargelegt wurde.

Die Punkte eines Dreiecksnetzes, welche eine Seitengleichung geben, sind in der Regel dadurch leicht erkennbar, daß in ihnen mehrere Seiten zusammenlaufen. Solche Punkte werden daher **Zentralpunkte** genannt. In einem Vierecke, worin alle Seiten und Diagonalen gegenseitig gemessen sind, ist jeder Eckpunkt ein Zentralpunkt in bezug auf die drei übrigen Eckpunkte (Fig. 31); in einem Polygon, dessen Eckpunkte mit einem außerhalb oder innerhalb desselben

gelegenen Punkte O durch Richtungsmessungen verbunden sind, ist dieser Punkt O der ausgesprochene Zentralpunkt. (Fig. 28, 29, 30). So lauten z. B. in den Figuren 28 und 29 die Seitengleichungen in bezug auf den Zentralpunkt O:

$$\frac{\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma}{\sin\alpha'\,\sin\beta'\,\sin\gamma'} = 1 \qquad \text{in Fig. 28}$$

$$\frac{\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma\,\sin\delta\,\sin\varepsilon\,\sin\zeta}{\sin\alpha'\,\sin\beta'\,\sin\gamma'\,\sin\delta'\,\sin\varepsilon'\,\sin\zeta'} = 1 \qquad \text{in Fig. 29.}$$

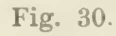


Fig. 30.

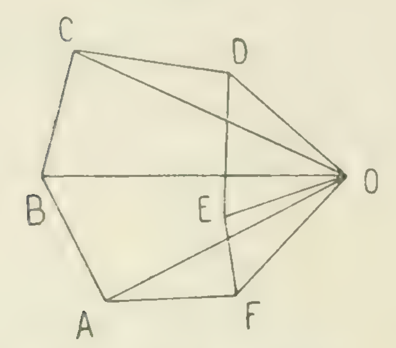
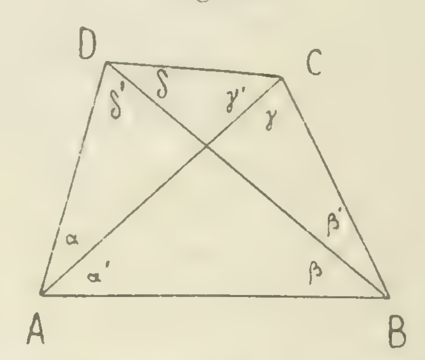


Fig. 31.

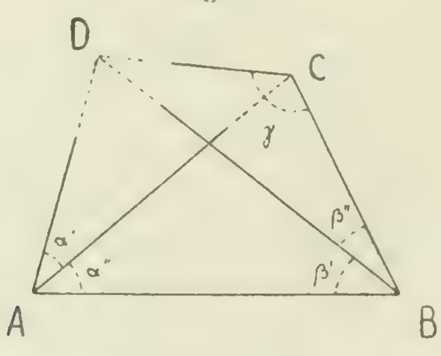


In der Figur 31 lautet die Seitengleichung in bezug auf den Punkt D:

$$\frac{\sin\beta\,\sin(\gamma+\gamma')\sin\alpha}{\sin\beta'\,\sin(\alpha+\alpha')\sin\gamma'} = 1.$$

Sind in dem Vierecke Fig. 32 nur die fünf eingeschriebenen Winkel gemessen, so lautet die Seitengleichung:

Fig. 32.



$$\frac{\sin(\alpha'+\alpha'')\sin(\alpha''+\beta'+\beta'')\sin(\beta''+\gamma)}{\sin(\alpha'+\alpha''+\beta')\sin\alpha''\sin\gamma} = 1.$$

Gefunden wird dieselbe dadurch, daß man die Ansätze für die auf zwei Wegen berechenbare Seite CD gleich setzt, denn es ist

$$CD = AB\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha'')\sin\beta''}{\sin(\alpha'+\alpha''+\beta')\sin\gamma} = AB\cdot\frac{\sin\alpha''\sin\beta''}{\sin(\alpha''+\beta'+\beta'')\sin(\beta''+\gamma)},$$

woraus durch Kürzung mit $AB\sin\beta''$ die obige Seitenbedingungsgleichung hervorgeht. Hiedurch ist gleichzeitig gezeigt, daß das Vier-

eck, obwohl in keinem der vier Dreiecke alle drei Winkel gemessen wurden, durch eine einzige Seitengleichung ohne Winkelgleichungen in den Winkelmessungen kontrolliert werden kann. Im übrigen sei mit Bezug auf die Aufstellung der Seitengleichungen und das Linearmachen derselben durch Logarithmierung auf die im § 62 des I. Bandes gemachten Erläuterungen verwiesen.

Um den Übergang von Winkelmessungen auf Richtungsmessungen zu bewirken, braucht man die Winkel nur durch die Unterschiede der die betreffenden Winkel bildenden Richtungen und die Winkelverbesserungen r durch die Differenzen der betreffenden Richtungsverbesserungen $\mathfrak{v}$ zu ersetzen. Lautet also die linear gemachte Bedingungsgleichung, bezogen auf die Winkel (vgl. Gleichung 6, § 62 des I. Bandes, S. 243):

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 + \cdots + w_1 = 0,$$

so heißt die Bedingungsgleichung, bezogen auf die Richtungen.

$$a_1 (\mathfrak{v}_1'' - \mathfrak{v}_1') + a_2 (\mathfrak{v}_2'' - \mathfrak{v}_2') + a_3 (\mathfrak{v}_3'' - \mathfrak{v}_3') + \cdots w_1 = 0.$$

oder aufgelöst:

$$a_1 \mathfrak{v}_1'' - a_1 \mathfrak{v}_1' + a_2 \mathfrak{v}_2'' - a_2 \mathfrak{v}_2' + \cdots + w_1 = 0.$$

Aus der letzteren Form ist ersichtlich, daß bei Dreiecksnetzausgleichungen mit gleichgewichtigen Richtungen die algebraische Summe aller Koeffizienten gleich Null sein muß, was bei der Ausgleichung mit Winkeln nicht der Fall zu sein braucht.

Um die Anzahl der unabhängigen Seitengleichungen in einem Dreiecksnetze zu ermitteln, genügt es, die Anzahl von Seiten abzuzählen, welche entfernt werden müßten, um das Dreiecksnetz in eine Dreieckskette zu verwandeln, da jede zur Bildung einer Kette überschüssige Seite eine Seitengleichung gibt. Um aber für die Anzahl der Seitengleichungen einen Formelansatz zu erhalten, hat man zunächst zu beachten, daß in einem jeden Dreiecksnetze durch eine direkt gemessene Dreiecksseite als Grundlinie oder Basis zwei Punkte des Netzes bereits gegenseitig festgelegt sind. Jeder weitere Punkt verlangt zu seiner Festlegung die Beobachtung zweier neuen Richtungen, wobei dieselben aber nur einseitig beobachtet zu sein brauchen. Besitzt das Dreiecksnetz im Ganzen P Punkte, so erfordert die Festlegung der mit der Basis nicht in unmittelbarer Verbindung stehenden $P-2$ Punkte die Anzahl von $2(P-2)$ Richtungen. Mit Einschluß der Basis sind daher zur eindeutigen Bestimmung aller P Punkte $2(P-2)+1 = 2P-3$ Linien unbedingt erforderlich. Jede überschüssig gemessene Linie liefert nun eine Seiten-

gleichung. Ist die Anzahl aller im Netze gemessenen Linien L, so sind davon $L-(2P-3)$ überschüssig, folglich ist

$$S=L-2P+3 \quad (4)$$

die Anzahl der Seitengleichungen, wobei auch die einseitig beobachteten Richtungen mitzählen. Sind aber alle Richtungen beiderseitig gemessen und alle Punkte vor- oder rückwärts eingeschnitten, so daß in (3) $l=0$ und $p'=0$ zu setzen ist und daher (3) die Form (1) annimmt, so entstehen überdies noch

$$W=L-P+1 \quad (5)$$

Winkelgleichungen und man hat dann im ganzen

$$W+S=2L-3P+4 \quad (6)$$

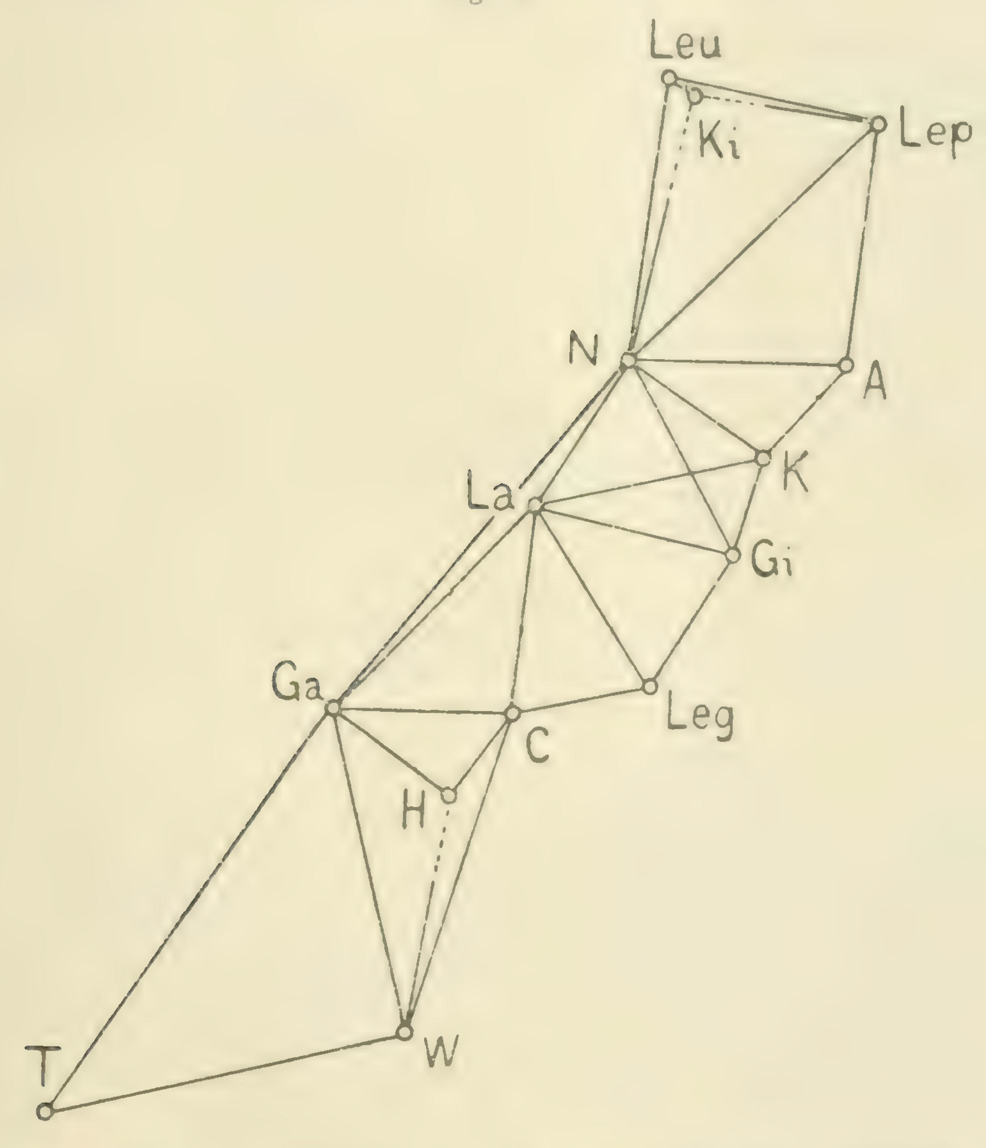
Bedingungsgleichungen.

Es ist wichtig, vor jeder Rechnung über die Anzahl der unabhängigen Winkel- und Seitengleichungen sich klar zu sein, da man sonst einem zweifachen Fehler ausgesetzt ist, indem einerseits notwendige Bedingungen übersehen, anderseits überflüssige Bedingungen mitgeschleppt werden könnten. „Die Kenntnis ihrer Zahl schützt vor Auslassung wie vor Wiederholung." (Ausspruch von Bessel.)

Als ein Beispiel für das Aufsuchen der Bedingungsgleichungen durch allmähliches Aufbauen des Netzes wählen wir das Hauptnetz (Fig. 33) der Gradmessung in Ostpreußen (ohne die kleinen Dreiecke des Basisnetzes): Ausgehend von der durch ein eigenes Basisnetz bestimmten Grundlinie „Galtgarben $= Ga$" — „Condehnen $= C$" erscheint „Wildenhof $= W$", da im Dreiecke $Ga\,W\,C$ alle drei Winkel gemessen wurden, durch eine Winkelmessung überbestimmt; dieses Dreieck liefert daher die erste Winkelgleichung $W_1 = Ga\,C\,W$. „Haferberg $= H$" ist von Ga, C und W aus eingeschnitten, daher ist eine Richtung überflüssig, woraus die Seitengleichung $S_1 = Ga\,C\,W\,H$ resultiert. Da aber auf H auch die Richtungen nach Ga und C überflüssig sind (wobei die einseitig beobachtete Richtung $W\,H$ nicht mitzählt), so gibt dieser Umstand eine zweite Winkelgleichung $W_2 = Ga\,C\,H$. Es liefern ferner die überschüssig gemessenen Winkel in „Trunz $= T$": $W_3 = Ga\,W\,T$; in „Lattenwalde $= La$": $W_4 = Ga\,C\,La$; in „Legitten $= Leg$": $W_5 = C\,La\,Leg$; in „Gilge $= Gi$": $W_6 = La\,Leg\,Gi$; in „Kalleninken $= K$": $W_7 = La\,Gi\,K$. „Nidden $= N$" ist von vier Punkten durch äußere Richtungen und die nach denselben Punkten führenden inneren Richtungen festgelegt, wodurch drei Winkelgleichungen: $W_8 = Gi\,La\,N$, $W_9 = K\,La\,N$, $W_{10} = Ga\,La\,N$ und zwei Seitengleichungen $S_2 = Ga\,K\,La\,N$, $S_3 = Ga\,C\,Leg\,Gi\,La\,N$ entstehen.

Der überschüssige Winkel in „Algeberg = A" gibt $W_{11} = K\,N\,A$ und der überschüssige Winkel in „Lepaizi = Lep": $W_{12} = N\,A\,Lep$. Der „Kirchturm = Ki" von Memel, auf welchem selbst keine Beobachtungen stattfanden und der daher bei der Zählung der Winkelgleichungen nicht mitwirkt, wurde durch einfaches Vorwärtseinschneiden von N und Lep aus festgelegt und sodann zur schärferen

Fig. 33.



Bestimmung von „Leuchtturm = Leu" herangezogen, wodurch noch erhalten werden: $W_{13} = N\,Lep\,Leu$ und $S_1 = N\,Lep\,Ki\,Leu$.

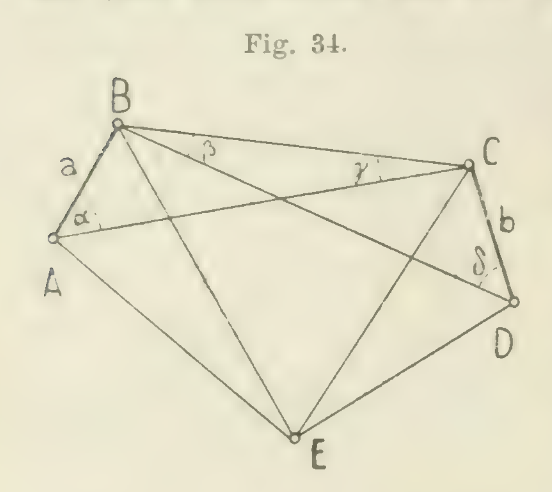
Da von den $P = 14$ Dreieckspunkten für die Bestimmung der Anzahl der Winkelgleichungen der Kirchturm, nach welchem nur einseitige Richtungen genommen wurden, nicht mitzählt, so ist $p = 13$, die Anzahl der gegenseitig gemessenen Richtungen $l = 25$, somit $W = l - p + 1 = 13$. Für die Bestimmung der Anzahl der Seiten-

gleichungen ist $P = 14$, $L = 29$ (auch einseitig gemessene Richtungen), somit $S = L - 2P + 3 = 4$, übereinstimmend mit der obigen Aufstellung.

c) Die Basisgleichungen.

Hat man in einem Dreiecksnetze zwei Grundlinien gemessen, so soll jede Grundlinie, aus der anderen berechnet, dieselbe Länge ergeben, welche die direkte Messung geliefert hat. Diese Forderung verlangt die Erfüllung einer besonderen Bedingungsgleichung, welche **Basisgleichung** genannt wird.

Fig. 34.



Sind a und b (Fig. 34) zwei direkt gemessene Grundlinien, und berechnet man b von a ausgehend durch Heranziehung des dazwischenliegenden Netzteiles, so soll, wenn die Verhältnisse der Fig. 34 vorliegen, der aus der Gleichung

$$a = BC \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = b \frac{\sin\delta \sin\gamma}{\sin\beta \sin\alpha}$$

erhaltene Wert von b mit dem aus der Messung hervorgegangenen Werte vollkommen übereinstimmen. Die zu erfüllende Basisgleichung lautet:

$$\frac{a \sin\alpha \sin\beta}{b \sin\gamma \sin\delta} = 1. \qquad (1)$$

Diese Bedingungsgleichung wird aber infolge der Beobachtungsfehler keine Befriedigung finden, wenn an Stelle der Werte a, b, α, β, γ, δ die beobachteten Werte a', b', α', β', γ', δ' eingeführt werden. Sie wird aber erfüllt sein, wenn die Beobachtungswerte der Reihe nach um die wahrscheinlichsten Verbesserungen v_a, v_b, v_1, v_2, v_3, v_4 geändert werden. Es wird daher die Gleichung bestehen:

$$\frac{(a' + v_a) \sin(\alpha' + v_1) \sin(\beta' + v_2)}{(b' + v_b) \sin(\gamma' + v_3) \sin(\delta' + v_4)} = 1. \qquad (2)$$

Um diese Gleichung in eine lineare Form zu bringen, behandle man sie logarithmisch, wobei zu beachten ist, daß, nach dem **Taylor**schen Satze entwickelt,

$$\log \sin(\alpha' + v_1) = \log \sin\alpha' + \frac{M \cot g\, \alpha'}{\varrho} v_1 = \log \sin\alpha' + m_1 v_1$$

$$M = 0{\cdot}43429,\ \varrho = 206265'',\ \text{also}\ \frac{M}{\varrho} = 0{\cdot}00000\ 21055\ \text{oder}$$

$\frac{M}{\varrho} = 2{\cdot}1055$ in Einheiten der 6. Dezimalstelle ist. Die Logarithmierung gibt nun

$$\log \frac{a' \sin \alpha' \sin \beta'}{b \sin \gamma' \sin \delta'} + m_1 v_1 - m_2 v_2 - m_3 v_3 - m_4 v_4 + v_a - v_b = 0$$

oder, wenn man die vor Anstellung der Rechnung bekannten Größen zusammenfaßt und mit n bezeichnet,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_3 v_3 - m_4 v_4 + v_a - v_b + n = 0. \qquad (3)$$

In dieser Fehlergleichung kommen Verbesserungen von Winkeln und Seiten vor, deren Ausgleichung die Kenntnis oder wenigstens eine Schätzung der mittleren Fehler der Winkel- und Basismessung voraussetzt. Da aber eine einwandfreie Genauigkeitsschätzung, wie Helmert (1907) in seiner „Ausgleichungsrechnung" S. 526 bemerkt, „schwer in ganz befriedigender Weise zu machen ist, so unterläßt man in der Regel die Verbesserung der Grundlinien, was um so zulässiger ist, als diese Verbesserungen wegen der großen Genauigkeit der Grundlinienmessung doch äußerst gering ausfallen würde". Setzt man also $v_a = v_b = 0$, so reduziert sich (3) wie folgt:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_3 v_3 - m_4 v_4 + n = 0. \qquad (4)$$

Kommen im Dreiecksnetze s Seiten mit unveränderlich gegebenen Längen vor, so bestehen $s - 1$ derartige Basisgleichungen.

§ 33. Ausgleichung eines Vierecks.

Als Zahlenbeispiel für die Ausgleichung bedingter Richtungsmessungen verwenden wir das bereits im § 62 des I. Bandes unter Zugrundelegung von Winkelmessungen ausgeglichene Viereck. (Fig. 35.) Die auf allen vier Punkten angestellten Messungen lieferten folgende volle Richtungssätze:

A	(1) = 113° 46′ 21″7	B	(4) = 249° 12′ 19″9
	(2) = 108 04 42·0		(5) = 211 10 11·8
	(3) = 69 12 19·9		(6) = 187 25 50·9
C	(7) = 7° 25′ 49″2	D	(10) = 95° 35′ 15″9
	(8) = 288 04 42·0		(11) = 31 10 11·8
	(9) = 275 35 20·4		(12) = 293 46 19·1.

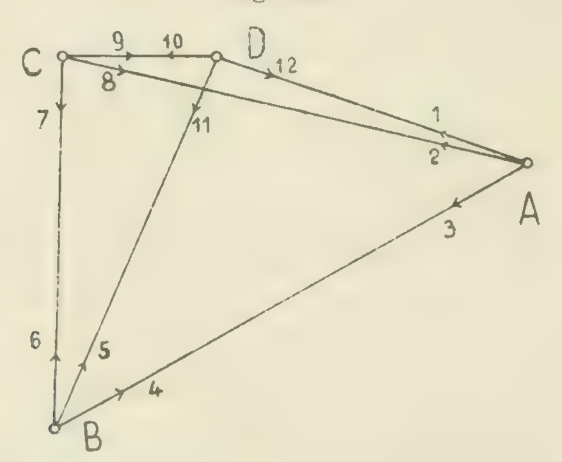
Hiebei stimmen die Richtungen (3) mit (4), (2) mit (8) und (5) mit (11) bis auf 180° bloß aus dem Grunde vollkommen überein, weil dies bei der beliebig anzunehmenden Anfangsrichtung so gewählt

worden ist. Daß die übrigen Richtungen, z. B. (6) mit (7) nicht genau zusammenstimmen, hat in den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern seinen Grund.

Die Summenproben der vier Dreiecke sind:

(2) — (3) =	38° 52′ 22″1	(1) — (3) =	44° 34′ 01″8
(4) — (6) =	61 46 29·0	(4) — (5) =	38 02 08·1
(7) — (8) =	79 21 07·2	(11) — (12) =	97 23 52·7
	179 59 58·3		180 00 02·6
	$w = -1''7$		$w = +2''6$
(1) — (2) =	5° 41′ 39″7	(5) — (6) =	23° 44′ 20″9
(8) — (9) =	12 29 21·6	(7) — (9) =	91 50 28·8
(10) — (12) =	161 48 54·8	(10) — (11) =	64 25 02·1
	179 59 56·1		179 59 51·8
	$w = -3''9$		$w = -8''2$.

Fig. 35.



Bezeichnet man die Richtungsverbesserungen mit v_1 bis v_{12}, so entspringen hieraus mit Ausscheidung des letzten Dreiecks folgende Winkelgleichungen:

$$v_2 - v_3 + v_4 - v_6 + v_7 - v_8 - 1{\cdot}7 = 0$$
$$v_1 - v_3 + v_4 - v_5 + v_{11} - v_{12} + 2{\cdot}6 = 0$$
$$v_1 - v_2 + v_8 - v_9 + v_{10} - v_{12} - 3{\cdot}9 = 0.$$

Hiezu kommt die auf den Zentralpunkt D bezogene Seitengleichung, welche nach § 35 die günstigste der Seitengleichungen ist:

$$\frac{\sin\,[(5)-(6)]\,\sin\,[(1)-(3)]\,\sin\,[(8)-(9)]}{\sin\,[(4)-(5)]\,\sin\,[(1)-(2)]\,\sin\,[(7)-(9)]} = 1$$

oder

$$\frac{\sin\,(23^0\,44'\,20''9)\,\sin\,(44^0\,34'\,01''8)\,\sin\,(12^0\,29'\,21''6)}{\sin\,(38^0\,02'\,08''1)\,\sin\,(\ 5^0\,41'\,39''7)\,\sin\,(91^0\,50'\,28''8)} = 1.$$

Die entsprechende Bedingungsgleichung ergibt sich durch Logarithmierung in linearer Form wie folgt:

log sin (23° 44′ 20″9)	= 9·6048 448	Δ für 10″ =	+ 479
„ „ (44 34 01·8)	= 9·8461 793	„ „	+ 214
„ „ (12 29 21·6)	= 9·3349 719	„ „	+ 950
log Zähler	= 8·7859 960		
„ „ (38° 02′ 08″1)	= 9·7896 870	„ „	+ 269
„ „ (5 41 39·7)	= 8·9966 072	„ „	+ 2112
„ „ (91 50 28·8)	= 9·9997 757	„ „	— 7
log Nenner	= 8·7860 699		

$$w = log \text{ Zähler } minus \ log \text{ Nenner} = -0{\cdot}0000\,739.$$

Wie aus dem bloßen Anblick der in Einheiten der 7. Dezimale angesetzten logarithmischen Differenzen Δ für 10″ zu ersehen ist, erscheinen selbst die auf 1″ bezogenen Differenzen gegenüber den Koeffizienten der Winkelgleichungen, welche durchaus gleich 1 sind, zu groß, wodurch die weitere Ziffernrechnung unbequem ausfallen würde. Man setzt daher mit praktischem Vorteil die auf 1″ reduzierten Differenzen in Einheiten der 6. Dezimalstelle an und erhält so die Seitengleichung

$$+ 4{\cdot}79\,(v_5 - v_6) + 2{\cdot}14\,(v_1 - v_3) + 9{\cdot}50\,(v_8 - v_9) - 2{\cdot}69\,(v_4 - v_5) -$$
$$- 21{\cdot}12\,(v_1 - v_2) + 0{\cdot}07\,(v_7 - v_9) - 73{\cdot}9 = 0$$

oder nach v_1, v_2, v_3, . . . geordnet:

$$- 18{\cdot}98\,v_1 + 21{\cdot}12\,v_2 - 2{\cdot}14\,v_3 - 2{\cdot}69\,v_4 + 7{\cdot}48\,v_5 - 4{\cdot}79\,v_6 + 0{\cdot}07\,v_7 +$$
$$+ 9{\cdot}50\,v_8 - 9{\cdot}57\,v_9 - 73{\cdot}9 = 0.$$

Hierin muß die Summe der Koeffizienten, wie S. 139 bewiesen, gleich Null sein.

Zusammenstellung der Koeffizienten und Absolutglieder der vier Bedingungsgleichungen.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	w
a	— 18·98	+ 21·12	— 2·14	— 2·69	+ 7·48	— 4·79	+ 0·07	+ 9·50	— 9·57	.	.	.	— 73·9
b	.	+ 1	— 1	— 1	.	— 1	+ 1	— 1	.	.	.	.	— 1·7
c	+ 1	.	— 1	+ 1	— 1	.	.	.	.	.	— 1	— 1	+ 2·6
d	+ 1	— 1	.	.	.	.	.	+ 1	— 1	+ 1	.	— 1	— 3·9

Damit erhält man die Normalgleichungen in der Hammerschen Schreibweise:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
1078{\cdot}84\,k_1 & -\,15{\cdot}93\,k_2 & -\,27{\cdot}01\,k_3 & -\,21{\cdot}03\,k_4 & -\,73{\cdot}9 & = 0 \\
 & 6{\cdot}00 & -\,2{\cdot}00 & -\,2{\cdot}00 & -\,1{\cdot}7 & \\
 & & 6{\cdot}00 & -\,2{\cdot}00 & +\,2{\cdot}6 & \\
 & & & 6{\cdot}00 & -\,3{\cdot}9 & \\
\hline
 & -\,5{\cdot}7658\,k_2 & +\,2{\cdot}3998\,k_3 & -\,1{\cdot}6895\,k_4 & -\,0{\cdot}6088 & = 0 \\
 & & -\,5{\cdot}3206 & +\,1{\cdot}4723 & +\,0{\cdot}7456 & \\
 & & & +\,5{\cdot}5901 & -\,5{\cdot}3405 & \\
\hline
 & & -\,4{\cdot}3217\,k_3 & -\,2{\cdot}1756\,k_4 & +\,0{\cdot}9990 & = 0 \\
 & & & +\,5{\cdot}0948 & -\,5{\cdot}5189 & \\
\hline
 & & & +\,3{\cdot}9996\,k_4 & -\,6{\cdot}0218 & = 0
\end{array}
$$

Auflösung: $k_1 = +\,0{\cdot}059$, $k_2 = +\,0{\cdot}959$, $k_3 = -\,0{\cdot}989$, $k_4 = +\,1{\cdot}506$.

Daran schließt sich die Berechnung der Richtungsverbesserungen v im Einklange mit der obigen Koeffizientenzusammenstellung:

Nr.	$k_1 a$	$k_2 b$	$k_3 c$	$k_4 d$	v	Probe	$v v$
1	− 1·120	. . . .	− 0·989	+ 1·506	− 0·603		0·364
2	+ 1·246	+ 0·959	. . . .	− 1·506	+ 0·699	0·000	0·489
3	− 0·126	− 0·959	+ 0·989	. . .	− 0·096		0·009
4	− 0·159	+ 0·959	− 0·989	. . . .	− 0·189		0·036
5	+ 0·441	. . .	+ 0·989	. . .	+ 1·430	− 0·001	2·045
6	− 0·283	− 0·959	. . . .	. . .	− 1·242		1·543
7	+ 0·004	+ 0·959	. . . .	. . . .	+ 0·963		0·927
8	+ 0·561	− 0·959	. . . .	+ 1·506	+ 1·108	0·000	1·228
9	− 0·565	. . . .	. . . .	− 1·506	− 2·071		4·289
10	. .	. . . .	. . . .	+ 1·506	+ 1·506		2·268
11	. . .	.	− 0·989	. . . .	− 0·989	0·000	0·978
12	. . . .	. .	− 0·989	− 1·506	0·517		0·267
Probe	− 0·001	0·000	0·000	0·000		− 0·001	14·443

Die ausgeglichenen Richtungen sind:

[1] = 113° 46′ 21″7 − 0″6 = 113° 46′ 21″1
[2] = 108 04 42·0 + 0·7 = 108 04 42·7
[3] = 69 12 19·9 − 0·1 = 69 12 19·8
[4] = 249 12 19·9 − 0·2 = 249 12 19·7
[5] = 211 10 11·8 + 1·4 = 211 10 13·2
[6] = 187 25 50·9 − 1·2 = 187 25 49·7
[7] = 7 25 49·2 + 1·0 = 7 25 50·2
[8] = 288 04 42·0 + 1·1 = 288 04 43·1
[9] = 275 35 20·4 − 2·1 = 275 35 18·3

[10] = 95 35 13·9 + 1·5 = 95 35 15·4
[11] = 31 10 11·8 — 1·0 = 31 10 10·8
[12] = 293 46 19·1 — 0·5 = 293 46 18·6

Die ausgeglichenen Winkel lauten:

[2] — [3] =	38° 52′ 22″·9	[1] — [3] = 44° 34′ 01″·3
[4] — [6] =	61 46 30·0	[4] — [5] = 38 02 06·5
[7] — [8] =	79 21 07·1	[11] — [12] = 97 23 52·2
	180 00 00·0	180 00 00·0

[1] — [2] =	5° 41′ 38″·4	[5] — [6] = 23° 44′ 23″·5
[8] — [9] =	12 29 24·8	[7] — [9] = 91 50 31·9
[10] — [12] =	161 48 56·8	[10] — [11] = 64 25 04·6
	180 00 00·0	180 00 00·0

Prüfung der Seitengleichung:

$$
\left.\begin{array}{l}
\log \sin\,(23^0\,44'\,23''5) = 9{\cdot}6048\,573 \\
\quad\text{„}\quad\text{„}\quad (44\;\;34\;\;01{\cdot}3) = 9{\cdot}8461\,782 \\
\quad\text{„}\quad\text{„}\quad (12\;\;29\;\;24{\cdot}8) = 9{\cdot}3350\,023
\end{array}\right|\; 8{\cdot}7860\,378
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\quad\text{„}\quad\text{„}\quad (38\;\;02\;\;06{\cdot}5) = 9{\cdot}7896\,827 \\
\quad\text{„}\quad\text{„}\quad (\;5\;\;41\;\;38{\cdot}4) = 8{\cdot}9965\,795 \\
\quad\text{„}\quad\text{„}\quad (91\;\;50\;\;31{\cdot}9) = 9{\cdot}9997\,755
\end{array}\right|\; 8{\cdot}7860\,377.
$$

Mit den ausgeglichenen Winkeln erhält man, ausgehend von einer Dreiecksseite als Basis, alle übrigen Seiten auf allen Wegen gleichlautend.

Zur Genauigkeitsbestimmung berechnet man $[v\,v] = 14{\cdot}43$ direkt und zur Probe aus $-[k\,w]$. Es ist

k	w	$-k\,w$
— 0·059	— 73·9	— 4·360
+ 0·959	— 1·7	— 1·630
— 0·989	— 2·6	— 2·571
+ 1·506	— 3·9	— 5·873
		14·434

Der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung ist daher

$$\mu_r = \sqrt{\frac{[v\,v]}{r}} = \sqrt{\frac{14{\cdot}43}{4}} = \pm 1''{\cdot}90$$

und der mittlere Fehler eines Winkels

$$\mu_w = \mu_r \sqrt{2} = \pm 2''{\cdot}69.$$

Überblickt man die ausgeglichenen Richtungen, so findet man, daß die einander zugeordneten Richtungen im Hin- und Hergange nicht genau um 180° verschieden sind, sondern kleine Differenzen aufweisen, nämlich:

$$\begin{array}{rl} [1] = & 113^0\,46'\,21''1 \\ [12] - 180^0 = & 113\;\;46\;\;18{\cdot}6 \\ \hline \Delta = & +\;\;2{\cdot}5 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} [2] = & 108^0\,04'\,42''7 \\ [8] - 180^0 = & 108\;\;04\;\;43{\cdot}1 \\ \hline \Delta = & -\;\;0{\cdot}4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} [3] = & 69^0\,12'\,19''8 \\ [4] - 180^0 = & 69\;\;12\;\;19{\cdot}7 \\ \hline \Delta = & +\;\;0{\cdot}1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} [7] = & 7^0\,25'\,50''2 \\ [6] - 180^0 = & 7\;\;25\;\;49{\cdot}7 \\ \hline \Delta = & +\;\;0{\cdot}5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} [11] = & 31^0\,10'\,10''8 \\ [5] - 180^0 = & 31\;\;10\;\;13{\cdot}2 \\ \hline \Delta = & -\;\;2{\cdot}4 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} [10] = & 95^0\,35'\,15''4 \\ [9] - 180^0 = & 95\;\;35\;\;18{\cdot}3 \\ \hline \Delta = & -\;\;2{\cdot}9. \end{array}$$

Man kann nun die Ausgleichung von vornherein so einrichten, daß diese Differenzen gar nicht auftauchen, und zwar dadurch, daß man die von den orientierten Richtungen verlangten Bedingungen direkt einführt. In unserem Beispiele lauten diese „Richtungsbedingungen" wie folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= v_1 - v_{12} + 2''6 \\ 0 &= v_2 - v_8 \\ 0 &= v_3 - v_4 \\ 0 &= v_5 - v_{11} \\ 0 &= v_6 - v_7 + 1''7 \\ 0 &= v_9 - v_{10} + 6''5 \end{aligned}$$

Mit der Erfüllung dieser „Richtungsgleichungen" sind zugleich auch die Winkelgleichungen befriedigt (indem z. B. die zweite weniger der dritten und fünften Richtungsgleichung die erste Winkelgleichung, S. 144, gibt). Legt man nun der Ausgleichung eine Seitengleichung und die sechs Richtungsgleichungen zugrunde, so ist man hiedurch nicht nur von der Wahl der drei Gleichungen unter den vier gleichberechtigten Winkelgleichungen enthoben (vgl. Anmerkung S. 158), sondern es gestaltet sich auch infolge des einfacheren Baues der Richtungsgleichungen die ganze Rechnung wesentlich bequemer und kürzer, weil die Auflösung der Normalgleichungen durch bloße Substitution der aus den sechs letzten Normalgleichungen hervorgehenden Werte k_2 bis k_7 in die erste Normalgleichung leicht erfolgen kann, wie nachstehend gezeigt werden soll.

Zusammenstellung der Koeffizienten und Absolutglieder der 7 Bedingungsgleichungen

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	w
a	− 18·98	+ 21·12	− 2·14	− 2·69	+ 7·48	− 4·79	+ 0·07	+ 9·50	− 9·57	. . .			73·9
b	+ 1	. . .	.	. . .		. . .	.	.	.			1	2·6
c	. . .	+ 1	. . .	. . .	.	. . .	.	− 1	.	.			0
d	. . .	. .	+ 1	− 1	. . .	. . .	.		. .	.	.		0
e	. . .	. . .	. . .	. . .	+ 1	. . .	.	.	.		− 1	.	0
f	. . .	. . .	. .	. . .	.	+ 1	− 1	. . .	.	. .	.	.	1·7
g	. . .	. . .	. . .	.	.	. .	.	.	+ 1	− 1	.		6·5

Normalgleichungen:

$$1078{\cdot}84\,k_1 - 18{\cdot}98\,k_2 + 11{\cdot}62\,k_3 + 0{\cdot}55\,k_4 + 7{\cdot}48\,k_5 - 4{\cdot}86\,k_6 - 9{\cdot}57\,k_7 - 73{\cdot}9 = 0$$

+ 2·00 . . . . + 2·6

+ 2·00 . . . .

+ 2·00 . . . .

+ 2·00 . . . .

+ 2·00 . . . . . + 1·7

+ 2·00 + 6·5

Korrelaten:

$$k_1 = 13{\cdot}9925 : 745{\cdot}48 = + 0{\cdot}01877$$
$$k_2 = + 9{\cdot}49\,k_1 - 1{\cdot}3 = - 1{\cdot}122$$
$$k_3 = - 5{\cdot}81\,k_1 = - 0{\cdot}109$$
$$k_4 = - 0{\cdot}275\,k_1 = - 0{\cdot}005$$
$$k_5 = + 3{\cdot}74\,k_1 = + 0{\cdot}070$$
$$k_6 = + 2{\cdot}43\,k_1 - 0{\cdot}85 = - 0{\cdot}804$$
$$k_7 = + 4{\cdot}785\,k_1 - 3{\cdot}25 = - 3{\cdot}160.$$

Richtungsverbesserungen und ausgeglichene Richtungen.

Nr	$k_1\,a$	$k_2\,b$	$k_3\,c$	$k_4\,d$	$k_5\,e$	$k_6\,f$	$k_7\,g$	v	$v\,v$	Ausgegl. Richtungen
1	− 0·356	− 1·122	. . .	. .	.			− 1·478	2·184	113° 46′ 20″·2
2	+ 0·396	. .	− 0·109	. . .	.			+ 0·287	0·082	108 04 42·3
3	− 0·040	. . .	. .	− 0·005	.			− 0·045	0·002	69 12 19·9
4	− 0·050	. . .	.	+ 0·005	. .		. .	− 0·045	0·002	249 12 19·9
5	+ 0·140	. . .	. .	. . .	− 0·070			+ 0·070	0·005	211 10 11·9
6	− 0·090	.	.	.	. . .	− 0·804	. .	− 0·894	0·799	187 25 50·0
7	+ 0·001	. . .	. . .	.	. . .	+ 0·804		+ 0·805	0·648	7 25 50·0
8	+ 0·178	. . .	+ 0·109	. .	. .			+ 0·287	0·082	288 04 42·3
9	− 0·180	.	. .		. . .		− 3·160	− 3·340	11·156	275 35 17·1
10	. . .	. . .	. .		. .		+ 3·160	+ 3·160	9·986	95 35 17·1
11	. . .	. .	. .	. . .	+ 0·070			+ 0·070	0·005	31 10 11·9
12	. . .	+ 1·122	. . .	. .	.	.		+ 1·122	1·259	293 46 20·2
	− 0·001	0·000	0·000	0·000	0·000	0·000	0·000	− 0·001	25·210	

Vergleicht man jetzt die ausgeglichenen Richtungen, so sieht man, daß zwischen den zugeordneten Richtungen im Hin- und Hergange vollkommene Übereinstimmung stattfindet.

Mittlerer Fehler einer Richtungsbeobachtung

$$\mu_r = \sqrt{\frac{26{\cdot}210}{7}} = \pm 1''93.$$

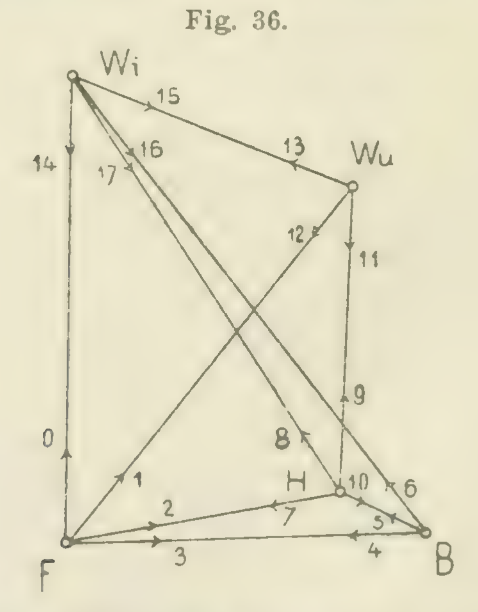
Ausgeglichene Winkel:

[2] — [3] =	38° 52′ 22″4	[1] — [3] =	44° 34′ 00″3
[4] — [6] =	61 46 29·9	[4] — [5] =	38 02 08·0
[7] — [8] =	79 21 07·7	[11] — [12] =	97 23 51·7
	180 00 00·0		180 00 00·0
[1] — [2] =	5° 41′ 37″9	[5] — [6] =	23° 44′ 21″9
[8] — [9] =	12 29 25·2	[7] — [9] =	91 50 32·9
[10] — [12] =	161 48 56·9	[10] — [11] =	64 25 05·2
	180 00 00·0		180 00 00·0.

§ 34. Ausgleichung eines Fünfecks.

K. F. Gauß hat bei der hannoverschen Gradmessung (Supplem. theor. comb. 1826) folgende, auf den einzelnen Stationen unter sich

Fig. 36.



bereits ausgeglichene Ergebnisse erhalten, deren Angaben als unmittelbare Richtungsbeobachtungen zu betrachten sind, die sich auf die mit den Meridianlinien der Stationen zusammenfallenden Nullrichtungen beziehen und daher die Richtungswinkel der betreffenden Visuren näherungsweise bezeichnen (Fig. 36)

Station Falkenberg = F.		Station Hauselberg = H.	
0. Wilsede	187° 47′ 30″311	7. Falkenberg. .	86° 29′ 06″872
1. Wulfsode . . .	225 09 39·676	8. Wilsede	154 37 09·624
2. Hauselberg . .	266 13 56·239	9. Wulfsode . .	189 02 56·376
3. Breithorn . .	274 14 43·634	10. Breithorn . .	302 47 37·732

Station Breithorn = B.		Station Wulfsode = Wu.	
4. Falkenberg . .	94° 33′ 40″755	11. Hauselberg .	9° 05′ 36″593
5. Hauselberg . .	122 51 23·054	12. Falkenberg .	45 27 33·556
6. Wilsede . .	150 18 35·100	13. Wilsede . . .	118 44 13·159

Station Wilsede = Wi.

14. Falkenberg	7° 51′ 01″027
15. Wulfsode	298 29 49·519
16. Breithorn	330 03 07·392
17. Hauselberg . . .	334 25 26·746.

Als Basis dient die Seite zwischen den Stationen Wilsede und Wulfsode von 22877·94 m Länge.

Mit den obigen Beobachtungen lassen sich im ganzen 7 Dreiecke bilden, aber davon sind nur 5 von einander unabhängig, und zwar wurden von Gauß folgende Dreiecke gewählt:

I	F	8° 00′ 47″395	+ (3) — (2)
	B	28 17 42·299	+ (5) — (4)
	H	143 41 29·140	+ (7) — (10)
	Summe =	179 59 58·834	
	180° — Exzeß =	180 00 00·202	
	Widerspruch w_1 =	— 1·368	
II	F	41° 04′ 16″563	+ (2) — (1)
	H	102 33 49·504	+ (9) — (7)
	Wu . . .	36 21 56·963	+ (12) — (11)
		180 00 03·030	
		180 00 01·257	
	w_2 =	— 1·773	
III	F	78° 26′ 25″928	+ (2) — (0)
	H	68 08 02·752	+ (8) — (7)
	Wi . . .	33 25 34·281	+ (14) — (17)
		180 00 02·961	
		180 00 01·919	
	w_3 =	— 1·042	

$$
\text{IV}\left\{\begin{array}{lrrrl}
B \;.\;.\;.\;. & 27^0 & 27' & 12''046 & +\ (6) -\ (5)\\
H \;.\;.\;.\;. & 148 & 10 & 28{\cdot}108 & -(10) -\ (8)\\
Wi \;.\;.\;. & 4 & 22 & 19{\cdot}354 & +(17) - (16)\\
\hline
 & 179 & 59 & 59{\cdot}508 & \\
 & 180 & 00 & 00{\cdot}321 & \\
\hline
 & w_4 = & & -0{\cdot}813 &
\end{array}\right.
$$

$$
\text{V}\left\{\begin{array}{lrrrl}
H \;.\;.\;.\;. & 34^0 & 25' & 46''752 & +\ (9) -\ (8)\\
Wu \;.\;.\;. & 109 & 38 & 36{\cdot}566 & +(13) - (11)\\
Wi \;.\;.\;. & 35 & 55 & 37{\cdot}227 & +(17) - (15)\\
\hline
 & 180 & 00 & 00{\cdot}545 & \\
 & 180 & 00 & 01{\cdot}295 & \\
\hline
 & w_5 = & & -0{\cdot}750. &
\end{array}\right.
$$

Bezeichnet man die den Richtungen 0, 1, 2, . . . zukommenden Verbesserungen, wie bereits oben angedeutet, mit (0), (1), (2), . . ., so erhält man folgende 5 Winkelgleichungen:

$$
\begin{array}{l}
-(2)+(3)-\ (4)+\ (5)+\ (7)-(10)-1{\cdot}368=0\\
-(1)+(2)-\ (7)+\ (9)-(11)+(12)+1{\cdot}773=0\\
-(0)+(2)-\ (7)+\ (8)+(14)-(17)+1{\cdot}042=0\\
-(5)+(6)-\ (8)+(10)-(16)+(17)-0{\cdot}813=0\\
-(8)+(9)-(11)+(13)-(15)+(17)-0{\cdot}750=0.
\end{array}
$$

Da die Summe der notwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen

$$W+S=2\,L-3\,P+4=2\,.\,9-3\,.\,5+4=7$$

und $W=5$ ist, so muß $S=2$ sein, d. h. von den 8 im Dreiecksnetze aufstellbaren Seitengleichungen sind nur 2 voneinander unabhängig. Die von Gauß gewählten Seitengleichungen sind:

$$\frac{H\,Wi}{HB}\cdot\frac{HB}{HF}\cdot\frac{HF}{H\,Wi}=\frac{\sin(H\,B\,Wi)\sin(H\,F\,B)\sin(H\,Wi\,F)}{\sin(B\,Wi\,H)\sin(F\,B\,H)\sin(Wi\,F\,H)}=1$$

$$\frac{H\,Wu}{HF}\cdot\frac{HF}{H\,Wi}\cdot\frac{H\,Wi}{H\,Wu}=\frac{\sin(Wu\,F\,H)\sin(H\,Wi\,F)\sin(H\,Wu\,Wi)}{\sin(H\,Wu\,F)\sin(Wi\,F\,H)\sin(Wu\,Wi\,H)}=1$$

oder logarithmiert und in Einheiten der siebenten Logarithmenstelle ausgedrückt:

$$+4{\cdot}3\,(0)-153{\cdot}9\,(2)+149{\cdot}6\,(3)+39{\cdot}1\ (4)-79{\cdot}6\ (5)+40{\cdot}5\,(6)+$$
$$+31{\cdot}9\,(14)+275{\cdot}4\,(16)-307{\cdot}3\,(17)+25=0$$

$$+4{\cdot}3\,(0)-\ 24{\cdot}2\,(1)+\ 19{\cdot}9\,(2)+36{\cdot}1\,(11)-28{\cdot}6\,(12)-7{\cdot}5\,(13)+$$
$$+31{\cdot}9\,(14)+\ 29{\cdot}1\,(15)-\ 61{\cdot}0\,(17)\ -3=0$$

Vergleicht man die Winkelgleichungen mit den Seitengleichungen, so bemerkt man, daß die Koeffizienten der ersteren um vieles kleiner sind als die der Seitengleichungen. Wollte man in dieser Form alle Bedingungsgleichungen zur Bildung der Normalgleichungen für die Korrelaten heranziehen, so würden die Korrelaten zu ungleiche Werte ergeben. Damit dies nicht eintrete, kann man die Seitengleichungen durch eine einfache konstante Zahl dividieren oder die Winkelgleichungen mit einer Konstanten multiplizieren. Multipliziert man die letzteren mit 100, so erhält man folgende, von Helmert an zwei Stellen verbesserte Normalgleichungen:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	
+ 60000	− 20000	− 20000	− 20000	0	+ 18480	− 1990	− 136·8 = 0
	+ 60000	+ 20000	. . .	+ 20000	− 15390	− 2060	+ 177·3
		+ 60000	− 20000	− 20000	+ 18100	+ 10850	+ 104·2
			+ 60000	+ 20000	− 46260	− 6100	− 81·3
				+ 60000	− 30730	− 13370	− 75·0
					+ 226884	+ 16719	+ 25·0
						+ 8763	− 3·0.

Die reduzierten Normalgleichungen lauten:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	
1	− 0·33333	− 0·33333	− 0·33333	. . . . .	+ 0·30800	− 0·03317	− 0·002280 = 0
	1	+ 0·25000	− 0·12500	+ 0·37500	− 0·17306	− 0·05106	+ 0·002469 = 0
		1	− 0·50000	− 0·50000	+ 0·53136	+ 0·21736	+ 0·000514 = 0
			1	+ 0·25000	− 0·69925	− 0·04173	− 0·002440 = 0
				1	− 0·18646	− 0·17528	− 0·002325 = 0
					1	+ 0·04716	− 0·000045 = 0
						1	− 0·005491 = 0.

Die Auflösung gibt:

$k_1 = + 0{\cdot}00225$ $\qquad$ $k_5 = + 0{\cdot}00324$

$k_2 = - 0{\cdot}00344$ $\qquad$ $k_6 = - 0{\cdot}00021$

$k_3 = + 0{\cdot}00088$ $\qquad$ $k_7 = + 0{\cdot}00549.$

$k_4 = + 0{\cdot}00171$

Diese Werte, in die Korrelatengleichungen eingesetzt, ergeben z. B. für die Station Falkenberg folgende Richtungsverbesserungen:

$(0) = - 100\,k_3 + 4{\cdot}3\,k_6 + 4{\cdot}3\,k_7 = - 0''065$

$(1) = - 100\,k_2 - 24{\cdot}2\,k_7 = + 0''213$

$(2) = - 100\,k_1 + 100\,k_2 + 100\,k_3 - 153{\cdot}9\,k_6 + 19{\cdot}9\,k_7 = - 0''339$

$(3) = + 100\,k_1 + 149{\cdot}6\,k_6 = + 0''193$

und weiterhin:

$(4) = - 0''233$	$(9) = - 0''021$	$(14) = - 0''256$
$(5) = + 0{\cdot}070$	$(10) = - 0{\cdot}053$	$(15) = - 0{\cdot}164$
$(6) = + 0{\cdot}163$	$(11) = + 0{\cdot}219$	$(16) = - 0{\cdot}230$
$(7) = - 0{\cdot}481$	$(12) = - 0{\cdot}502$	$(17) = 0{\cdot}148$
$(8) = - 0{\cdot}407$	$(13) = - 0{\cdot}282$	

$$[v\,v] = 1{\cdot}2303, \quad \mu = \sqrt{\frac{1{\cdot}2303}{7}} = \pm\, 0''{\cdot}419.$$

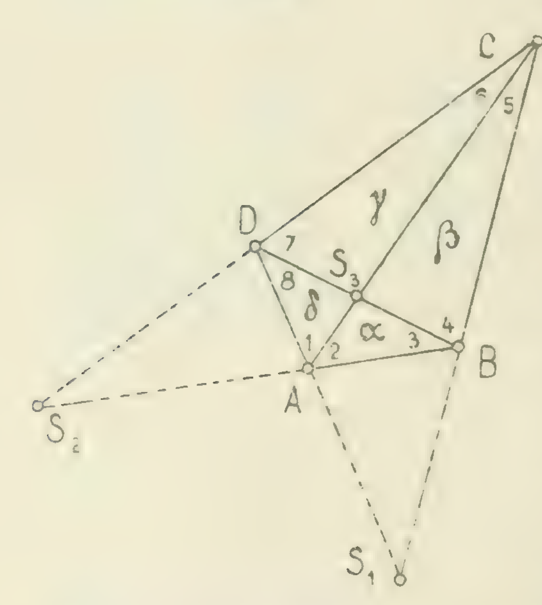
Mit den verbesserten Richtungswinkeln ergeben sich schließlich die acht widerspruchsfreien Dreiecksseiten, deren Logarithmen wie folgt lauten:

$log\ F\,Wi = 4{\cdot}557\,4997$	$log\ H\,Wi = 4{\cdot}581\,0262$
$log\ F\,Wu = 4{\cdot}547\,4352$	$log\ H\,Wu = 4{\cdot}375\,5218$
$log\ F\,H = 4{\cdot}330\,9672$	$log\ B\,Wi = 4{\cdot}639\,3859$
$log\ F\,B = 4{\cdot}427\,5949$	$log\ B\,H = 3{\cdot}799\,4480.$

§ 35. Die günstigste Seitengleichung bei einem Viereck.

Behufs bequemer Aufsuchung und Aufstellung der Seitengleichungen eines Dreiecksnetzes betrachtet man solche Netzteile desselben, welche erstens nur eine einzige überschüssige Linie enthalten, also nur eine einzige unabhängige Seitengleichung zu erfüllen haben, und welche zweitens mindestens einen Punkt enthalten, der mit den übrigen Punkten des in Betracht gezogenen Netzteiles durch Linien verbunden ist. Ein solches System von Dreiecken nennt man ein Zentralsystem und die gemeinsame Spitze desselben heißt der Zentralpunkt.

Fig. 37.



In einem Vierecke mit beobachteten Diagonalen gilt jeder der vier Eckpunkte als Zentralpunkt. Es kann aber auch der Schnittpunkt zweier gegenüberliegender Vierecksseiten, deren es zwei gibt, S_1 und S_2 in Fig. 37, sowie der Schnittpunkt S_3 der beiden Diagonalen als Zentralpunkt gewählt werden, so daß man in einem Vierecke mit Diagonalschnitt im Inneren desselben im ganzen 7 Formen von Seitengleichungen, und zwar die auf die 4 Eckpunkte bezogenen 4 Formen mit 6 Gliedern und die übrigen 3 Formen mit 8 Gliedern aufstellen kann. Es entsprechen z. B. den Zentralpunkten A und S_3 folgende Seitengleichungen:

$$A: \quad \frac{AB}{AC}\cdot\frac{AC}{AD}\cdot\frac{AD}{AB} = \frac{sin(5)\,sin\,(7+8)\,sin(3)}{sin\,(3-4)\,sin(6)\,sin(8)} = 1$$

$$S_3: \quad \frac{S_3A}{S_3B}\cdot\frac{S_3B}{S_3C}\cdot\frac{S_3C}{S_3D}\cdot\frac{S_3D}{S_3A} = \frac{sin\,(1)\,sin\,(3)\,sin\,(5)\,sin\,(7)}{sin\,(2)\,sin\,(4)\,sin\,(6)\,sin\,(8)} = 1.$$

In der ursprünglichen Form, in der sie die Seitenbedingungen in vollkommener Strenge zum Ausdruck bringen, sind alle Seitengleichungen auch gleichwertig, denn es liegt kein Grund vor, einer vor den anderen einen Vorzug einzuräumen. Sobald man aber die Seitengleichungen durch Logarithmieren umbildet und durch Entnahme der logarithmischen Differenzen der Sinus für 1" aus den Logarithmentafeln in linearer Form in Rechnung stellt, können die einzuführenden Bedingungen mit verschiedener Schärfe dargestellt werden, da nunmehr die Seitengleichungen nicht in ihrer ursprünglich exakten Form, sondern mit einer gewissen Näherung zur Anwendung gelangen; es ist dann nicht mehr gleichgültig, welche von ihnen zur Auswahl kommen.

Da man die Seitengleichungen in einem Dreiecksnetze in den meisten Fällen auf ein Viereck beziehen kann, so sei die Aufstellung der Regeln, nach welchen die günstigste Seitengleichung aufgesucht wird, für das Viereck durchgeführt.

Zunächst sei bemerkt, daß den achtgliedrigen Seitengleichungen, auf die zum ersten Male Jordan (1880) hingewiesen hat, trotz ihrer etwas größeren Schärfe in der Zahlenrechnung die sechsgliedrigen Gleichungen in der Praxis vorzuziehen sind, weil sie bedeutend weniger Arbeit verursachen. Von den gleichberechtigten 4 sechsgliedrigen Seitengleichungen aber bietet jede dieselbe numerische Rechenarbeit, und wenn alle Beobachtungen fehlerfrei wären, so müßte es auch einerlei sein, welche Seitengleichung gewählt wird. Bei fehlerhaften Beobachtungen ist es jedoch nicht gleichgültig, welche Seitengleichung eingestellt wird.

Die günstigste Seitengleichung ist entschieden diejenige, welche die spitzesten Winkel enthält, weil darin die Winkeländerungen von den Sinusfunktionen am schärfsten empfunden werden. Seyfert gibt hiefür in der Zeitschrift für Vermessungswesen, 1894, S. 379 folgende recht verständliche Erklärung: „Die als Maßstab der Verteilung dienenden logarithmischen Differenzen d sind selbst mit Fehlern behaftet, welche bis zur halben Einheit der letzten logarithmischen Stelle gehen können. Der größte Fehler, der demnach bei Verteilung des Widerspruchs W gemacht werden kann, ist $\frac{W}{2\,|d|}$. Hieraus geht hervor, daß die Seitengleichungen mit kleineren Winkeln eine genauere Verteilung der Widersprüche gestatten, als die mit größeren, da den kleineren Winkeln ein größeres d entspricht und umgekehrt."

Wie die günstigste Seitengleichung erkannt wird, hat General Zachariae in der „Dänischen Gradmessung" in folgender Weise angegeben:

Aus der Seitengleichung für den Zentralpunkt A ist zu ersehen, daß für eine sechsgliedrige Seitengleichung nur fünf gemessene Winkel notwendig sind, da der sechste darin enthaltene Winkel durch die betreffende Summenprobe erhalten wird. Wenn z. B. die fünf Winkel (3), (4), (6), (7), (8) gemessen sind (Fig. 38), so lautet die Seitengleichung für den Zentralpunkt A:

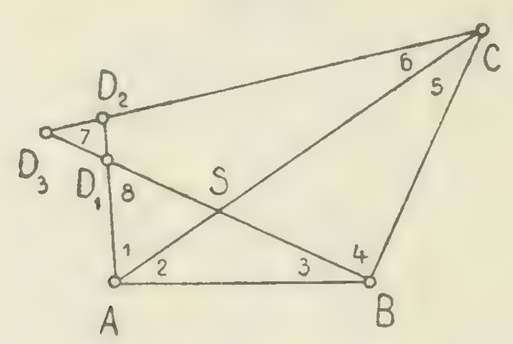
$$\frac{\sin(4+6+7)\sin(7+8)\sin(3)}{\sin(3+4)\sin(6)\sin(8)} = 1;$$

sind aber die fünf Winkel (1), (2), (5), (6), (8) gemessen worden, so hat man:

$$\frac{\sin(1+2+8)\sin(5)\sin(1+6)}{\sin(6)\sin(8)\sin(2+5)} = 1.$$

Diese Seitenbedingungsgleichung wird aber infolge der Beobachtungsfehler im allgemeinen nicht erfüllt sein, was geometrisch

Fig. 38.



dadurch zum Ausdruck kommt, daß an irgend einer Ecke, z. B. bei D, ein fehlerzeigendes Dreieck D_1 D_2 D_3 entsteht, und analytisch dadurch ausgedrückt wird, daß das obige Sinusverhältnis nicht der Einheit gleichkommt, so daß mit Hinweis auf die Fig. 38 in Wirklichkeit folgende Gleichung bestehen wird:

$$\frac{\sin(1+2+8)\sin(5)\sin(1+6)}{\sin(6)\sin(8)\sin(2+5)} = \frac{A\,D_1}{A\,D_2} = \frac{A\,D_2 - D_1\,D_2}{A\,D_2} = 1 - \frac{D_1\,D_2}{A\,D_2}.$$

Nimmt man diese Gleichung logarithmisch, so ergibt sich auf der rechten Seite, wenn man nach dem Taylorschen Satze entwickelt, anstatt $\log 1 = 0$ der durch die Beobachtungsfehler herbeigeführte Widerspruch

$$\log\left(1 - \frac{D_1\,D_2}{A\,D_2}\right) = -M\,\frac{D_1\,D_2}{A\,D_2},$$

wobei $M = 0{\cdot}43429$ den Modul des Briggsschen Logarithmensystems bedeutet. Da dieser Widerspruch als absolutes Glied der durch die Logarithmierung linear gemachten Seitengleichung auftritt, für die

Schärfe der logarithmischen Rechnung also nur die Größe des absoluten Gliedes ausschlaggebend ist, weil die Koeffizienten der Winkelkorrektionen unter Zugrundelegung irgend einer Seitengleichung gleich scharf erhalten werden können*), so erkennt man, daß der Ausdruck $- M \frac{D_1 D_2}{A D_2}$, oder wenn man im Nenner mit erlaubter Annäherung AD statt AD_2 setzt, das Verhältnis $\frac{D_1 D_2}{AD}$ als ein Maß für die Rechenschärfe zu betrachten ist. Macht man dieselbe Untersuchung für den Zentralpunkt C, so lautet das betreffende Maßverhältnis $\frac{D_2 D_3}{CD}$. Folglich verhalten sich die absoluten Glieder für die Annahmen A oder C als Zentralpunkte wie $\frac{D_1 D_2}{AD} : \frac{D_2 D_3}{CD}$ oder, da $\frac{D_1 D_2}{D_2 D_3} = \frac{sin(7)}{sin(8)}$ und $\frac{CD\, sin(7)}{AD\, sin(8)} = \frac{CS}{AS}$ ist, wie $CS : AS$.

Wenn man solche Vergleichungen für alle Zentralpunkte anstellt, so wird derjenige als der günstigste erscheinen, für welchen dieses Verhältnis gegenüber den übrigen Punkten im Sinne des folgenden Beispieles günstiger ausfällt. Angesichts der Fig. 37 stellt sich die Untersuchung wie folgt:

A	ist günstiger als	C,	weil	$AS_1 < CS_1$
A	" " "	B,	"	$AS_2 < BS_2$
A	" " "	D,	"	$AS_1 < DS_1$
B	" " "	C,	"	$BS_1 < CS_1$
B	" " "	D,	"	$BS_2 < DS_2$
D	" " "	C,	"	$DS_2 < CS_2$.

Es stellt sich also heraus, daß A der günstigste Zentralpunkt ist. Jordan hat erkannt, daß diese Abstandvergleichung durch eine Flächenvergleichung ersetzt werden kann. Es ist nämlich das Verhältnis der Absolutglieder

$$\frac{CS}{AS} = \frac{\Delta BDC}{\Delta ABD},$$

folglich können die Flächen derjenigen Dreiecke, welchen der jeweilige Zentralpunkt nicht angehört, also von den drei anderen Eckpunkten gebildet werden, als ein Maß für die Rechenschärfe oder für die Günstigkeit dienen. Es entsprechen den Zentralpunkten

*) Vgl. Helmert: Ausgleichungsrechnung, 1907, S. 519, Fußnote.

A die Fläche $\beta + \gamma$
B „ „ $\gamma + \delta$
C „ „ $\alpha + \delta$
D „ „ $\alpha + \beta$.

In der Fig. 37 besitzt das Dreieck $\varDelta BCD = \beta + \gamma$ die größte Fläche, folglich ist der Punkt A, welcher diesem Dreieck nicht angehört, der günstigste Zentralpunkt.

Anmerkung (vgl. S. 148).

Sind in einem Viereck mit beobachteten Diagonalen alle acht Winkel beziehungsweise die betreffenden zwölf Richtungen gemessen, so daß man vier Dreiecksgleichungen aufstellen kann, wovon jedoch eine überflüssig ist, so kann man sich von der Wahl, welche drei Gleichungen von den vier gleichberechtigten Dreiecksgleichungen als Winkelbedingungsgleichungen genommen werden sollen, unabhängig machen, wenn man drei Vierecksgleichungen bildet, welche alle vier Dreiecksgleichungen in sich enthalten, derart, daß diese von selbst auf 180° schließen, sobald die drei Vierecksgleichungen auf 360° beziehungsweise auf 0° schließen.

Betrachtet man in dem Beispiele des § 33 das volle Umfangsviereck $ABCDA$ und die beiden sogenannten „verschränkten" Vierecke $ACBDA$ und $ABDCA$, so entsprechen denselben die drei unabhängigen Winkelgleichungen

$$-v_1 - v_3 - v_4 - v_6 - v_7 - v_9 - v_{10} + v_{12} - 5{\cdot}6 = 0$$
$$-v_1 + v_2 - v_5 - v_6 + v_7 - v_8 - v_{11} - v_{12} + 4{\cdot}3 = 0$$
$$-v_2 - v_3 - v_4 + v_5 + v_8 - v_9 - v_{10} - v_{11} - 6{\cdot}5 = 0,$$

die in Verbindung mit der günstigen Seitengleichung S. 145 die vier notwendigen Bedingungsgleichungen geben, welche nach Angabe Jordans*) nicht nur eine bequemere, sondern auch eine schärfere Rechnung gestatten, als bei Anwendung von Dreiecksgleichungen.

§ 36. Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.

Neben den bisher betrachteten Formen von Ausgleichungsaufgaben über direkte, vermittelnde und bedingte Beobachtungen gibt es noch das Problem der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen, welches namentlich für ausgedehnte, im Zusammenhange durchzuführende Triangulierungsausgleichungen in der höheren Geodäsie Anwendung findet. Diese von Gauß unberücksichtigt gelassene Aufgabe wurde zuerst von

*) Jordan-Eggert: Handbuch der Vermessungskunde, I. Bd., 6. Aufl. § 77.

Hansen (1831) in den „Astronom. Nachrichten", dann von Bessel (1838) anläßlich der „Gradmessung in Ostpreußen" gelöst, ohne jedoch hiebei auf Genauigkeitsuntersuchungen einzugehen. Nach dieser Richtung hin wurde sie zuerst von Zech (1857) behandelt und hierauf von Andrae (1867), Hansen (1868), Helmert (1872) und Jordan (1886) weiter ausgebildet.

Damit ein Dreiecksnetz eine mathematisch mögliche Figur bilde, genügt es nicht, die Winkel oder Richtungen in jeder Beobachtungsstation für sich allein auszugleichen, es ist vielmehr, da jede Winkel- oder Richtungsänderung in einer Station auch auf die Winkel beziehungsweise Richtungen der übrigen Stationen ihren Einfluß üben, notwendig, die Winkel im ganzen Dreiecksnetze im Zusammenhange oder gleichzeitig auszugleichen. Diese Aufgabe kann mit Hilfe des „Satzes von der Bestimmung des Minimums einer Funktion mit Nebenbedingungen" gelöst werden.

Gegeben sei eine Funktion

$$U = f(x, y, z, \ldots) \tag{1}$$

mit n Unbekannten $x, y, z, \ldots$, welche von den streng zu erfüllenden r Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x, y, z, \ldots) = 0 \\ \psi(x, y, z, \ldots) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{2}$$

abhängig seien, wobei $n > r$ sein soll. Damit die Funktion U ein Minimum werde, muß das totale Differential von U gleich Null sein. Man hat also zu setzen:

$$dU = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \ldots = 0. \tag{3}$$

Wenn dU gleich Null sein soll, so müßten ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen (2) die n partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \ldots$ einzeln gleich Null gesetzt werden. Da aber die Unbekannten nicht unabhängig voneinander sind, so darf dies nicht ohne weiteres geschehen. Die Bedingungsgleichungen verlangen nämlich, daß auch folgende, durch Differentiation entstehende Gleichungen erfüllt werden:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \ldots = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{4}$$

Da diese Gleichungen in der Anzahl r vorkommen, so lassen sich damit von den u Differentialen dx, dy, dz, . . . r Differentiale eliminieren, so daß dann nur noch $u - r$ Unbekannte übrig bleiben. Diese zurückbleibenden Unbekannten sind aber nunmehr unabhängig voneinander und es können daher die Koeffizienten derselben gleich Null gesetzt werden.

Dieses Eliminationsverfahren ist nur dann zu empfehlen, wenn die Anzahl der vorliegenden Bedingungsgleichungen gering ist. Für umfangreichere Triangulierungsausgleichungen ist es vorteilhafter, sich der Gaußschen Korrelatenmethode zu bedienen. Hiebei ist folgender Vorgang einzuschlagen. Man multipliziere die Gleichungen (4) der Reihe nach mit den vorläufig noch unbestimmten Korrelaten k_1, k_2, . . . und addiere sie zu (3):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \cdots\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \cdots\right) dy +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial z} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial z} + \cdots\right) dz + \cdots = 0.$$

Nun setze man die Koeffizienten der Differentiale dx, dy, dz, . . . gleich Null:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \cdots = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \cdots = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial z} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial z} + \cdots = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

In diesen u Gleichungen (5) erscheinen die r neu eingeführten Unbekannten k_1, k_2, . . .; die r Bedingungsgleichungen (2) enthalten die u Unbekannten x, y, z, . . ., zusammen stehen also zur Bestimmung der $u + r$ Unbekannten ebenso viele Gleichungen zur Verfügung, so daß die Aufgabe im Prinzip gelöst erscheint. Bildet man also aus den Gleichungen (1) und (2) die neue Funktion

$$U' = U + k_1 \varphi(x, y, z, \ldots) + k_2 \psi(x, y, z, \ldots) + \cdots$$

und bestimmt davon das absolute Minimum, indem das totale Differential von U' gleich Null gesetzt wird, so erhält man zunächst:

$$dU' = 0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \cdots\right) dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial y} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \cdots\right) dy +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial z} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial z} + \cdots\right) dz + \cdots$$

und da dW nur dann Null werden kann, wenn die Koeffizienten von dx, dy, dz, . . . gleich Null sind, so kommt man wieder auf die Gleichungen (5).

Indem wir uns nach dieser allgemeinen Erörterung der zusammenhängenden Ausgleichung eines Dreiecksnetzes nach dem Besselschen Verfahren zuwenden, gehen wir von den zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte A, B, C (beziehungsweise der wahrscheinlichsten Verbesserungen der angenommenen Näherungswerte) der auf einer einzelnen Station angestellten Richtungsbeobachtungen dienenden Normalgleichungen aus, welche allgemein lauten:

$$\left.\begin{array}{l}[aa]\,A + [ab]\,B + [ac]\,C + \cdots = [al] \\ \qquad\quad [bb] \quad + [bc] \quad + \cdots = [bl] \\ \qquad\qquad\qquad + [cc] \quad + \cdots = [cl]\end{array}\right\} \qquad (6)$$

Die vor der Netzausgleichung daraus ermittelten Unbekannten einer jeden einzelnen Station sind dann so ausgeglichen, wie wenn sie unabhängig von den auf anderen Stationen gemachten Beobachtungen wären.

Da aber durch die Verbindung der einzelnen Stationen zu einem Dreiecksnetze zwischen den Beobachtungen der verschiedenen Stationen Bedingungsgleichungen — welche Winkel- oder Seitengleichungen sein können — zu erfüllen sind, so müssen die wahrscheinlichsten Richtungen sämtlicher Stationen unter der Einschränkung bestimmt werden, daß die Summe der Quadrate der scheinbaren Richtungsfehler auf sämtlichen Stationen ein Minimum und gleichzeitig den vorhandenen Bedingungsgleichungen entsprochen werde.

Hat man also die auf den einzelnen Stationen 1, 2, 3, . . . beobachteten Richtungen

$$\begin{array}{ll} 1: & a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ \ldots \\ 2: & a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2,\ \ldots \\ 3: & a_3,\ b_3,\ c_3,\ d_3,\ \ldots \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

unter sich, d. h. unabhängig von den Richtungen anderer Stationen, ausgeglichen und hiefür die vorläufig stationsweise ausgeglichenen Ergebnisse

$$\begin{array}{ll} 1: & A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ \ldots \\ 2: & A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2,\ \ldots \\ 3: & A_3,\ B_3,\ C_3,\ D_3,\ \ldots \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

erhalten, so verlangt die Ausgleichung im Zusammenhange an den vorläufigen Ausgleichungsresultaten neue Korrektionen. Bezeichnet man sie mit

$$\begin{array}{ll} 1: & \Delta A_1,\ \Delta B_1,\ \Delta C_1,\ \Delta D_1,\ \ldots \\ 2: & \Delta A_2,\ \Delta B_2,\ \Delta C_2,\ \Delta D_2,\ \ldots \\ 3: & \Delta A_3,\ \Delta B_3,\ \Delta C_3,\ \Delta D_3,\ \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

so lauten die endgültig ausgeglichenen Werte:

$$\begin{array}{ll} 1: & A_1 + \Delta A_1,\ B_1 + \Delta B_1,\ C_1 + \Delta C_1,\ \ldots \\ 2: & A_2 + \Delta A_2,\ B_2 + \Delta B_2,\ C_2 + \Delta C_2,\ \ldots \\ 3: & A_3 + \Delta A_3,\ B_3 + \Delta B_3,\ C_3 + \Delta C_3,\ \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Die in einem Dreiecksnetze vorkommenden Bedingungsgleichungen haben demnach die allgemeine Form

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{A} + \mathfrak{a}_1 . \Delta A_1 + \mathfrak{a}_2 . \Delta B_1 + \mathfrak{a}_3 . \Delta C_1 + \mathfrak{a}_4 . \Delta D_1 + \mathfrak{a}_5 . \Delta A_2 + \mathfrak{a}_6 . \Delta B_2 + \cdots \\ 0 &= \mathfrak{B} + \mathfrak{b}_1 . \Delta A_1 + \mathfrak{b}_2 . \Delta B_1 + \mathfrak{b}_3 . \Delta C_1 + \mathfrak{b}_4 . \Delta A_2 + \mathfrak{b}_5 . \Delta B_2 + \mathfrak{b}_6 . \Delta A_3 + \cdots \\ 0 &= \mathfrak{C} + \mathfrak{c}_1 . \Delta A_1 + \mathfrak{c}_2 . \Delta B_1 + \mathfrak{c}_3 . \Delta C_1 + \mathfrak{c}_4 . \Delta A_2 + \mathfrak{c}_5 . \Delta A_3 + \cdots, \end{aligned}$$

wobei der Index die Nummer der Station anzeigt. Da die scheinbaren Fehler die allgemeine Form

$$v_i = p_i - (P_i + \Delta P_i)$$

besitzen, so lautet die Funktion U, welche unter Berücksichtigung der obigen Bedingungsgleichungen zu einem Minimum gemacht werden soll, wenn der Einfachheit wegen die Ausgangslesungen als Nullrichtungen gewählt werden:

$$\begin{aligned} U = \{a_1 - (A_1 + \Delta A_1)\}^2 + \{b_1 - (B_1 + \Delta B_1)\}^2 + & \\ + \{c_1 - (C_1 + \Delta C_1)\}^2 + \cdots & \quad \text{1. Station,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ + \{a_2 - (A_2 + \Delta A_2)\}^2 + \{b_2 - (B_2 + \Delta B_2)\}^2 + & \\ + \{c_2 - (C_2 + \Delta C_2)\}^2 + \cdots & \quad \text{2. Station,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ + \{a_3 - (A_3 + \Delta A_3)\}^2 + \{b_3 - (B_3 + \Delta B_3)\}^2 + & \\ + \{c_3 - (C_3 + \Delta C_3)\}^2 + \cdots & \quad \text{3. Station.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

Addiert man die der Reihe nach mit den vorläufig noch unbestimmt gelassenen Korrelaten $k_1, k_2, k_3, \ldots$ multiplizierten Bedingungsgleichungen zu der Funktion U, welche die Fehlerquadratsumme darstellt, so erhält man die neue Funktion U', welche nunmehr ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen zu einem Minimum gemacht werden darf. Es ist

$$U' = U - k_1(\mathfrak{A} + \mathfrak{a}_1 . \Delta A_1 + \mathfrak{a}_2 . \Delta B_1 + \mathfrak{a}_3 . \Delta C_1 + \mathfrak{a}_4 . \Delta D_1 + \mathfrak{a}_5 . \Delta A_2 + \mathfrak{a}_6 . \Delta B_2 + \ldots)$$
$$+ k_2(\mathfrak{B} - \mathfrak{b}_1 . \Delta A_1 - \mathfrak{b}_2 . \Delta B_1 - \mathfrak{b}_3 . \Delta C_1 + \mathfrak{b}_4 . \Delta A_4 - \mathfrak{b}_5 . \Delta B_4 + \mathfrak{b}_6 . \Delta A_6 + \ldots)$$
$$- k_3(\mathfrak{C} + \mathfrak{c}_1 . \Delta A_1 + \mathfrak{c}_2 . \Delta B_1 - \mathfrak{c}_3 . \Delta C_1 - \mathfrak{c}_4 . \Delta A_4 + \mathfrak{c}_5 . \Delta A_5 + \ldots)$$

Damit U' ein Minimum werde, sind die partiellen Differentialquotienten dieser Funktion nach allen Unbekannten gleich Null zu setzen.

$$\frac{\partial U'}{\partial . \Delta A_1} = 0 = \frac{\partial U}{\partial . \Delta A_1} - k_1 \frac{\partial(\mathfrak{A} + \ldots)}{\partial . \Delta A_1} + k_2 \frac{\partial(\mathfrak{B} + \ldots)}{\partial . \Delta A_1} - k_3 \frac{\partial(\mathfrak{C} + \ldots)}{\partial . \Delta A_1} + \ldots$$

$$\frac{\partial U'}{\partial . \Delta B_1} = 0 = \frac{\partial U}{\partial . \Delta B_1} - k_1 \frac{\partial(\mathfrak{A} + \ldots)}{\partial . \Delta B_1} + k_2 \frac{\partial(\mathfrak{B} + \ldots)}{\partial . \Delta B_1} - k_3 \frac{\partial(\mathfrak{C} + \ldots)}{\partial . \Delta B_1} + \ldots$$

$$\frac{\partial U'}{\partial . \Delta C_1} = 0 = \frac{\partial U}{\partial . \Delta C_1} - k_1 \frac{\partial(\mathfrak{A} + \ldots)}{\partial . \Delta C_1} + k_2 \frac{\partial(\mathfrak{B} + \ldots)}{\partial . \Delta C_1} - k_3 \frac{\partial(\mathfrak{C} + \ldots)}{\partial . \Delta C_1} + \ldots$$

$$\frac{\partial U'}{\partial . \Delta D_1} = 0 = \frac{\partial U}{\partial . \Delta D_1} - k_1 \frac{\partial(\mathfrak{A} + \ldots)}{\partial . \Delta D_1} + \ldots$$

$$\frac{\partial U'}{\partial . \Delta A_2} = 0 = \frac{\partial U}{\partial . \Delta A_2} - k_1 \frac{\partial(\mathfrak{A} + \ldots)}{\partial . \Delta A_2} + \ldots$$

$$\frac{\partial U'}{\partial . \Delta B_2} = 0 = \frac{\partial U}{\partial . \Delta B_2} - k_1 \frac{\partial(\mathfrak{A} + \ldots)}{\partial . \Delta B_2} + \ldots$$

usw.

Hievon sind die Differentialquotienten

$$\frac{\partial U}{\partial . \Delta A_1}, \quad \frac{\partial U}{\partial . \Delta B_1}, \quad \frac{\partial U}{\partial . \Delta C_1}, \ldots$$

nichts anderes, als die auf die Stationsausgleichungen bezogenen Normalgleichungsausdrücke (6), wenn in denselben anstatt A, B, $C \ldots$ die Werte $(A_1 + \Delta A_1)$, $(B_1 + \Delta B_1)$, $(C_1 + \Delta C_1), \ldots$ gesetzt werden; folglich kann man auch schreiben, wenn die Nummern der Stationen durch Indizes bezeichnet werden,

$$\frac{\partial U'}{\partial . \Delta A_1} = 0 = [aa]_1 (A_1 + \Delta A_1) - [ab]_1 (B_1 + \Delta B_1) -$$
$$[ac]_1 (C_1 + \Delta C_1) \ldots [illegible] [al]_1 - \mathfrak{a}_1 k_1 - \mathfrak{b}_1 k_2 - \mathfrak{c}_1 k_3 + \ldots$$

$$\frac{\partial V}{\partial . \Delta B_1} = 0 = [ab]_1 (A_1 + \Delta A_1) + [bb]_1 (B_1 + \Delta B_1) +$$
$$+ [bc]_1 (C_1 + \Delta C_1) + \cdots - [bl]_1 + \mathfrak{a}_2 k_1 + \mathfrak{b}_2 k_2 + \mathfrak{c}_2 k_3 + \cdots$$

$$\frac{\partial V}{\partial . \Delta C_1} = 0 = [ac]_1 (A_1 + \Delta A_1) + [bc]_1 (B_1 + \Delta B_1) +$$
$$+ [cc]_1 (C_1 + \Delta C_1) + \cdots - [cl]_1 + \mathfrak{a}_3 k_1 + \mathfrak{b}_3 k_2 + \mathfrak{c}_3 k_3 + \cdots$$

$$\frac{\partial V}{\partial . \Delta A_2} = 0 = [aa]_2 (A_2 + \Delta A_2) + [ab]_2 (B_2 + \Delta B_2) +$$
$$+ [ac]_2 (C_2 + \Delta C_2) + \cdots - [al]_2 + \mathfrak{a}_4 k_1 + \mathfrak{b}_4 k_2 + \mathfrak{c}_4 k_3 + \cdots$$

$$\frac{\partial V}{\partial . \Delta B_2} = 0 = [ab]_2 (A_2 + \Delta A_2) + [bb]_2 (B_2 + \Delta B_2) +$$
$$+ [bc]_2 (C_2 + \Delta C_2) + \cdots - [bl]_2 + \mathfrak{b}_5 k_2 + \cdots$$

$$\frac{\partial V}{\partial . \Delta C_2} = 0 = [ac]_2 (A_2 + \Delta A_2) + [bc]_2 (B_2 + \Delta B_2) +$$
$$+ [cc]_2 (C_2 + \Delta C_2) + \cdots - [cl]_2 + \cdots$$

$$\frac{\partial V}{\partial . \Delta A_3} = 0 = [aa]_3 (A_3 + \Delta A_3) + [ab]_3 (B_3 + \Delta B_3) +$$
$$+ [ac]_3 (C_3 + \Delta C_3) + \cdots - [al]_3 + \mathfrak{b}_6 k_2 + \mathfrak{c}_6 k_3 + \cdots$$

usw.

Diese Gleichungen können vereinfacht werden. Wenn man ausmultipliziert, so erhält man z. B. für die erste Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial . \Delta A_1} = 0 = [aa]_1 A_1 + [ab]_1 B_1 + [ac]_1 C_1 - [al]_1 + [aa]_1 \Delta A_1 +$$
$$+ [ab]_1 \Delta B_1 + [ac]_1 \Delta C_1 + \mathfrak{a}_1 k_1 + \mathfrak{b}_1 k_2 + \mathfrak{c}_1 k_3 + \cdots$$

oder, da $[aa]_1 A_1 + [ab]_1 B_1 + [ac]_1 C_1 - [al]_1 = 0$ ist, als die erste auf die erste Station bezogene Normalgleichung:

$$[aa]_1 \Delta A_1 + [ab]_1 \Delta B_1 + [ac]_1 \Delta C_1 + \mathfrak{a}_1 k_1 + \mathfrak{b}_1 k_2 + \mathfrak{c}_1 k_3 + \ldots = 0$$

und analog die übrigen Normalgleichungen:

$$[ab]_1 \Delta A_1 + [bb]_1 \Delta B_1 + [bc]_1 \Delta C_1 + \mathfrak{a}_2 k_1 + \mathfrak{b}_2 k_2 + \mathfrak{c}_2 k_3 + \cdots = 0$$
$$[ac]_1 \Delta A_1 + [bc]_1 \Delta B_1 + [cc]_1 \Delta C_1 + \mathfrak{a}_3 k_1 + \mathfrak{b}_3 k_2 + \mathfrak{c}_3 k_3 + \cdots = 0$$
$$[aa]_2 \Delta A_2 + [ab]_2 \Delta B_2 + [ac]_2 \Delta C_2 + \mathfrak{a}_4 k_1 + \mathfrak{b}_4 k_2 + \mathfrak{c}_4 k_3 + \cdots = 0$$
$$[ab]_2 \Delta A_2 + [bb]_2 \Delta B_2 + [bc]_2 \Delta C_2 + \cdots \mathfrak{b}_5 k_2 + \cdots = 0$$
$$[ac]_2 \Delta A_2 + [bc]_2 \Delta B_2 + [cc]_2 \Delta C_2 + \cdots = 0$$
$$[aa]_3 \Delta A_3 + [ab]_3 \Delta B_3 + [ac]_3 \Delta C_3 + \cdots \mathfrak{b}_6 k_2 + \mathfrak{c}_6 k_3 + \cdots = 0.$$

usw. — Diese u Gleichungen mit $u + r$ Unbekannten geben mit den r Bedingungsgleichungen zusammen $u + r$ Gleichungen zur Bestimmung aller $u + r$ Unbekannten.

Zusammenfassend hat man daher für eine gleichzeitige Ausgleichung eines Dreiecksnetzes der Reihe nach folgende Arbeiten auszuführen:

1. Ausgleichung der beobachteten Richtungen auf den einzelnen Stationen.

2. Aufstellung der Bedingungsgleichungen im ganzen Dreiecksnetze.

3. Aufstellung der Korrelatengleichungen.

4. Berechnung der Verbesserungen, ausgedrückt durch die Korrelaten.

5. Substitution dieser Verbesserungen in die Bedingungsgleichungen.

6. Auflösung dieser Gleichungen zur Bestimmung der Korrelaten.

7. Bestimmung der Verbesserungen mit Hilfe der nunmehr gefundenen Korrelaten.

8. Genauigkeitsbestimmungen.

§ 37. Dieselbe Aufgabe in moderner Darstellung.

Bestehen zwischen den n Unbekannten $x, y, z, \ldots$ die n Fehlergleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots - l_1 = v_1 & \text{mit dem Gewicht } g_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots - l_2 = v_2 & \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\quad g_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_n x + b_n y + c_n z + \cdots - l_n = v_n & \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\quad g_n \end{array}\right| \quad (1)$$

und r Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} p_1 x + p_2 y + p_3 z + \cdots - p_0 = 0 \\ q_1 x + q_2 y + q_3 z + \cdots - q_0 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_1 x + t_2 y + t_3 z + \cdots - t_0 = 0 \end{array}\right| \quad (2)$$

und soll die Minimumsbedingung $[g v v] = min$ mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen (2) erfüllt werden, so hat man die partiellen Differentialquotienten des Ausdruckes

$$\begin{aligned} [g v v] &- 2 k_1 (p_1 x + p_2 y + p_3 z + \cdots - p_0) \\ &- 2 k_2 (q_1 x + q_2 y + q_3 z + \cdots - q_0) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &- 2 k_r (t_1 x + t_2 y + t_3 z + \cdots - t_0) \end{aligned}$$

nach allen Unbekannten gleich Null zu setzen, wodurch erhalten wird:

$$
\begin{aligned}
[g a v] + k_1 p_1 + k_2 q_1 + \cdots + k_r t_1 &= 0 \\
[g b v] + k_1 p_2 + k_2 q_2 + \cdots + k_r t_2 &= 0 \\
[g c v] + k_1 p_3 + k_2 q_3 + \cdots + k_r t_3 &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{aligned}
$$

Führt man hier die aus (1) bestimmten v ein, so erhält man mit Zuziehung von (2) folgendes System von Normalgleichungen:

$$
\begin{aligned}
&[g a a] x + [g a b] y + [g a c] z + \cdots + p_1 k_1 + q_1 k_2 + \cdots + t_1 k_r - [g a l] = 0 \\
&[g a b] x + [g b b] y + [g b c] z + \cdots + p_2 k_1 + q_2 k_2 + \cdots + t_2 k_r - [g b l] = 0 \\
&[g a c] x + [g b c] y + [g c c] z + \cdots + p_3 k_1 + q_3 k_2 + \cdots + t_3 k_r - [g c l] = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&p_1 x + p_2 y + p_3 z + \cdots + p_0 = 0 \\
&q_1 x + q_2 y + q_3 z + \cdots + q_0 = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&t_1 x + t_2 y + t_3 z + \cdots + t_0 = 0,
\end{aligned}
$$

woraus die unbekannten Elemente $x, y, z, \ldots k_1, k_2, \ldots k_r$, sowie die Gewichtsreziproken der Unbekannten und von Funktionen derselben in üblicher Weise berechnet werden können. Eine Ausnahme hievon bildet nur der Fall, daß die vermittelnden Beobachtungen zur Bestimmung der in ihren Fehlergleichungen vorkommenden Unbekannten allein nicht ausreichen. Über diesen besonderen Fall verweisen wir auf Helmerts „Ausgleichungsrechnung" 1907, S. 281.

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler ist nach § 63 des I. Bandes:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[g v v]}{n + r - u}}.$$

Zur Kontrolle der Berechnung von $[g v v]$ aus den einzelnen v bestehen unter Beschränkung auf $u = 3$ und $r = 2$ die Formeln:

$$[g v v] = [g l l] - [g a l] x - [g b l] y - [g c l] z + p_0 k_1 + q_0 k_2$$

$$[g v v] = [g l l] - \frac{[g a l]^2}{[g a a]} - \frac{[g b l . 1]^2}{[g b b . 1]} - \frac{[g c l . 2]^2}{[g c c . 2]} + \frac{[p_0 . 3]^2}{[p p]} + \frac{[q_0 . 4]^2}{[q q . 1]}.$$

Hierin bedeutet:

$$[p p] = \frac{p_1 p_1}{[g a a]} + \frac{[p_2 . 1]^2}{[g b b . 1]} + \frac{[p_3 . 2]^2}{[g c c . 2]}, \text{ usw.}$$

Die mittleren Fehler der Unbekannten x, y, z weisen folgenden Bau auf:

$$\mu_x = \frac{\mu_0}{\sqrt{[g a a . 1]}}, \qquad \mu_y = \frac{\mu_0}{\sqrt{[g b b . 1]}}, \qquad \mu_z = \frac{\mu_0}{\sqrt{[g c c . 1]}},$$

und der mittlere Fehler einer Funktion der Unbekannten ist bestimmt aus:

$$\mu_7^2 = \mu_5^2 \left\{ \frac{f_1^2}{[gaa.2]} + \frac{f_2^2}{[gbb.2]} + \frac{f_3^2}{[gcc.2]} + \frac{2 f_1 f_2}{[gab.2]} - \frac{2 f_1 f_3}{[gac.2]} - \frac{2 f_2 f_3}{[gbc.2]} \right\}$$

Beispiel. (Entlehnt aus Hansen: „Von der Methode der kleinsten Quadrate", 1867, S. 658).

Gegeben seien die gleichgewichtigen Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned} x + y + z - 1 &= v_1 \\ 2x - 3y \quad \cdot \quad - 1 &= v_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad z - 2 &= v_3 \end{aligned}$$

und die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} x + y + z + 1 &= 0 \\ y - z - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Die zugehörigen Normalgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} +5x - 5y + z + k_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad - 3 &= 0 \\ -5x + 10y + z + k_1 + k_2 + 2 &= 0 \\ +x + y + 2z + k_1 - k_2 - 3 &= 0 \\ +x + y + z \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + 1 &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad + y - z \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Die (durch fünf gekürzten) reduzierten Normalgleichungen sind:

$$\begin{aligned} x - y + 0{\cdot}2\,z + 0{\cdot}2\,k_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad &= + 0{\cdot}6 \\ y + 0{\cdot}4\,z + 0{\cdot}4\,k_1 + 0{\cdot}2\,k_2 &= + 0{\cdot}2 \\ z \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad - 1{\cdot}4\,k_2 &= + 2{\cdot}0 \\ k_1 + 0{\cdot}4\,k_2 &= + 2{\cdot}0 \\ k_2 &= - 3{\cdot}2. \end{aligned}$$

Die Auflösung gibt der Reihe nach:

$$k_2 = - 3{\cdot}20, \qquad k_1 = + 3{\cdot}28,$$

$$z = - 2{\cdot}48, \qquad y = + 0{\cdot}52, \qquad x = + 0{\cdot}96$$

Ferner ist

$$v_1 = - 2{\cdot}00, \qquad v_2 = - 0{\cdot}64, \qquad v_3 = - 4{\cdot}48,$$

$$[v\,v] = 24{\cdot}48.$$

Kontrolle:

$$[v\,v] = 6 - 3\,.\,0{\cdot}96 + 2\,.\,0{\cdot}52 + 3\,.\,2{\cdot}48 + 1\,.\,3{\cdot}28 + 3\,.\,3{\cdot}20 = 24{\cdot}48$$

oder

$$[v\,v] = 6 - \frac{3^2}{5} - \frac{1^2}{5} - \frac{2^2}{1} + \frac{2^2}{1} + \frac{6{\cdot}4^2}{2} = 24{\cdot}48$$

Demnach ist

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{24.48}{3 + 2 - 3}} = \pm 3.50,$$

$$\frac{1}{g_x} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{0.36}{1} - \frac{0.36}{1} - \frac{0.64}{2} = 0.08 \qquad \mu_x = \mu_0 \sqrt{0.08} = \pm 1.0$$

$$\frac{1}{g_y} = \frac{1}{5} - \frac{0.16}{1} - \frac{0.16}{1} - \frac{0.32}{2} = 0.02 \qquad \mu_y = \mu_0 \sqrt{0.02} = \pm 0.5$$

$$\frac{1}{g_z} = \frac{1}{1} - \frac{1.96}{2} = 0.02 \qquad \mu_z = \mu_0 \sqrt{0.02} = \pm 0.5.$$

Für die Funktion $f = x + y + z$ ist $\frac{1}{g_f} = 0$, folglich auch $\mu_f = 0$, d. h. die Summe $x + y + z$ (welche durch eine Bedingungsgleichung bestimmt ist) ist fehlerlos, wie es sein soll.

Dieselbe Aufgabe kann auch durch Reduktion auf vermittelnde Beobachtungen ohne Bedingungsgleichungen gelöst werden, indem man mit Hilfe der r Bedingungsgleichungen aus den Fehlergleichungen (1) r Unbekannte eliminiert. Diese Fehlergleichungen enthalten dann nur noch $u - r$ Unbekannte. Bestimmt man in dem Hansenschen Beispiele aus den beiden Bedingungsgleichungen die Größen

$$z = y - 3, \qquad x = -2y + 2,$$

so gehen die drei Fehlergleichungen über in:

$$-2 = v_1, \qquad +3 - 7y = v_2, \qquad -5 + y = v_3,$$

womit dieselben Ergebnisse wie auf direktem Wege erhalten werden, wenn beachtet wird, daß $v_1 = -2$ als wahrer Beobachtungsfehler erscheint.

§ 38. Ausgleichung in zwei Teilen.

Für die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, von deren Unbekannten Bedingungsgleichungen zu erfüllen sind, hat Hansen (1867) eine durch Trennung der Ausgleichung in zwei Teilen vereinfachte Methode angegeben, deren Theorie von Jordan (1888) ausgebildet wurde. Beschränken wir uns in der Folge auf $u = 3$ Unbekannte x, y, z, auf $n = 4$ Fehlergleichungen und $r = 2$ Bedingungsgleichungen, so stehen zur Verfügung:

Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z - l_1 &= v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z - l_2 &= v_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z - l_3 &= v_3 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z - l_4 &= v_4 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} p_1 x + p_2 y + p_3 z + p_0 &= 0 \\ q_1 x + q_2 y + q_3 z + q_0 &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Gleicht man die vermittelnden Beobachtungen zuerst ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen aus und bezeichnet man die aus diesem ersten Teile der Ausgleichung gewonnenen Werte für die Unbekannten mit x_0, y_0, z_0, so erhält man die Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned} [a a]\, x_0 + [a b]\, y_0 + [a c]\, z_0 &= [a l] \\ [a b]\, x_0 + [b b]\, y_0 + [b c]\, z_0 &= [b l] \\ [a c]\, x_0 + [b c]\, y_0 + [c c]\, z_0 &= [c l]. \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

Hieraus können die unvollständigen Werte der Unbekannten x_0, y_0, z_0, sowie die Gewichtskoeffizienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, usw. berechnet werden, wobei nach der Theorie der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen die Beziehungen bestehen (I. Band, S. 181):

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \alpha_1\, l_1 + \alpha_2\, l_2 + \alpha_3\, l_3 + \alpha_4\, l_4 \\ y_0 &= \beta_1\, l_1 + \beta_2\, l_2 + \beta_3\, l_3 + \beta_4\, l_4 \\ z_0 &= \gamma_1\, l_1 + \gamma_2\, l_2 + \gamma_3\, l_3 + \gamma_4\, l_4. \end{aligned}\right| \qquad (4)$$

Da die aus der Gesamtausgleichung hervorgehenden Werte x, y, z aus den unvollständig ausgeglichenen Werten x_0, y_0, z_0 durch Hinzufügung noch näher zu bestimmender Korrektionen ξ, η, ζ nach den Gleichungen

$$x = x_0 + \xi, \qquad y = y_0 + \eta, \qquad z = z_0 + \zeta$$

zu bilden sind, so nehmen die Fehlergleichungen allgemein folgende Gestalt an:

$$a\,(x_0 + \xi) + b\,(y_0 + \eta) + c\,(z_0 + \zeta) - l = r$$

$$(a\, x_0 + b\, y_0 + c\, z_0 - l) + (a\, \xi + b\, \eta + c\, \zeta) = r$$

oder kürzer:

$$r' + r'' = r.$$

Nun sind

$$a\, x_0 + b\, y_0 + c\, z_0 - l = r' \qquad (5)$$

die aus dem ersten Teile der Ausgleichung resultierenden Verbesserungen der Beobachtungswerte l, und da r die der Gesamtausgleichung entsprechenden Verbesserungen darstellen, so bedeuten

$$a\, \xi + b\, \eta + c\, \zeta = r'' \qquad (6)$$

die mit dem zweiten Teile der Ausgleichung verbundenen Verbesserungen der Beobachtungswerte. Die zu einem Minimum zu machende Fehlerquadratsumme ist:

$$[r r] = [r' r'] + [r'' r''] + 2\, [r' r''].$$

Addiert man alle mit dem zugehörigen v' multiplizierten Gleichungen (6), so erhält man:

$$[v'v''] = [av']\,\xi + [bv']\,\eta + [cv']\,\zeta$$

oder, da $[av'] = 0$, $[bv'] = 0$ und $[cv'] = 0$ sein muß, auch $[v'v''] = 0$, folglich ist:

$$[vv] = [v'v'] + [v''v'']. \tag{7}$$

Damit $[vv]$ ein Minimum werde, müssen beide Teile $[v'v']$ und $[v''v'']$ für sich Minima werden. Nun ist der erste Teil $[v'v']$ bereits ein Minimum. Um auch noch den zweiten Teil $[v''v'']$ auf ein Minimum zu bringen, setze man in die Bedingungsgleichungen (2) die vollständig ausgeglichenen Werte der Unbekannten:

$$p_1(x_0+\xi)+p_2(y_0+\eta)+p_3(z_0+\zeta)+p_0=0$$
$$q_1(x_0+\xi)+q_2(y_0+\eta)+q_3(z_0+\zeta)+q_0=0.$$

Mit den durch Einführung der unvollständigen Werte der Unbekannten in die Bedingungsgleichungen auftretenden Widersprüchen

$$\left.\begin{array}{l} p_1x_0+p_2y_0+p_3z_0+p_0=w_1 \\ q_1x_0+q_2y_0+q_3z_0+q_0=w_2 \end{array}\right\} \tag{8}$$

erhalten die Bedingungsgleichungen die Form

$$\left.\begin{array}{l} p_1\xi+p_2\eta+p_3\zeta+w_1=0 \\ q_1\xi+q_2\eta+q_3\zeta+w_2=0. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Die vollständig ausgeglichenen Werte der Unbekannten

$$x=x_0+\xi, \qquad y=y_0+\eta, \qquad z=z_0+\zeta$$

stehen nun zu den vollständig verbesserten Beobachtungswerten $l+v'+v''$ in demselben Abhängigkeitsverhältnisse, wie die unvollständigen Werte der Unbekannten x_0, y_0, z_0 zu den unvollständig verbesserten Beobachtungswerten $l+v'$. Da nun zwischen den letzteren die Beziehungen (5) und (4) bestehen, so hat man für die ersteren die Relationen

$$a(x_0+\xi)+b(y_0+\eta)+c(z_0+\zeta)-l=v'+v''$$

$$a(x_0+\xi)+b(y_0+\eta)+c(z_0+\zeta)-(l+v'')=v' \tag{5*}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0+\xi=\alpha_1(l_1+v_1'')+\alpha_2(l_2+v_2'')+\alpha_3(l_3+v_3'')+\alpha_4(l_4+v_4'') \\ y_0+\eta=\beta_1(l_1+v_1'')+\beta_2(l_2+v_2'')+\beta_3(l_3+v_3'')+\beta_4(l_4+v_4'') \\ z_0+\zeta=\gamma_1(l_1+v_1'')+\gamma_2(l_2+v_2'')+\gamma_3(l_3+v_3'')+\gamma_4(l_4+v_4'') \end{array}\right\} \tag{4*}$$

Subtrahiert man (4) von (4*), so folgt

$$\left.\begin{array}{l} \xi=\alpha_1v_1''+\alpha_2v_2''+\alpha_3v_3''+\alpha_4v_4'' \\ \eta=\beta_1v_1''+\beta_2v_2''+\beta_3v_3''+\beta_4v_4'' \\ \zeta=\gamma_1v_1''+\gamma_2v_2''+\gamma_3v_3''+\gamma_4v_4''. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Bezeichnet man zur Abkürzung

$$
\left.\begin{array}{ll}
p_1\alpha_1 + p_2\beta_1 + p_3\gamma_1 = \mathrm{I}_1 & \quad q_1\alpha_1 + q_2\beta_1 + q_3\gamma_1 = \mathrm{II}_1 \\
p_1\alpha_2 + p_2\beta_2 + p_3\gamma_2 = \mathrm{I}_2 & \quad q_1\alpha_2 + q_2\beta_2 + q_3\gamma_2 = \mathrm{II}_2 \\
p_1\alpha_3 + p_2\beta_3 + p_3\gamma_3 = \mathrm{I}_3 & \quad q_1\alpha_3 + q_2\beta_3 + q_3\gamma_3 = \mathrm{II}_3 \\
p_1\alpha_4 + p_2\beta_4 + p_3\gamma_4 = \mathrm{I}_4 & \quad q_1\alpha_4 + q_2\beta_4 + q_3\gamma_4 = \mathrm{II}_4.
\end{array}\right\} \qquad (11)
$$

so ergeben sich durch Substitution der Werte ξ, η, ζ aus (10) in (9) folgende, auf die Ausgleichung direkt bedingter Beobachtungen zurückgeführte Bedingungsgleichungen:

$$
\left.\begin{array}{l}
\mathrm{I}_1 v_1'' + \mathrm{I}_2 v_2'' + \mathrm{I}_3 v_3'' + \mathrm{I}_4 v_4'' + w_1 = 0 \\
\mathrm{II}_1 v_1'' + \mathrm{II}_2 v_2'' + \mathrm{II}_3 v_3'' + \mathrm{II}_4 v_4'' + w_2 = 0.
\end{array}\right\} \qquad (12)
$$

Dieselben können daher nach der Korrelatenmethode aufgelöst werden. Man erhält für die Ermittlung der neu einzuführenden Korrelaten k_1 und k_2 die Normalgleichungen

$$
\left.\begin{array}{l}
[\mathrm{I\,I}]\,k_1 + [\mathrm{I\,II}]\,k_2 + w_1 = 0 \\
[\mathrm{I\,II}]\,k_1 + [\mathrm{II\,II}]\,k_2 + w_2 = 0.
\end{array}\right\} \qquad (13)
$$

Mit Hilfe der hieraus berechneten k_1, k_2 ergeben sich die noch restlichen Verbesserungen

$$
\left.\begin{array}{l}
v_1'' = \mathrm{I}_1 k_1 + \mathrm{II}_1 k_2 \\
v_2'' = \mathrm{I}_2 k_1 + \mathrm{II}_2 k_2 \\
v_3'' = \mathrm{I}_3 k_1 + \mathrm{II}_3 k_2 \\
v_4'' = \mathrm{I}_4 k_1 + \mathrm{II}_4 k_2,
\end{array}\right\} \qquad (14)
$$

deren Quadratsumme $[v''v'']$ zur Genauigkeitsberechnung benötigt wird. Um die Korrektionen ξ, η, ζ zu erhalten, bilde man zunächst aus (11)

$$
\left.\begin{array}{rl}
[\mathrm{I\,I}] = & p_1p_1[\alpha\alpha] + 2p_1p_2[\alpha\beta] + 2p_1p_3[\alpha\gamma] \\
& \qquad + p_2p_2[\beta\beta] + 2p_2p_3[\beta\gamma] \\
& \qquad\qquad + p_3p_3[\gamma\gamma] \\
[\mathrm{I\,II}] = & p_1q_1[\alpha\alpha] + p_1q_2[\alpha\beta] + p_1q_3[\alpha\gamma] \\
& + p_2q_1[\alpha\beta] + p_2q_2[\beta\beta] + p_2q_3[\beta\gamma] \\
& + p_3q_1[\alpha\gamma] + p_3q_2[\beta\gamma] + p_3q_3[\gamma\gamma] \\
[\mathrm{II\,II}] = & q_1q_1[\alpha\alpha] + 2q_1q_2[\alpha\beta] + 2q_1q_3[\alpha\gamma] \\
& \qquad + q_2q_2[\beta\beta] + 2q_2q_3[\beta\gamma] \\
& \qquad\qquad + q_3q_3[\gamma\gamma]
\end{array}\right\} \qquad (15)
$$

sodann durch Substitution von (11) in (14):

$$
\left.\begin{array}{l}
v_1'' = (p_1\alpha_1 + p_2\beta_1 + p_3\gamma_1)\,k_1 + (q_1\alpha_1 + q_2\beta_1 + q_3\gamma_1)\,k_2 \\
v_2'' = (p_1\alpha_2 + p_2\beta_2 + p_3\gamma_2)\,k_1 + (q_1\alpha_2 + q_2\beta_2 + q_3\gamma_2)\,k_2 \\
v_3'' = (p_1\alpha_3 + p_2\beta_3 + p_3\gamma_3)\,k_1 + (q_1\alpha_3 + q_2\beta_3 + q_3\gamma_3)\,k_2 \\
v_4'' = (p_1\alpha_4 + p_2\beta_4 + p_3\gamma_4)\,k_1 + (q_1\alpha_4 + q_2\beta_4 + q_3\gamma_4)\,k_2
\end{array}\right\} \qquad (16)
$$

und schließlich durch Einführung dieser Werte in (10):

$$\left.\begin{aligned}\xi &= [\alpha\,\alpha]\,(p_1 k_1 + q_1 k_2) + [\alpha\,\beta]\,(p_2 k_1 + q_2 k_2) + [\alpha\,\gamma]\,(p_3 k_1 + q_3 k_2)\\ \eta &= [\alpha\,\beta]\,(p_1 k_1 + q_1 k_2) + [\beta\,\beta]\,(p_2 k_1 + q_2 k_2) + [\beta\,\gamma]\,(p_3 k_1 + q_3 k_2)\\ \zeta &= [\alpha\,\gamma]\,(p_1 k_1 + q_1 k_2) + [\beta\,\gamma]\,(p_2 k_1 + q_2 k_2) + [\gamma\,\gamma]\,(p_3 k_1 + q_3 k_2)\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Der Rechnungsgang ist also folgender:

1. Berechnung von x_0, y_0, z_0 und $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$, usw. aus den Normalgleichungen (3), sowie der Widersprüche w_1, w_2 usw. nach (8).

2. Berechnung von $[\mathrm{I\,I}]$, $[\mathrm{I\,II}]$ usw. mittels der Formeln (15).

3. Berechnung der Korrelaten k_1, k_2 aus den Normalgleichungen (13).

4. Berechnung der Korrektionen ξ, η, ζ aus den Gleichungen (17).

5. Berechnung von $[v\,v] = [v'\,v'] + [v''\,v'']$ aus den Teilsummen:

$$[v'\,v'] = [l\,l\,.\,3] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,l\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]}$$

$$[v''\,v''] = -[w\,k] = \frac{w_1^2}{[\mathrm{I\,I}]} + \frac{[w_2\,.\,1]^2}{[\mathrm{II\,II}.1]}.$$

6. Berechnung des mittleren Fehlers einer Beobachtung aus

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n + r - u}}.$$

Beispiel. Die Auflösung der im § 37 direkt behandelten Aufgabe nimmt durch getrennte Ausgleichung folgenden Gang:

Die Fehler- und Bedingungsgleichungen sind:

$$\begin{array}{rcl|l} x + y + z - 1 &=& v_1 & x + y + z + 1 = 0\\ 2\,x - 3\,y \;.\;\; . - 1 &=& v_2 & \quad\; y - z - 3 = 0.\\ .\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\; z - 2 &=& v_3 & \end{array}$$

Die reduzierten Normalgleichungen des ersten Teiles der Ausgleichung sind:

$$\begin{aligned} +\,5\,x_0 - 5\,y_0 + \,z_0 &= +\,3\\ +\,5\,y_0 + 2\,z_0 &= +\,1\\ +\,z_0 &= +\,2\end{aligned}$$

Die Auflösung gibt:

$$z_0 = +\,2{\cdot}0,\qquad y_0 = -\,0{\cdot}6,\qquad x_0 = +\,0{\cdot}4;$$

$$[\alpha\,\alpha] = +\,0{\cdot}76,\qquad [\alpha\,\beta] = +\,0{\cdot}44,\qquad [\alpha\,\gamma] = -\,0{\cdot}6,$$

$$[\beta\,\beta] = +\,0{\cdot}36,\qquad [\beta\,\gamma] = -\,0{\cdot}4\qquad [\gamma\,\gamma] = +\;\;1;$$

$$w_1 = +\,2{\cdot}0,\qquad w_2 = -\,5{\cdot}6;$$

$$[\mathrm{I\,I}] = +\,1{\cdot}00,\qquad [\mathrm{I\,II}] = +\,0{\cdot}40,\qquad [\mathrm{II\,II}] = +\,2{\cdot}16.$$

Die Normalgleichungen des zweiten Teiles der Ausgleichung lauten sohin:

$$k_1 - 0\cdot40\,k_2 + 2\cdot0 = 0$$
$$0\cdot4\,k_1 - 2\cdot16\,k_2 - 5\cdot6 = 0$$

deren Auflösung gibt: $k_1 = -\,3\cdot28, \quad k_2 = -\,3\cdot20.$

Sohin sind die Korrektionen:

$$\xi = -\,2\cdot493 - 0\cdot035 + 3\cdot888 = +\,1\cdot360$$
$$\eta = -\,1\cdot443 - 0\cdot029 + 2\cdot592 = +\,1\cdot120$$
$$\zeta = +\,1\cdot968 + 0\cdot032 - 6\cdot480 = -\,4\cdot480$$

und die Unbekannten nach der Gesamtausgleichung:

$$x = -\,0\cdot4 + 1\cdot360 = +\,0\cdot960$$
$$y = -\,0\cdot6 + 1\cdot120 = +\,0\cdot520$$
$$z = +\,2\cdot0 - 4\cdot480 = -\,2\cdot480.$$

Zieht man in Erwägung, daß im vorliegenden Beispiele bei drei Fehlergleichungen mit drei Unbekannten

$$v_1' = v_2' = v_3' = 0, \text{ also auch } [v'v'] = 0$$

sein muß, so ergibt sich, da $v_1 = v_1'' = -\,2\cdot00$, $v_2 = v_2'' = -\,0\cdot64$ und $v_3 = v_3'' = -\,4\cdot48$ ist,

$$[vv] = [v''v''] = -\,[wk] = 24\cdot48,$$

sohin übereinstimmend mit dem Ergebnisse des § 37:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{24\cdot48}{3 - 2 - \text{[illegible]}}} = +\,3\cdot50.$$

§ 39. Bedingte Beobachtungen mit Unbekannten.

Gegeben seien die ganz allgemein gehaltenen Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots + p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots + p_m v_m - w_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots + q_1 v_1 + q_2 v_2 + \cdots + q_m v_m - w_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \cdots + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_m v_m - w_n = 0, \end{array}\right| \begin{array}{l} u \text{ Unbekannte,} \\ m \text{ Beobachtungen,} \\ n \text{ Gleichungen,} \end{array}$$

worin die Widersprüche w folgende Bedeutung haben:

$$p_0 + p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_m l_m = w_1$$
$$q_0 + q_1 l_1 + q_2 l_2 + \cdots + q_m l_m = w_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_0 + t_1 l_1 + t_2 l_2 + \cdots + t_m l_m = w_n.$$

Mit Hinweis auf die im § 63 des I. Bandes angestellte Untersuchung wiederholen wir, daß in diesem Falle eine Ausgleichungs-

aufgabe vorliegt, wenn $m > n - u > 0$ ist, und daß der mittlere Fehler der Gewichtseinheit nach der Formel

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{[gvv]}{n-u}}$$

zu bilden ist. — Man kann diese Aufgabe durch Elimination der Unbekannten $x, y, z, \ldots$ auf die Aufgabe der Ausgleichung **bedingter** Beobachtungen ohne Unbekannte zurückführen. Sie kann aber auch auf vermittelnde Beobachtungen reduziert werden, indem man z. B. für $u = 2$, $m = 4$ und $n = 3$ die Verbesserungen v_1, v_2, v_3 durch x, y und $v_4 = z$ ausdrückt, wodurch folgende Fehlergleichungen erhalten werden:

$$\begin{aligned}
a_1' x + b_1' y + c_1' z + l_1' &= v_1 \\
a_2' x + b_2' y + c_2' z + l_2' &= v_2 \\
a_3' x + b_3' y + c_3' z + l_3' &= v_3 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots z \ldots &= v_4.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung $v_4 = z$ soll andeuten, daß v_4 als eine Unbekannte fungiert.

Wie diese Aufgabe direkt gelöst werden kann, hat Helmert (1907) den Weg gewiesen. Entsprechend der Minimumsbedingung

$$\begin{aligned}
min = [gvv] &- 2k_1 (a_1 x + b_1 y + \cdots + p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots + p_m v_m + w_1) \\
&- 2k_2 (a_2 x + b_2 y + \cdots + q_1 v_1 + q_2 v_2 + \cdots + q_m v_m + w_2) \\
&\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
&- 2k_n (a_n x + b_n y + \cdots + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_m v_m + w_n),
\end{aligned}$$

setze man die partiellen Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach $v_1, v_2, \ldots v_m, x, y, \ldots$ gleich Null und erhält so die Korrelatengleichungen

$$\begin{aligned}
p_1 k_1 + q_1 k_2 + \cdots + t_1 k_n &= g_1 v_1 \\
p_2 k_1 + q_2 k_2 + \cdots + t_2 k_n &= g_2 v_2 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
p_m k_1 + q_m k_2 + \cdots + t_m k_n &= g_m v_m \\
a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n &= 0 \\
b_1 k_1 + b_2 k_2 + \cdots + b_n k_n &= 0. \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots
\end{aligned}$$

Die Fehlergleichungen bedingter Beobachtungen mit Unbekannten können daher wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
a_1 x + b_1 y + \cdots + \left[\frac{pp}{g}\right] k_1 + \left[\frac{pq}{g}\right] k_2 + \cdots + \left[\frac{pt}{g}\right] k_n + w_1 = 0 \\
a_2 x + b_2 y + \cdots + \left[\frac{pq}{g}\right] k_1 + \left[\frac{qq}{g}\right] k_2 + \cdots + \left[\frac{qt}{g}\right] k_n + w_2 = 0 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots
\end{aligned}$$

$$a_n x + b_n y + \cdots + \left[\frac{p\,t}{g}\right] k_1 + \left[\frac{q\,t}{g}\right] k_2 + \cdots + \left[\frac{t\,t}{g}\right] k_n + w_n = 0$$
$$a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n = 0$$
$$b_1 k_1 + b_2 k_2 + \cdots + b_n k_n = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hieraus erhält man durch Auflösung der zugehörigen Normalgleichungen die Korrelaten k und nach erfolgter Elimination der k ein System von Normalgleichungen für die Unbekannten $x, y, \ldots$, welches symbolisch in folgende Form gebracht werden kann:

$$-\{a\,a\}\,x - \{a\,b\}\,y - \cdots + \{a\,w\} = 0$$
$$-\{a\,b\}\,x - \{b\,b\}\,y - \cdots + \{b\,w\} = 0.$$

Hierin haben, wie aus dem Rechnungsgang geschlossen werden kann, die Koeffizienten folgende Bedeutung:

$$\{a\,b\} = \frac{a_1 b_1}{\left[\frac{p\,p}{g}\right]} + \frac{[a_2 . 1]\,[b_2 . 1]}{\left[\frac{q\,q}{g} . 1\right]} + \frac{[a_3 . 2]\,[b_3 . 2]}{\left[\frac{r\,r}{g} . 2\right]} + \cdots$$
$$\{a\,w\} = -\frac{a_1 w_1}{\left[\frac{p\,p}{g}\right]} - \frac{[a_2 . 1]\,[w_2 . 1]}{\left[\frac{q\,q}{g} . 1\right]} - \frac{[a_3 . 2]\,[w_3 . 2]}{\left[\frac{r\,r}{g} . 2\right]} - \cdots \quad \text{usw.}$$

Für die Genauigkeitsberechnung stehen dann folgende Formeln zur Verfügung:

$$[g\,v\,v] = -[w\,k]$$
$$[g\,v\,v] = \frac{w_1^2}{\left[\frac{p\,p}{g}\right]} + \frac{[w_2 . 1]^2}{\left[\frac{q\,q}{g} . 1\right]} + \frac{[w_3 . 2]^2}{\left[\frac{r\,r}{g} . 2\right]} - \frac{\{a\,w\}^2}{\{a\,a\}} - \frac{\{b\,w . 1\}^2}{\{b\,b . 1\}} \cdots$$
$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[g\,v\,v]}{n - u}}.$$

§ 40. Unvollständige Ausgleichung.

Eine Ausgleichung, bei welchen allen gegebenen Bedingungsgleichungen Genüge geleistet wird, heißt eine vollständige; genügt sie jedoch nur einigen Bedingungsgleichungen, so ist die Ausgleichung eine unvollständige. Werden Beobachtungen zuerst unvollständig ausgeglichen und hierauf einer vollständigen Ausgleichung unterzogen, wie wenn sie Originalbeobachtungen wären, so gelangt man zu denselben Endresultaten, welche man erhalten hätte, wenn man die wirklichen Originalbeobachtungen sofort vollständig ausgeglichen hätte. Der Beweis hiefür ist leicht erbracht.

Sind n Beobachtungen l_1 bis l_n durch r Bedingungen mittels der r Widerspruchsgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1\,l_1 + a_2\,l_2 + \cdots + a_n\,l_n = w_1 \\ b_0 + b_1\,l_1 + b_2\,l_2 + \cdots + b_n\,l_n = w_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_0 + q_1\,l_1 + q_2\,l_2 + \cdots + q_n\,l_n = w_r \end{array}\right| \qquad (1)$$

miteinander verbunden, so liefert die vollständige Ausgleichung folgende r Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\,v_1 + a_2\,v_2 + \cdots + a_n\,v_n + w_1 = 0 \\ b_1\,v_1 + b_2\,v_2 + \cdots + b_n\,v_n + w_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_1\,v_1 + q_2\,v_2 + \cdots + q_n\,v_n + w_r = 0. \end{array}\right| \qquad (2)$$

Hieraus ergeben sich die n Korrelatengleichungen

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + \cdots + q_1\,k_r \\ v_2 = a_2\,k_1 + b_2\,k_2 + \cdots + q_2\,k_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = a_n k_1 + b_n\,k_2 + \cdots + q_n\,k_r \end{array}\right| \qquad (3)$$

und die r Normalgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + \cdots + [a\,q]\,k_r + w_1 = 0 \\ [a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + \cdots + [b\,q]\,k_r + w_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [a\,q]\,k_1 + [b\,q]\,k_2 + \cdots + [q\,q]\,k_r + w_r = 0, \end{array}\right| \qquad (4)$$

woraus die r Korrelaten k_1 bis k_r und damit die Verbesserungen v_1 bis v_n berechnet werden.

Teilt man nun die r Bedingungsgleichungen in zwei Gruppen zu s und zu t Gleichungen, wobei $s + t = r$ ist, und wird zuerst eine unvollständige Ausgleichung vorgenommen, welche nur die erste Gruppe von s Gleichungen mit Umgehung der übrigen t Gleichungen befriedigen soll, so liefern die entsprechenden s Fehlergleichungen ebenfalls n Korrelatengleichungen, wovon aber jede um t Korrelaten weniger enthält als die obigen Korrelatengleichungen (3), nämlich nur s Korrelaten. Diese neuen Korrelaten sind jedoch nicht identisch mit den der vollständigen Ausgleichung entsprechenden s Korrelaten k_1 bis k_s und sollen daher mit k'_1 bis k'_s bezeichnet werden. Die übrigen, bei der unvollständigen Ausgleichung nicht erscheinenden t Korrelaten k'_{s+1} bis k'_r müssen daher gleich Null sein. Werden die neuen Korrelaten k' aus den s betreffenden Normalgleichungen berechnet, so erhält man mit Hilfe der entsprechenden Korrelatengleichungen auch andere Werte für die Verbesserungen, nämlich

$$\left.\begin{array}{l} v_1' = a_1 k_1' + b_1 k_2' + \cdots + q_1 k_r' \\ v_2' = a_2 k_1' + b_2 k_2' + \cdots + q_2 k_r' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n' = a_n k_1' + b_n k_2' + \cdots + q_n k_r' \end{array}\right\} \quad (5)$$

Die um diese unvollständigen Verbesserungen v' geänderten ursprünglichen Beobachtungen l sind dann die unvollständig verbesserten Beobachtungen $l + v'$. Dieselben vermögen selbstverständlich die Widersprüche w_1 bis w_r nicht gänzlich zu tilgen, denn die v' werden, in die Fehlergleichungen (2) substituiert, auf der rechten Seite nicht Null ergeben, sondern neue Widersprüche w_1' bis w_r' zurücklassen, nämlich

$$\left.\begin{array}{l} a_1 v_1' + a_2 v_2' + \cdots + a_n v_n' + w_1 = w_1' \\ b_1 v_1' + b_2 v_2' + \cdots + b_n v_n' + w_2 = w_2' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_1 v_1' + q_2 v_2' + \cdots + q_n v_n' + w_r = w_r'. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Da die neuen Widersprüche w' bei der vollständigen Ausgleichung nicht vorkommen, also gleich Null sind, so sieht man, daß, um aus einer unvollständigen Ausgleichung eine vollständige zu erzielen, an die unvollständigen Verbesserungen v' noch neue Verbesserungen v'' angebracht werden müssen, welche die neuen Widersprüche w' zum Verschwinden bringen. Es müssen daher folgende r Fehlergleichungen ihre Erfüllung finden:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 v_1'' + a_2 v_2'' + \cdots + a_n v_n'' + w_1' = 0 \\ b_1 v_1'' + b_2 v_2'' + \cdots + b_n v_n'' + w_2' = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_1 v_1'' + q_2 v_2'' + \cdots + q_n v_n'' + w_r' = 0. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Denselben entsprechen die Korrelatengleichungen

$$\left.\begin{array}{l} v_1'' = a_1 k_1'' + b_1 k_2'' + \cdots + q_1 k_r'' \\ v_2'' = a_2 k_1'' + b_2 k_2'' + \cdots + q_2 k_r'' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n'' = a_n k_1'' + b_n k_2'' + \cdots + q_n k_r'' \end{array}\right\} \quad (8)$$

und die Normalgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,k_1'' + [a\,b]\,k_2'' + \cdots + [a\,q]\,k_r'' + w_1' = 0 \\ [a\,b]\,k_1'' + [b\,b]\,k_2'' + \cdots + [b\,q]\,k_r'' + w_2' = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [a\,q]\,k_1'' + [b\,q]\,k_2'' + \cdots + [q\,q]\,k_r'' + w_r' = 0, \end{array}\right\} \quad (9)$$

woraus die r Korrelaten k_1'' bis k_r'' und somit die Verbesserungen v_1'' bis v_n'' berechnet werden können, welch letztere bewirken, daß die

durch die unvollständige Ausgleichung um v' verbesserten Beobachtungen nunmehr um $v' + v''$ verbessert werden können. Substituiert man nun die aus (5) bestimmten v' und die durch (9) ausgedrückten w' in die Gleichungen (6), so daß diese in folgende Form gebracht erscheinen:

$$
\begin{aligned}
&[aa]k'_1 + [ab]k'_2 + \cdots + [aj]k'_s + [aa]k''_1 + [ab]k''_2 + \cdots + [aq]k''_r + w_1 = 0 \\
&[ab]k'_1 + [bb]k'_2 + \cdots + [bj]k'_s + [ab]k''_1 + [bb]k''_2 + \cdots + [bq]k''_r + w_2 = 0 \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&[aq]k'_1 + [bq]k'_2 + \cdots + [jq]k'_s + [aq]k''_1 + [bq]k''_2 + \cdots + [qq]k''_r + w_r = 0
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
&[aa](k'_1 + k''_1) + [ab](k'_2 + k''_2) + \cdots + [aj](k'_s + k''_s) + \cdots + [aq]k''_r + w_1 = 0 \\
&[ab](k'_1 + k''_1) + [bb](k'_2 + k''_2) + \cdots + [bj](k'_s + k''_s) + \cdots + [bq]k''_r + w_2 = 0 \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&[aq](k'_1 + k''_1) + [bq](k'_2 + k''_2) + \cdots + [jq](k'_s + k''_s) + \cdots + [qq]k''_r + w_r = 0,
\end{aligned}
$$

so ersieht man im Vergleiche mit (4), daß die Beziehungen bestehen:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= k'_1 + k''_1 & \qquad k_{s+1} &= k''_{s+1} \\
k_2 &= k'_2 + k''_2 & \qquad . \quad . \quad . & \quad . \quad . \\
. \quad . \quad . & \quad . \quad . & \qquad k_r &= k''_r \\
k_s &= k'_s + k''_s & \qquad k'_{s+1} \text{ bis } k'_r &= 0
\end{aligned}
$$

und weiters durch Vergleichung der drei Systeme von Korrelatengleichungen (3), (5) und (8):

$$
\begin{aligned}
v_1 &= v'_1 + v''_1 \\
v_2 &= v'_2 + v''_2 \\
. \quad . \quad & . \quad . \quad . \\
v_n &= v'_n + v''_n,
\end{aligned}
$$

d. h. die Ausgleichung der Beobachtungen ist nicht nur bei unmittelbarer, sondern auch bei mittelbarer, mit einer unvollständigen Ausgleichung begonnenen Rechnung eine vollständige.

Hat man z. B. bei der Aufstellung der Bedingungsgleichungen eine übersehen und die Ausgleichung ohne dieselbe angestellt, worauf man nach Beendigung der mühevollen Arbeit dadurch kommt, daß die Widersprüche nicht gänzlich beseitigt erscheinen, so könnte man die unvollständig ausgeglichenen Beobachtungen mit Hinzuziehung der vergessenen Bedingungsgleichung neuerdings ausgleichen, wobei man gegenüber der von vorne anzufangenden Rechnung — wie Gerling meint — den Vorteil hätte, daß die Arbeit verhältnismäßig rascher von statten ginge, weil die noch erübrigenden Verbesserungsreste v'' sehr kleine Zahlen sein werden. Allein dieser

gewiß nur geringfügige Vorteil ist nicht der eigentliche Zweck dieser Untersuchung.

Die wichtigste Anwendung dieses von Gauß (1826) aufgestellten Theorems besteht in der allmählichen Elimination der Korrelaten. Wenn nämlich die Anzahl der Bedingungsgleichungen sehr groß ist, so daß der Eliminationsarbeit „die Geduld des Rechners nicht gewachsen ist", so gelangt man bequemer zum Ziele, wenn man die Bedingungsgleichungen in zwei Gruppen teilt, zuerst eine unvollständige Ausgleichung unter Zugrundelegung der einen Gruppe durchführt und sodann die unvollständig ausgeglichenen Beobachtungen unter Zugrundelegung der zweiten Gruppe allein abermals ausgleicht. Da dieser einfache Vorgang das Zusammenstimmen mit den Gleichungen der ersten Gruppe im allgemeinen wieder stören würde, so wiederholt man mit den bereits zweimal verbesserten Beobachtungen die Arbeit in beiden Gleichungssystemen so lange, bis die erhaltenen Verbesserungen schließlich keine Veränderung mehr erfahren. Hat man aber mehr als zwei Gruppen von Gleichungen zu bilden für vorteilhaft gefunden, so gelangt man in ähnlicher Weise durch sukzessive Annäherung zu den endgültigen Verbesserungen, indem die einzelnen Gruppen nacheinander zur Anwendung kommen und nach der letzten wieder zur ersten gegriffen wird. Selbstverständlich wird der Erfolg dieser Methode, wie Gauß bemerkt, sehr von einer geschickten Anwendung derselben abhängen.

Da bei Ausgleichungen großer Triangulierungsnetze in einem Gusse durch ein leicht vorkommendes Versehen die dann notwendigen Wiederholungen sehr unangenehm werden können, so wird dieser Kunstgriff oft vorgezogen. Im allgemeinen führt aber dieses Verfahren der allmählichen Ausgleichung nur langsam zum Ziele, indem es, wie Pizzetti*) (1887) gezeigt hat, schließlich gegen eine bestimmte Grenze konvergiert, wo sämtlichen Gleichungen gleichzeitig Genüge geschieht.

Wird bei ausgedehnten Dreiecksnetzen eine Teilung der Ausgleichungsarbeit in der Weise vorgenommen, daß das gesamte Netz in mehrere Netzteile unterteilt wird, und werden alle je einem Netzteile entsprechenden Bedingungsgleichungen in eine Gruppe zusammengefaßt, so erscheint dieses Ausgleichungsverfahren wegen der in diesem Falle verhältnismäßig raschen Konvergenz ganz zweckmäßig. Auf diese Weise hat auch Paschen**) die [illegible] Bedingungsgleichungen

---

*) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Vol. III.

**) „Großherzoglich Mecklenburg. Landesvermessung". II. Band. 188[illegible].

des Mecklenburger Dreiecksnetzes durch Abteilung in fünf Gruppen ausgeglichen, wozu er fünf Durchrechnungen nötig hatte, um die Widersprüche schließlich annähernd auf Null zu bringen.

Daß diese gruppenweise Ausgleichung oft vorteilhafter erscheint als eine Netzausgleichung im ganzen, lehrt das im Zusammenhange ausgeglichene sächsische Hauptnetz mit seinen 159 Bedingungsgleichungen. Nach einem Berichte von Nagel (1876) mußte der größte Teil der Rechenarbeit, da sich nach der ersten Auflösung Differenzen vorfanden, wiederholt werden, und zwar nicht einmal, sondern, weil immer noch kleine Widersprüche übrig blieben, viermal, bis schließlich ein Zusammenstimmen bis auf Hunderttausendstel von Sekunden erreicht wurde.

§ 41. Trennung der Ausgleichung nach Winkel- und Seitengleichungen.

Da bei Netzausgleichungen die wenigen komplizierteren Seitengleichungen die Einfachheit der den Winkelgleichungen allein entsprechenden Normalgleichungen wesentlich stören und daher die Rechenarbeit unliebsam erschweren, so liegt es nahe, das im vorhergehenden Paragraphen geschilderte Verfahren dazu anzuwenden, um durch Trennung der Ausgleichung nach Winkel- und Seitengleichungen eine Erleichterung in der Rechenarbeit herbeizuführen. Indessen bietet diese Methode nur dann einen Vorteil, wenn gewisse Umformungen vorgenommen werden, auf die wir hier näher eingehen wollen.

Sind in den Fehlergleichungen alle absoluten Glieder bis auf eines gleich Null, bestehen also die r Fehlergleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n + w & = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n & = 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n & = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ q_1 v_1 + q_2 v_2 + \cdots + q_n v_n & = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

so lassen dieselben eine praktische Umformung zu, welche Gerling (1843) in folgende Worte kleidet: „Wenn zum Behufe der Ausgleichung eine gewöhnliche Bedingungsgleichung (Fehlergleichung) zu erfüllen ist, außerdem aber noch eine Anzahl anderer Bedingungsgleichungen erfüllt werden (bleiben) sollen, deren absolutes Glied $= 0$ ist, so kann man diesen Zweck durch Erfüllung einer neuen Bedingungsgleichung erreichen, welche man dadurch bildet, daß man die sämtlichen vorgegebenen Gleichungen addiert, nachdem man die letzterwähnten erst mit Zahlenkoeffizienten multipliziert hat, welche

so bestimmt sind, daß die Summe der Quadrate der Koeffizienten in der neuen Gleichung ein Minimum wird."

Um dies zu beweisen, multipliziere man alle Gleichungen bis auf die erste der Reihe nach mit B, C, . . . Q und addiere sie dann zu der ersten. Hiedurch erhält man zunächst

$$\left.\begin{array}{l} (a_1 + b_1 B + c_1 C + \cdots + q_1 Q)\, v_1 + \\ + (a_2 + b_2 B + c_2 C + \cdots + q_2 Q)\, v_2 + \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + (a_n + b_n B + c_n C + \cdots + q_n Q)\, v_n + w = 0 \end{array}\right| \qquad (2)$$

oder, wenn man die Klammerausdrücke der Reihe nach mit K_1, K_2, . . . K_n bezeichnet,

$$K_1 v_1 + K_2 v_2 + \cdots + K_n v_n + w = 0. \qquad (3)$$

Sollen die Koeffizienten B, C, . . . Q die Minimumsbedingung $[K K] = min$ erfüllen, so muß

$$\frac{\partial [K K]}{\partial B} = \frac{\partial [(a + b B + c C + \cdots + q Q)^2]}{\partial B} = 2 [b K] = 0$$

$$\frac{\partial [K K]}{\partial C} = \frac{\partial [(a + b B + c C + \cdots + q Q)^2]}{\partial C} = 2 [c K] = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\partial [K K]}{\partial Q} = \frac{\partial [(a + b B + c C + \cdots + q Q)^2]}{\partial Q} = 2 [q K] = 0$$

gesetzt werden, also müssen die Gleichungen bestehen

$$\left.\begin{array}{l} [a b] + [b b] B + [b c] C + \cdots + [b q] Q = 0 \\ [a c] + [b c] B + [c c] C + \cdots + [c q] Q = 0 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ [a q] + [b q] B + [c q] C + \cdots + [q q] Q = 0. \end{array}\right| \qquad (4)$$

Werden hieraus die Koeffizienten B, C, . . . Q berechnet, so erhält man damit auch die Ausdrücke K. Nun liefert die einzige Fehlergleichung (3) die n Korrelatengleichungen

$$v_1 = K_1 k,\ v_2 = K_2 k,\ \ldots\ v_n = K_n k \qquad (5)$$

und die Normalgleichung

$$[K K]\, k + w = 0 \qquad (6)$$

Somit ist $k = -\dfrac{w}{[K K]}$ und es sind die einzelnen Verbesserungen nach (5):

$$r_1 = -\frac{w}{[K\,K]}\,K_1$$
$$r_2 = -\frac{w}{[K\,K]}\,K_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$r_n = -\frac{w}{[K\,K]}\,K_n.$$

Führt man diese Werte in das System (1) ein, so erhält man,

$$\left.\begin{aligned} w - \frac{w}{[K\,K]}\,[a\,K] &= 0 \\ -\frac{w}{[K\,K]}\,[b\,K] &= 0 \\ -\frac{w}{[K\,K]}\,[c\,K] &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ -\frac{w}{[K\,K]}\,[q\,K] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Da aber die Faktoren $[b\,K]$, $[c\,K]$, ... $[q\,K]$, wie oben entwickelt, gleich Null sind, und $[a\,K] = [K\,K]$ ist, weil — die Klammerausdrücke in (2) der Reihe nach mit den betreffenden K multipliziert und dann addiert — die Gleichung

$$[K\,K] = [a\,K] + [b\,K]\,B + [c\,K]\,C + \cdots + [q\,K]\,Q$$

ergeben, worin alle Glieder der rechten Seite bis auf das erste gleich Null sind und daher auch die erste Gleichung des Systems (7) übergeht in $w - w = 0$, so sieht man, daß tatsächlich unter Zugrundelegung der einzigen Fehlergleichung (2) auch das System der r Fehlergleichungen (1) erfüllt ist.

Gauß hat diese Methode unter gleichzeitiger Anwendung des sukzessiven Annäherungsverfahrens bei der hannoverschen Gradmessung angewendet, indem er jede Seitengleichung mit Hilfe der Winkelgleichungen derselben Figur umformte und dann die Winkelgleichungen für sich allein und nach Einführung der unvollständigen Verbesserungen in die umgeformten Seitengleichungen diese allein der Ausgleichung unterwarf. Bei 43 Winkel- und 12 Seitengleichungen kam er bereits nach drei Wiederholungen zum Ziele, während Gerling*), der im kurhessischen Dreiecksnetze gleichfalls das allmähliche Ausgleichungsverfahren, jedoch ohne Umformung der Seitengleichungen

*) „Beiträge zur Geographie Kurhessens und der umliegenden Gegenden aus der kurhessischen Triangulierung der Jahre 1822 bis 1837". Kassel 1839.

anwandte, bei 24 Winkel- und 21 Seitengleichungen die Rechnung dreizehnmal wiederholen mußte.

In historischer Hinsicht wäre hier noch zu erwähnen die Netzausgleichungsmethode von Schleiermacher (vor 1800), worüber von Helmert in der Zeitschr. f. Math. u. Phys., 1868, S. 201, und von Nell in der Zeitschr. f. Vermessungsw., 1881, S. 1 u. 109, berichtet wurde.

Eine Erweiterung des Gaußschen Verfahrens hat Krüger angegeben in der Abhandlung: „Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen". (Veröffentl. des königl. preuß. Geodätischen Instituts, 1905.)

§ 42. Beispiel. (Ausgleichung eines Vierecks.)

Um die Anwendung dieser Methode an einem Beispiele zu zeigen, betrachten wir den einfachen Fall, daß in einem Viereck alle 8 Winkel zwischen den Seiten und Diagonalen gemessen seien, wie in dem Zahlenbeispiele des § 62 im ersten Bande. Man hat dann vier Bedingungsgleichungen, nämlich drei Winkelgleichungen und eine Seitengleichung. Werden die drei Winkelgleichungen, welche bedeutend einfacher gestaltet sind als die Seitengleichung, zuerst unvollständig ausgeglichen und die hiedurch erhaltenen Verbesserungen v' in dieselben eingesetzt, so verschwinden die absoluten Glieder darin. Behandelt man diese Winkelgleichungen mit Zuziehung der entsprechend umgeformten Seitengleichung weiter, so gestaltet sich die Rechenarbeit in Ansehung der hier entwickelten Methode wesentlich einfacher und rascher.

Wir setzen aus dem Zahlenbeispiele S. 245 des ersten Bandes die vier Bedingungsgleichungen an:

$$v_1 + v_2 + v_3 \dots\dots\dots\dots + v_8 + 2\cdot6 = 0$$
$$\dots\dots v_2 + v_3 - v_4 - v_5 \dots\dots - 1\cdot7 = 0$$
$$v_1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots + v_6 + v_7 + v_8 - 3\cdot9 = 0$$
$$-18\cdot98\, v_1 - 2\cdot14\, v_2 - 2\cdot69\, v_3 + 4\cdot79\, v_4 - 0\cdot07\, v_5 + 9\cdot57\, v_6 \dots - 75\cdot2 = 0.$$

Die unvollständige Ausgleichung mit alleiniger Zuziehung der drei Winkelgleichungen liefert die Korrelaten

$$k_1' = -2\cdot700, \qquad k_2' = +1\cdot775, \qquad k_3' = +2\cdot325$$

und die partiellen Verbesserungen

$$v_1' = -0\cdot375 \qquad v_5' = +1\cdot775$$
$$v_2' = -0\cdot925 \qquad v_6' = +2\cdot325$$
$$v_3' = -0\cdot925 \qquad v_7' = +2\cdot325$$
$$v_4' = -1\cdot775 \qquad v_8' = -0\cdot375$$

Durch Substitution dieser Werte in die Bedingungsgleichungen erhält man die Umformungen

$$
\begin{array}{l}
v_1'' - v_2'' - v_3'' \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + v_8'' \dots\dots = 0 \\
\quad . \; v_2'' - v_3'' - v_4'' + v_5'' \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \\
v_1'' \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + v_6'' + v_7'' - v_8'' \dots = 0 \\
-18{\cdot}98\, v_1'' - 2{\cdot}14\, v_2'' - 2{\cdot}69\, v_3'' + 4{\cdot}79\, v_4'' - 0{\cdot}07\, v_5'' + 9{\cdot}57\, v_6'' \dots\dots - 35{\cdot}397 = 0.
\end{array}
$$

Jetzt kann man zur Weiterrechnung zwei Wege einschlagen.

1. Rechnet man nach § 41, so hat man die Gleichungen aufzulösen:

$$
\begin{array}{l}
4\,B + 2\,C + 2\,D - 19{\cdot}53 = 0 \\
2\,B + 4\,C \qquad\quad + \;\; 4{\cdot}31 = 0 \\
2\,B \qquad\quad + 4\,D - \;\; 9{\cdot}41 = 0
\end{array}
$$

$B = -8{\cdot}49 \qquad C = -5{\cdot}3225. \qquad D = -1{\cdot}8925.$

Damit bildet man

		KK
$K_1 = -18{\cdot}98 + B \dots - D =$	$-12{\cdot}3825$	$153{\cdot}33$
$K_2 = -2{\cdot}14 - B + C \dots =$	$+5{\cdot}3075$	$28{\cdot}17$
$K_3 = -2{\cdot}69 - B + C \dots =$	$0{\cdot}4775$	$0{\cdot}23$
$K_4 = +4{\cdot}79 \dots - C \dots =$	$0{\cdot}5325$	$0{\cdot}28$
$K_5 = -0{\cdot}07 \dots - C \dots =$	$-5{\cdot}2525$	$27{\cdot}59$
$K_6 = 9{\cdot}57 \dots\dots + D =$	$+7{\cdot}6775$	$58{\cdot}94$
$K_7 = \dots\dots\dots D =$	$-1{\cdot}8925$	$3{\cdot}58$
$K_8 = \dots\dots B \dots - D =$	$-6{\cdot}5975$	$43{\cdot}53$
zur Kontrolle ist $[K] =$	$0{\cdot}0000$	$315{\cdot}65$

$$k_4 = -\frac{w_4}{[K\,K]} = \frac{35{\cdot}397}{315{\cdot}65} = 0{\cdot}11214$$

$$
\begin{array}{ll}
v_1'' = -1{\cdot}388 & v_5'' = -0{\cdot}589 \\
v_2'' = +0{\cdot}595 & v_6'' = +0{\cdot}863 \\
v_3'' = +0{\cdot}053 & v_7'' = -0{\cdot}212 \\
v_4'' = -0{\cdot}060 & v_8'' = -0{\cdot}740.
\end{array}
$$

Endgültige Verbesserungen:

$$
\begin{array}{l}
v_1 = -0{\cdot}375 - 1{\cdot}388 = -1{\cdot}763 \\
v_2 = -0{\cdot}925 + 0{\cdot}595 = -0{\cdot}330 \\
v_3 = -0{\cdot}925 + 0{\cdot}053 = -0{\cdot}872 \\
v_4 = +1{\cdot}775 - 0{\cdot}060 = +1{\cdot}715 \\
v_5 = +1{\cdot}775 - 0{\cdot}589 = +1{\cdot}186 \\
v_6 = +2{\cdot}325 + 0{\cdot}863 = +3{\cdot}186 \\
v_7 = +2{\cdot}325 - 0{\cdot}212 = +2{\cdot}113 \\
v_8 = -0{\cdot}375 - 0{\cdot}740 = -0{\cdot}365.
\end{array}
$$

2. Rechnet man nach § 40, so liefert die vollständige Ausgleichung unter Zugrundelegung der umgeformten Bedingungsgleichungen die Korrelaten.

$k''_1 = +0.95205, \quad k''_2 = +0.59687, \quad k''_3 = +0.21223, \quad k''_4 = +0.11214$

und zur Kontrolle bis auf Abrundungsreste mit den Werten S. 246 im ersten Bande übereinstimmend:

$$k_1 = k'_1 + k''_1 = -2.700 + 0.95205 = -1.74795$$
$$k_2 = k'_2 + k''_2 = -1.775 + 0.59687 = -1.17813$$
$$k_3 = k'_3 + k''_3 = -2.325 + 0.21223 = -2.11277$$
$$k_4 = 0 + k''_4 = +0.11214$$

Die Weiterrechnung nach Gleichung (8) des § 40 ergibt dieselben v'' und daher auch dieselben v wie zuvor in Übereinstimmung mit den Resultaten S. 247 des ersten Bandes.

§ 43. Der Schreibersche Satz.

Man kann die Genauigkeit oder das Gewicht einer durch Beobachtungen zu bestimmenden Größe durch entsprechende Vermehrung der Beobachtungen beliebig steigern, wodurch aber auch die aufzuwendende Mühe in demselben Verhältnisse wächst. Es erhebt sich nun die Frage, ob bei einer vorgeschriebenen Anzahl von überschüssigen Beobachtungen die Genauigkeit der zu bestimmenden Größe erhöht werden kann, wenn gewisse, darauf besonderen Einfluß nehmende Elemente auf Kosten minder wichtiger Elemente häufiger beobachtet werden, ohne daß hiedurch das bestimmte Maß an Arbeit, Zeit und Mühe überschritten werde.

Verfolgt die Messung eines Dreiecksnetzes einen besonderen Zweck, z. B. die Vergrößerung einer direkt gemessenen Basis, so wird es gewiß vorteilhafter sein, anstatt alle vorhandenen Richtungen zu beobachten, die darauf verwendete Arbeit auf eine häufigere Beobachtung derjenigen Richtungen zu verwenden, durch welche die abzuleitende Seite am schärfsten bestimmt wird. Es wird also zu untersuchen sein, welche Elemente bei einem bestimmten Aufwand an Arbeit oder bei einer gegebenen Anzahl von Beobachtungen relativ häufiger zu bestimmen und welche Elemente unbeschadet der zu erreichenden Genauigkeit des Resultates weniger oft oder auch gar nicht zu beobachten sind.

Schreiber (1882), welcher diese Frage gestellt und zugleich auch beantwortet hat, kleidete diese wichtige Aufgabe in folgende Worte: „Es sei ein Dreiecksnetz vorgelegt, worin die Winkel roh angenähert bekannt sind. Welche Winkel müssen auf jeder Station

beobachtet werden und wie oft müssen sie beobachtet werden, damit bei konstanter Anzahl sämtlicher Beobachtungen im Netze das Gewicht G des plausibelsten Wertes von U so groß wie möglich werde?"

Als Vorbereitung zur Lösung dieser Aufgabe sei folgende Betrachtung angestellt. — Liegen n Winkelmessungen l_1 bis l_n mit den Wiederholungsgewichten g_1 bis g_n vor und ist U eine lineare Funktion aller ausgeglichenen Winkelwerte, so ist das Gewicht G von U nach § 60 des ersten Bandes, Gleichung (9), gegeben durch

$$\frac{1}{G} = \left[\frac{FF}{g}\right] = \frac{F_1^2}{g_1} + \frac{F_2^2}{g_2} + \cdots + \frac{F_n^2}{g_n}, \tag{1}$$

worin F_1 bis F_n als Funktionen der g durch folgende Ausdrücke bestimmt sind:

$$\left.\begin{aligned}
F_1 &= f_1 + a_1 \mathfrak{r}_1 + b_1 \mathfrak{r}_2 + \cdots + q_1 \mathfrak{r}_r \\
F_2 &= f_2 + a_2 \mathfrak{r}_1 + b_2 \mathfrak{r}_2 + \cdots + q_2 \mathfrak{r}_r \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F_n &= f_n + a_n \mathfrak{r}_1 + b_n \mathfrak{r}_2 + \cdots + q_n \mathfrak{r}_r
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{g}\right]\mathfrak{r}_1 + \left[\frac{ab}{g}\right]\mathfrak{r}_2 + \cdots + \left[\frac{aq}{g}\right]\mathfrak{r}_r + \left[\frac{af}{g}\right] &= 0 \\
\left[\frac{ab}{g}\right]\mathfrak{r}_1 + \left[\frac{bb}{g}\right]\mathfrak{r}_2 + \cdots + \left[\frac{bq}{g}\right]\mathfrak{r}_r + \left[\frac{bf}{g}\right] &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\
\left[\frac{aq}{g}\right]\mathfrak{r}_1 + \left[\frac{bq}{g}\right]\mathfrak{r}_2 + \cdots + \left[\frac{qq}{g}\right]\mathfrak{r}_r + \left[\frac{qf}{g}\right] &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die analytische Fassung der Schreiberschen Aufgabe lautet nun, es ist G zu einem Maximum zu machen unter der Bedingung, daß $g_1 + g_2 + \cdots + g_n = [g]$ konstant bleibt. Setzt man in (1) die Werte aus (2) ein, so wird

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{g_1}(f_1 + a_1 \mathfrak{r}_1 + b_1 \mathfrak{r}_2 + \cdots)^2 + \frac{1}{g_2}(f_2 + a_2 \mathfrak{r}_1 + b_2 \mathfrak{r}_2 + \cdots)^2 + \cdots$$

Durch Differentiation von $\frac{1}{G}$ nach allen $\mathfrak{r}$ erhält man die linken Seiten der Gleichungen (3), welche gleich Null sind; folglich sind auch die Differentialquotienten von $\frac{1}{G}$ nach allen $\mathfrak{r}$ gleich Null, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\left(\frac{1}{G}\right)}{d\mathfrak{r}_1} &= \frac{F_1}{g_1}a_1 + \frac{F_2}{g_2}a_2 + \cdots + \frac{F_n}{g_n}a_n = 0 \\
\frac{d\left(\frac{1}{G}\right)}{d\mathfrak{r}_2} &= \frac{F_1}{g_1}b_1 + \frac{F_2}{g_2}b_2 + \cdots + \frac{F_n}{g_n}b_n = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ usw.}
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Der Stellung der Aufgabe gemäß fungieren die Gewichte g als Veränderliche; bildet man dementsprechend die Differentialquotienten von $\frac{1}{G}$ nach allen g, so erhält man

$$\frac{d\left(\frac{1}{G}\right)}{dg_1} = -\frac{F_1^2}{g_1^2} + \frac{d\left(\frac{1}{G}\right)}{dx_1}\frac{dx_1}{dg_1} + \frac{d\left(\frac{1}{G}\right)}{dx_2}\frac{dx_2}{dg_1} + \cdots = -\frac{F_1^2}{g_1^2}$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{G}\right)}{dg_2} = -\frac{F_2^2}{g_2^2}, \quad \ldots \quad \frac{d\left(\frac{1}{G}\right)}{dg_n} = -\frac{F_n^2}{g_n^2},$$

somit ist das totale Differential von (1)

$$d\left(\frac{1}{G}\right) = -\left(\frac{F_1^2}{g_1^2}dg_1 + \frac{F_2^2}{g_2^2}dg_2 + \cdots + \frac{F_n^2}{g_n^2}dg_n\right). \qquad (5)$$

Dieses Resultat würde sich auch ergeben, wenn in (1) die F von den g unabhängig wären.

Um das Minimum von $\frac{1}{G}$ für $[g]$ = konstant zu entwickeln, schlagen wir den von Runge (1890) angegebenen Weg ein und führen zu diesem Behufe für die g die neuen Bezeichnungen

$$g_1 = x_1^2, \quad g_2 = x_2^2, \quad \ldots \quad g_n = x_n^2$$

ein, um anzudeuten, daß alle g notwendig positiv sein müssen. Man hat dann statt

$$\frac{d\left(\frac{1}{G}\right)}{dg_i} = -\frac{F_i^2}{g_i^2} \text{ zu setzen: } \frac{d\left(\frac{1}{G}\right)}{dx_i} = -\frac{2F_i^2}{g_i^2}x_i. \qquad (6)$$

Soll nun unter Einhaltung der Bedingung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - c = 0$$

$\frac{1}{G}$ ein Minimum werden, so hat man die mit einer unbestimmten Korrelate λ multiplizierte linke Seite dieser Bedingungsgleichung zu (1) hinzuzufügen und hierauf die Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach allen x gleich Null zu setzen. Der betreffende Ausdruck lautet:

$$\frac{1}{G} + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - c),$$

folglich ist allgemein $\quad \frac{d\left(\frac{1}{G}\right)}{dx_i} + 2\lambda x_i = 0, \; i = 1, 2, \ldots n$

und speziell mit Rücksicht auf (6)

$$\left(\frac{F_1^2}{g_1^2}-\lambda\right)x_1=0,\quad \left(\frac{F_2^2}{g_2^2}-\lambda\right)x_2=0,\cdots\left(\frac{F_n^2}{g_n^2}-\lambda\right)x_n=0. \quad (7)$$

Daraus geht hervor, daß entweder $x_i=0$ oder $\frac{F_i^2}{g_i^2}=\lambda$ sein muß. Da zwischen den Quotienten $\frac{F_1}{g_1}, \frac{F_2}{g_2}, \cdots \frac{F_n}{g_n}$ die r Bedingungsgleichungen (4) bestehen, wobei $n>r$ ist, so sieht man ein, daß von den Gewichten $g_1, g_2, \cdots g_n$ nur $n-r$ Gewichte willkürlich angenommen werden können, während die übrigen durch die Bedingungsgleichungen (4) dann schon bestimmt sind. Die Folge davon ist, daß von den Gleichungen $F_i^2:g_i^2=\lambda$ höchstens $n-r$ erfüllt sein können, so daß in den n Gleichungen (7) der Faktor $\left(\frac{F_i^2}{g_i^2}-\lambda\right)$ nur $(n-r)$-mal, der Faktor $x_i=\sqrt{g_i}$ aber r-mal Null wird (spezielle Fälle ausgenommen). Von den n Gewichten sind also nur so viele von Null verschieden, als zur Bestimmung der Funktion U selbst nötig sind.

Sind beispielsweise die r letzten Gewichte von g_{n-r+1} bis g_n, also auch die Größen x_{n-r+1} bis x_n gleich Null und bildet man die entsprechenden Quotienten $F_i:g_i$ für $i=n-r+1$ bis $i=n$, so sieht man, da mit Hinweis auf die Gleichungen (4) diese Quotienten keine unendlichen Werte geben können, daß auch F_{n-r+1} bis F_n Null sein müssen, und daher das Minimum von $\frac{1}{G}$ bestimmt ist durch den Ansatz:

$$min\left(\frac{1}{G}\right)=\left(\frac{F_1^2}{g_1}+\frac{F_2^2}{g_2}+\cdots+\frac{F_{n-r}^2}{g_{n-r}}\right)=\lambda\,(g_1+g_2+\cdots+g_{n-r})=$$
$$=\lambda\,(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-r}^2)=\lambda\,c.$$

Zugleich erkennt man, daß wegen $F_i^2=\lambda g_i^2$ (für $i=1,2,3,\cdots n-r$) die Beziehung besteht: $[F_1]+[F_2]+\cdots+[F_n]=\sqrt{\lambda}\,c=\sqrt{\frac{c}{G}}$.

Die günstigste Gewichtsverteilung wird also erhalten, wenn man in den Gleichungen (2) eine Anzahl r von den Größen F gleich Null setzt und daraus die übrigen berechnet. Von allen hiebei möglichen Fällen, deren Anzahl $\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1.2\cdots r}$ ist, gibt dann diejenige Kombination die günstigste Gewichtsverteilung, für welche die Summe $[\,|F|\,]$ am kleinsten erhalten wird. Diejenigen g, welche mit den nicht verschwindenden F gleichen Index besitzen, sind den absoluten Beträgen der entsprechenden F proportional zu setzen,

wobei der Proportionalitätsfaktor durch die gegebene Summe $[g]$ bestimmt ist; die einzelnen g_i sind demnach zu berechnen nach der Formel

$$g_i = \frac{|F_i|}{[\,|F_i|\,]}\,[g]. \tag{8}$$

Das Problem, in einem Dreiecksnetze die Gesamtarbeit der Winkelmessung auf die einzelnen Winkel des Netzes in der ökonomisch vorteilhaftesten Weise zu verteilen, so daß z. B. eine bestimmte Seite mit möglichst großem Gewichte erhalten werde, findet in der Gleichung (8) seine analytische Lösung. Dieser sogenannte „Schreibersche Satz" wird nach Jordan in folgender Weise ausgesprochen: „Wenn in einem Dreiecksnetze mit Bedingungsgleichungen eine Seite mit möglichst großem Gewichte G bei konstanter Summe $[g]$ der Winkelmessungsgewichte $g_1, g_2 \cdots$ bestimmt werden soll, so ist unter den hiezu möglichen Verteilungen der Gewichte $g_1, g_2 \cdots$ jedenfalls eine Verteilung, in welcher nur so viele Gewichte g wirklich vorkommen, als die Zahl der zur Bestimmung jener einen Seite unumgänglich nötigen Winkel beträgt, während die übrigen Gewichte g alle gleich Null zu setzen sind."

Der Schreibersche Satz über die günstigste Gewichtsverteilung wurde zuerst mitgeteilt von Schreiber selbst in der Abhandlung: „Die Anordnung der Winkelbeobachtungen im Göttinger Basisnetze" in der „Zeitschrift für Vermessungswesen", 1882. Bezugnehmende Schriften sind:

Bruns: „Über eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung" in „Abhandlungen der math.-phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften", 1886, S. 517.

Jordan: „Die günstigste Gewichtsverteilung" in Zeitschr. f. Verm.", 1888, S. 641.

Simon: „Gewichtsbestimmungen für Seitenverhältnisse in schematischen Dreiecksnetzen" in „Veröffentl. des Königl. Preuß. Geodät. Instituts", 1889.

Runge: „Der Schreibersche Satz" in „Zeitschr. f. Verm.", 1890, S. 21.

Eggert: „Über die günstigsten Punktlagen beim Einschneiden" in „Zeitschr. f. Math. u. Physik", 1903, S. 145.

Helmert: „Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate", 1907, S. 553.

Klingatsch: „Über die günstigste Anordnung der Winkelmessungen in einem Dreieck" in „Österr. Zeitschr. f. Verm.", 1908, S. 359.

III. Abschnitt.

Aufstellung empirischer Formeln.

A. Erweiterte Auffassung des Ausgleichungsproblems.

§ 44. Die Ausgleichungskurve und die Interpolationsformel.

Hat man entsprechend der stetigen Funktion $y = f(x)$ für bestimmte Argumente $x_1, x_2, \cdots x_n$ die zugeordneten Funktionswerte $y_1, y_2, \cdots y_n$ durch Beobachtung erhalten und trägt die Argumente x als Abszissen, die zugehörigen Funktionswerte y als Ordinaten eines ebenen rechtwinkeligen Koordinatensystems auf, so liefern die zusammengehörigen Wertepaare $x_1, y_1; x_2, y_2; \cdots x_n, y_n$ n Punkte P_1, P_2, $\cdots P_n$, welche — durch einen kontinuierlichen Linienzug miteinander verbunden — den zwischen P_1 und P_n begrenzten Teil der durch die Gleichung $y = f(x)$ definierten Kurve zur Darstellung bringen, vorausgesetzt, daß die beobachteten Größen fehlerlos in die graphische Darstellung eingehen.

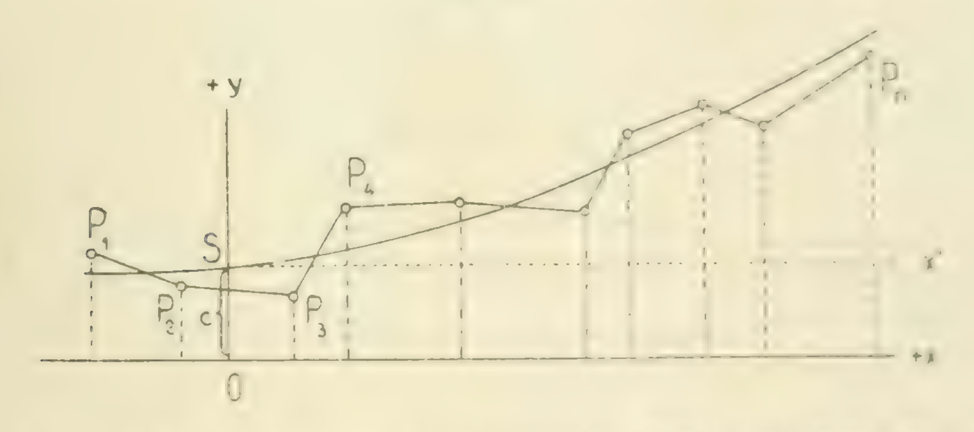
Infolge der Beobachtungsfehler werden aber die geometrischen Darstellungen der Beobachtungswerte von dem regelmäßigen Verlaufe der dem analytischen Ausdrucke der Funktion $y = f(x)$ entsprechenden stetigen Kurve insofern abweichen, als der die Punkte P_1, P_2, $\cdots P_n$ verbindende Linienzug unregelmäßige Ein- und Ausbiegungen aufweisen wird. Sache der Ausgleichungsrechnung ist es dann, zwischen die durch Beobachtungen bestimmten Punkte eine Kurve so verglichen hindurchzulegen, daß sie sich den gegebenen Punkten „möglichst gut anschließt" oder „am besten anpaßt". Diese Kurve wird die **Ausgleichungskurve** genannt.

Ein ähnliches Verhalten zeigen auch zusammengehörige Wertepaare (x, y), für welche die Funktion, welche die Beziehung zwischen den unabhängigen und den abhängigen Variablen darzustellen hat, ihrer Form nach unbekannt ist. Dann liegt die Aufgabe vor, die für

ganz bestimmte Argumentwerte x durch Beobachtungen erlangten Funktionswerte y durch eine ausgleichende Kurve oder einen analytischen Ausdruck näherungsweise darzustellen. Mit Hilfe dieses Ausdruckes, welcher die Interpolationsformel genannt wird, ist man imstande, zu jedem beliebigen Argumente den zugeordneten Funktionswert, der sonst durch Beobachtung oder Messung erhalten wird, zu berechnen, allerdings mit der Einschränkung, daß die so erhaltene Interpolationsformel nur innerhalb des Bereiches jener Argumentwerte, welche durch Beobachtungen erhalten wurden, volle Geltung besitzt.

Die Interpolationsformel ist das Ergebnis einer analytischen Untersuchung, die Ausgleichungskurve das Ergebnis des graphischen Verfahrens zur Ermittlung der wahrscheinlichsten oder vorteilhaftesten Werte einer Funktion, welche gegebenen Argumenten entspricht.

Fig. 39.



In den in der Praxis sich darbietenden Fällen wird der Funktion $y=f(x)$ meistens die Form

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_m x^m$$

gegeben, wo $a_0, a_1, a_2, \cdots a_m$ Parameter sind, die durch Ausgleichung ermittelt werden sollen. Die diese Funktion darstellende Kurve ist für $m=1$ eine Gerade, für $m=2$, $m=3$ usw. eine Parabel der 2-ten, 3-ten $\cdots$ Ordnung. Jedes Wertpaar (x, y) oder jeder Kurvenpunkt P liefert eine derartige Gleichung zur Bestimmung der unbekannten Parameter. Ist nun die Anzahl der gegebenen Kurvenpunkte größer als die der Parameter, so liegt in erweiterter Auffassung des Ausgleichungsproblems eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung vor, welche nach der Methode der kleinsten Quadrate gelöst werden kann.

Die ausgleichende Kurve kann graphisch oder rechnerisch bestimmt werden. In Fig. 39 erscheint dieselbe zwischen den Punkten

P_1 bis P derart durchgelegt, daß sie sich dem Augenmaße nach allen Punkten gleichmäßig am besten anschmiegt. Ein strenges Hineinlegen nach dem Prinzipe des „besten Anschmiegens" läßt sich aber graphisch nicht leicht erreichen, abgesehen davon, daß ein geometrisch anwendbares Maß für die Beurteilung des Anschmiegens oder Anpassens einer Kurve an ein System zerstreuter Punkte von vornherein sich nicht angeben läßt

Setzt man aber fest, daß diejenige Kurve, die am besten sich anschmiegende ist, für welche die Summe der Quadrate der Abstände aller durch die Beobachtungen gegebenen Punkte von der ausgleichenden Kurve ein Minimum wird, so stellt sich die der Methode der kleinsten Quadrate entsprechende rechnerische Ausgleichung einfacher und bequemer als die graphische.

Die Ordinate des Schnittpunktes S der Ausgleichungskurve mit der Ordinatenachse stellt den wahrscheinlichsten Wert der absoluten Größe a_0 dar (in der Fig. mit c bezeichnet), während die zwischen der Kurve und der durch S gelegten Abszissenparallelen Sx' abgeschnittenen Ordinatenstücke die Summe der Glieder $a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ repräsentiert. Für $m = 1$ geht die Kurve in eine Gerade $y = a_0 + a_1 x$ oder in üblicher Schreibweise $y = a x + b$ über; sie heißt die „Ausgleichungsgerade", wenn in deren Gleichung die wahrscheinlichsten oder vorteilhaftesten Werte der Unbekannten a, b eingesetzt werden.

Liegen mehrere durch Beobachtungen erhaltene Gleichungen dieser Art vor:

$$\begin{aligned} y_1 &= a x_1 + b \\ y_2 &= a x_2 + b \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_n &= a x_n + b, \end{aligned}$$

und werden hieraus die unbekannten Parameter a, b nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, so werden sich nach Einführung der so berechneten Parameter in die gegebenen Gleichungen Widersprüche v ergeben, welche aber nicht von den Beobachtungsfehlern allein herrühren, sondern auch infolge der Abweichung der genäherten Darstellung der Funktionswerte von den theoretischen Funktionswerten erzeugt werden. Berechnet man nach der Methode der kleinsten Quadrate die Werte der Parameter a und b, so kann die Formel

$$y = a x + b$$

als diejenige bezeichnet werden, welche den Beobachtungen in ihrer Gesamtheit „möglichst genau genügt". Das Minimum von $[v v]$ ist aber dann nicht mehr ein „Maß der Genauigkeit" der Beobachtungen, sondern ein „Maß für das Genügen" der empirischen Formel.

§ 45. Widerspruchslose Ausgleichung.

Hat man zu den Argumenten $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Beobachtungen $y_1, y_2, \ldots y_n$ erhalten, wobei die zusammengehörigen Werte x_i, y_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} a x_1 + b - y_1 = 0 \\ a x_2 + b - y_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a x_n + b - y_n = 0 \end{array}\right| \qquad (1)$$

erfüllen sollen, so ergeben sich die vorteilhaftesten Werte von a und b nach dem Problem der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen aus den Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [x x]\, a + [x]\, b - [x y] = 0 \\ [x]\, a + n\, b - [y] = 0 \end{array}\right| \qquad (2)$$

Werden die hieraus ermittelten Parameter a und b in die Gleichungen (1) eingesetzt, so werden sie nicht auf Null ausgehen, sondern folgende Widersprüche ergeben:

$$\left.\begin{array}{l} a x_1 + b - y_1 = v_1 \\ a x_2 + b - y_2 = v_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a x_n + b - y_n = v_n \end{array}\right| \qquad (3)$$

Diese Widersprüche, die so beschaffen sind, daß deren Quadratsumme ein Minimum bildet, können auch ganz zum Verschwinden gebracht werden, und zwar dadurch, daß an den Größen x, y entsprechende Korrektionen $\Delta x, \Delta y$ angebracht werden. Die vorteilhaftesten Korrektionen werden hiebei diejenigen sein, deren Quadratsumme ein Minimum ist. Setzt man statt x_i, y_i beziehungsweise $x_i + \Delta x_i$, $y_i + \Delta y_i$, so müssen die Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{l} a (x_1 + \Delta x_1) + b - (y_1 + \Delta y_1) = 0 \\ a (x_2 + \Delta x_2) + b - (y_2 + \Delta y_2) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a (x_n + \Delta x_n) + b - (y_n + \Delta y_n) = 0 \end{array}\right| \qquad (4)$$

oder mit Rücksicht auf (3)

$$\left.\begin{array}{l} a \Delta x_1 - \Delta y_1 + v_1 = 0 \\ a \Delta x_2 - \Delta y_2 + v_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a \Delta x_n - \Delta y_n + v_n = 0. \end{array}\right| \qquad (5)$$

Sollen die Korrektionen $\Delta x_i, \Delta y_i$ die kleinsten Werte annehmen, so muß nach dem Problem der Ausgleichung **bedingter Beobachtungen**

$$\{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2\} = min \tag{6}$$

sein. Damit den beiden Forderungen (5) und (6) gleichzeitig entsprochen werde, muß nach § 54 des I. Bandes, S. 211, für jede Gleichung des Systems (5) der Ausdruck

$$\{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2\} + 2k(a\,\Delta x_i - \Delta y_i + v_i)$$

ein absolutes Minimum sein: es müssen daher die partiellen Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach Δx_i und Δy_i einzeln gleich Null werden. Die Ausführung der Differentiation gibt:

$$2\,\Delta x_i\,d(\Delta x_i) + 2\,k\,a\,d(\Delta x_i) = 0$$
$$2\,\Delta y_i\,d(\Delta y_i) + 2\,k\;d(\Delta y_i) = 0$$

oder $\qquad \Delta x_i = -a\,k, \qquad \Delta y_i = -k,$

folglich ist $\qquad a\,\Delta x_i - \Delta y_i + v_i = k\,(1 + a^2) + v_i = 0$

und $\qquad k = \dfrac{-v_i}{1 + a^2}.$

$$\Delta x_i = \frac{-a\,v_i}{1 + a^2}, \qquad \Delta y_i = \frac{v_i}{1 + a^2}.$$

Damit gehen die Gleichungen (4) über in:

$$a\left(x_i - \frac{a\,v_i}{1 + a^2}\right) + b - \left(y_i + \frac{v_i}{1 + a^2}\right) = 0;$$

sie sind so beschaffen, daß sie auch einzeln die Ausgleichungsgerade **ohne Widerspruch** zur Darstellung bringen.

Beispiel. Gegeben seien die 4 Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 40), die in einer Geraden liegend angenommen werden:

$$\left.\begin{array}{l} \qquad\quad y \;\; = \;\; x\,a + b \\ P_1 \cdots - 0{\cdot}46 = 1{\cdot}09\,a + b \\ P_2 \cdots \quad 0{\cdot}34 = 1{\cdot}12\,a + b \\ P_3 \cdots - 0{\cdot}01 = 1{\cdot}54\,a + b \\ P_4 \ldots - 0{\cdot}67 = 1{\cdot}82\,a + b. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Die Normalgleichungen hiezu lauten:

$$8{\cdot}12\,a + 5{\cdot}57\,b + 0{\cdot}31 = 0$$
$$5{\cdot}57\,a + 4{\cdot}00\,b - 0{\cdot}14 = 0;$$

die Auflösung gibt: $a = -1{\cdot}388, \qquad b = +1{\cdot}968,$

folglich lautet die Gleichung der Ausgleichungsgeraden:

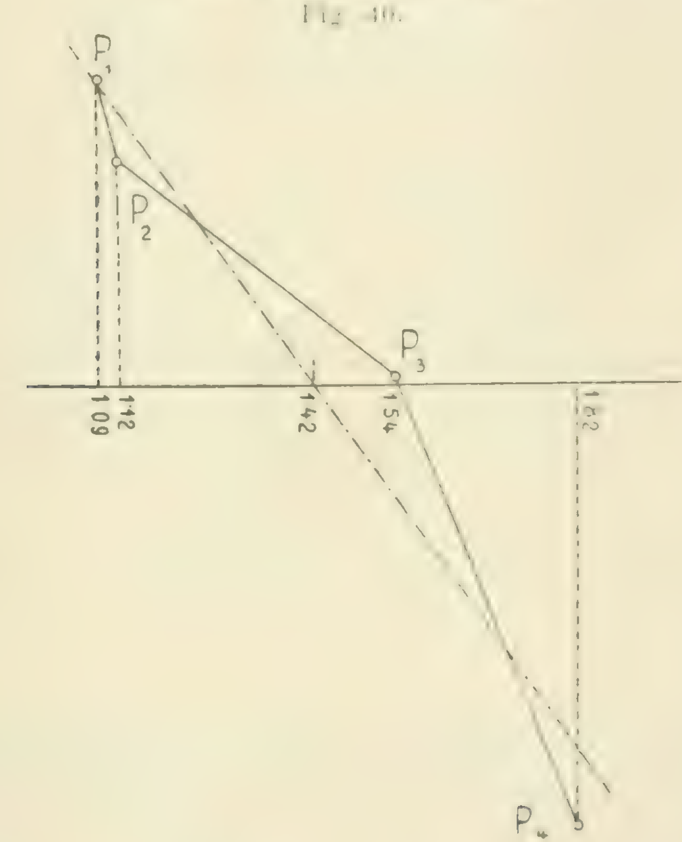
$$y = -1·388\,x + 1·968$$

Dieselbe kann mit Hilfe der beiden Normalgleichungen, deren jede einen Punkt der Ausgleichungsgeraden liefert, gezeichnet, beziehungsweise kontrolliert werden. Dividiert man nämlich die Normalgleichungen durch die betreffenden Koeffizienten von b, so erhält man

$$1·458\,a + b + 0·056 = 0$$

$$1·392\,a + b - 0·036 = 0,$$

Fig. 46.



folglich sind $x = -1·458$, $y = -0·056$ und $x = -1·392$, $y = +0·036$ die Koordination zweier Punkte der Ausgleichungsgeraden, wovon man sich leicht überzeugen kann. Die in der Richtung der Ordinaten gemessenen Abstände der gegebenen Punkte von der ausgleichenden Geraden sind die Widersprüche v; deren numerischen Werte ergeben sich, wenn in den Gleichungen (7) die wahrscheinlichsten Werte der Parameter $a = -1·388$, $b = +1·968$ eingesetzt werden, nämlich:

$$v_1 = -1·09 \,.\, 1·388 + 1·968 - 0·46 = -0·005$$
$$v_2 = -1·12 \,.\, 1·388 + 1·968 - 0·34 = +0·073$$
$$v_3 = -1·54 \,.\, 1·388 + 1·968 - 0·01 = -0·180$$
$$v_4 = -1·82 \,.\, 1·388 + 1·968 + 0·67 = +0·112$$
$$[v] = 0·000.$$

Sollen die aus Messungen hervorgegangenen Werte x, y so geändert werden, daß alle r verschwinden, so berechnen sich die betreffenden Korrektionen mit Hilfe der Korrelaten

$$k_1 = \frac{-r_1}{1 + a^2} = \frac{0{\cdot}005}{2{\cdot}927} = -0{\cdot}002$$

$$k_2 = \frac{-r_2}{1 + a^2} = \frac{-0{\cdot}073}{2{\cdot}927} = -0{\cdot}025$$

$$k_3 = \frac{-r_3}{1 + a^2} = \frac{0{\cdot}180}{2{\cdot}927} = -0{\cdot}062$$

$$k_4 = \frac{-r_4}{1 + a^2} = \frac{-0{\cdot}112}{2{\cdot}927} = -0{\cdot}038$$

wie folgt:

$$\begin{array}{rl@{\qquad}rl} \Delta x = & -0{\cdot}002 & \Delta y = & -0{\cdot}002 \\ & -0{\cdot}035 & & -0{\cdot}025 \\ & -0{\cdot}085 & & -0{\cdot}062 \\ & -0{\cdot}053 & & -0{\cdot}038 \\ \hline [\Delta x] = & -0{\cdot}001 & [\Delta y] = & -0{\cdot}001 \end{array}$$

Die ursprünglich einander widersprechenden Gleichungen (7) gehen damit in folgende widerspruchslose Gleichungen über:

$$\begin{aligned} +0{\cdot}458 &= 1{\cdot}088\,a + b \\ -0{\cdot}365 &= 1{\cdot}155\,a + b \\ -0{\cdot}052 &= 1{\cdot}455\,a + b \\ -0{\cdot}632 &= 1{\cdot}873\,a + b. \end{aligned}$$

§ 46. Bestimmung einer geraden Grenzstrecke.

Professor Koll hat in seiner „Methode der kleinsten Quadrate", S. 185, folgende Aufgabe gestellt: „In einem Walde sind an einer verdunkelten (anscheinend) geraden Grenzstrecke 5 Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 aufgefunden worden, welche Punkte der Grenzlinie sein sollen. Die Interessenten haben sich dahin geeinigt, daß die gerade Linie, die sich möglichst gut an die aufgefundenen Punkte anschließt, als Besitzgrenze festgesetzt werden soll. Zur Lösung der sich hieraus ergebenden Aufgabe ist an der Grenze im Anschluß an bereits bestimmte Polygonpunkte ein Polygonzug gelegt worden und die Punkte P_1 bis P_5 sind von diesem Polygonzuge aus eingemessen worden, wonach die Koordinaten für sämtliche Punkte im allgemeinen Koordinatensystem berechnet worden sind. Diese Koordinaten sind dann auf eine Abszissenachse transformiert worden, die ungefähr parallel zu der zu bestimmenden Grenzlinie liegt, wodurch die folgenden Koordinaten erhalten worden sind:

P_n	Abszissen	Ordinaten
P_1	$x_1 = 0·00$	$y_1 = -1·10$
P_2	$x_2 = 712·53$	$y_2 = -0·24$
P_3	$x_3 = 1318·42$	$y_3 = -2·95$
P_4	$x_4 = 1731·04$	$y_4 = -2·18$
P_5	$x_5 = 2026·60$	$y_5 = -[illegible]$

Die zu suchende Gerade ist bestimmt, sobald aus diesen Maßen der wahrscheinlichste Wert a des Richtungskoeffizienten der Geraden und der wahrscheinlichste Wert b des Abschnittes der Geraden auf der Ordinatenachse ermittelt ist. Bei Ermittlung dieser Werte können die gegebenen Abszissen x als fehlerfreie wahre Werte angesehen werden, da bei der gewählten Lage der Abszissenachse ein in den zulässigen Grenzen liegender Fehler der Abszissen die Lage der zu bestimmenden Geraden nicht wesentlich beeinflussen kann. Demnach können die Zahlenwerte der Ordinaten y als die einzigen vorliegenden Beobachtungsergebnisse angesehen werden." (Fig. 41.)

Fig. 41.



Die Fehlergleichungen lauten, wenn die für die auszuführenden Rechnungen unbequemen Abszissen x durch $0·001\,x$ ersetzt werden und dafür $1000\,a = A$ statt a eingeführt wird

$$0·000\,A + b + 1·10 = r_1$$
$$0·713\,A + b + 0·24 = r_2$$
$$1·318\,A + b + 2·95 = r_3$$
$$1·731\,A + b + 2·18 = r_4$$
$$2·026\,A + b + 4·0[illegible] = r_5$$

Die Auflösung gibt: $A = +2·8[illegible]2, \quad b = -1·4[illegible]2.$

Sohin lautet die Gleichung der geraden Linie:

$$y = 0·0028[illegible]2\,x - 1·4[illegible]2.$$

Aus den scheinbaren Fehlern der einzelnen Gleichungen:

$r_1 = -0·332, \; r_2 = -0·727, \; r_3 = -0·894, \; r_4 = -1·04[illegible], \; r_5 = -[illegible]·408,$

erhält man den „mittleren Fehler" der Beobachtungen:

$$\mu = \sqrt{\frac{[v\,v]}{5-2}} = \pm 0{\cdot}97\ m,$$

der aber hier nicht als Maß der Messungsgenauigkeit, sondern als Maß für das Genügen der den gegebenen Punkten angepaßten Geraden aufzufassen ist.

Wollte man die etwa durch Grenzsteine markierten fünf Punkte derart verschieben, daß sie unter den geringsten Ortsveränderungen genau in die ausgeglichene Grenzlinie zu liegen kommen, so hat man an den Punktkoordinaten nach § 45, S. 194, allgemein folgende Korrektionen anzubringen:

$$\Delta x_i = \frac{-a\,v_i}{1+a^2}, \qquad \Delta y_i = \frac{v_i}{1+a^2}.$$

Die Größe a ist der Richtungskoeffizient der Geraden, also $a = tg\,\alpha$, folglich kann man auch schreiben:

$$\Delta x_i = -\,v_i\, sin\,\alpha\, cos\,\alpha, \qquad \Delta y_i = v_i\, cos^2\,\alpha.$$

Da in diesem Beispiele die Koordinaten auf eine Abszissenachse transformiert worden sind, die annähernd parallel zu der zu bestimmenden Grenzlinie verläuft, so ist α eine praktisch verschwindende Größe, also

$$cos\,\alpha = 1 \text{ und } sin\,\alpha = 0,$$

so daß man auch setzen kann:

$$\Delta x_i = 0, \qquad y_i = v_i,$$

d. h. es sind in diesem besonderen Falle nur die Ordinaten zu korrigieren, und zwar um den vollen Betrag der scheinbaren Fehler, was ohne weiteres einleuchtet.

In dem folgenden Beispiele wird der allgemeinere Fall zur Untersuchung gelangen, wo sowohl die Ordinaten, als auch die Abszissen zur Verbesserung gelangen.

§ 47. Die geometrische Form des Amphitheaters in Pola.

Zur Lösung der Frage, ob die geometrische Form des Amphitheaters in Pola nur eine ellipsenähnliche sei oder einer vollkommenen Ellipse entspreche, hat der in den Ruhestand getretene Di-

rektor des k. k. Triangulierungs- und Kalkulbureaus Hofrat A. Broch folgende Untersuchung angestellt*).

Die allgemeine Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung ist

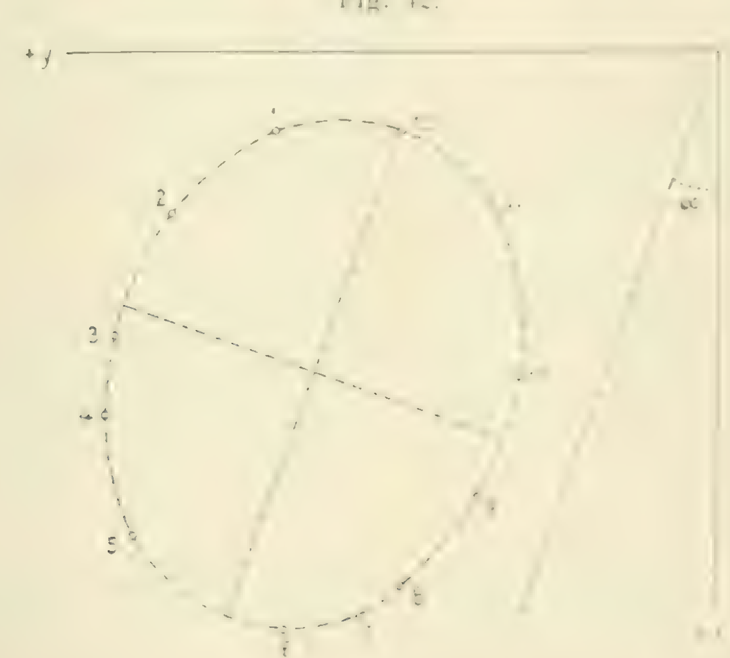
$$a y^2 - b x y + c x^2 + d y - e x - f = 0$$

oder wenn man durch f dividiert und die Quotienten $\frac{a}{f}$, $\frac{b}{f}$ usw. durch A, B usw. bezeichnet:

$$A y^2 + B x y - C x^2 - D y + E x = 1 \qquad (1)$$

Zur eindeutigen Bestimmung der 5 Unbekannten A, B, C, D, E sind 5 Bedingungen, z. B. die Koordinaten x, y von 5 Punkten

Fig. 42.



der Kurve notwendig. Um diese Unbekannten für jene Kurve zu bestimmen, welche der Form des Amphitheaters am meisten sich anschmiegt, wurden aber nicht 5, sondern 12 schicklich gelegene Punkte der inneren Umfangsmauer der Arena geometrisch eingemessen, (Fig. 42), und deren Koordinaten bestimmt, so daß durch die Auflösung der 12 entsprechenden Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten A, B, C, D und E ermittelt werden konnten. Die Rechnung stellt sich wie folgt:

Bildung der Koeffizienten der Gleichungen (1):

*) Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1909, S. 325—335.

Punkte der Kurve	Deren Koordinaten in Metern bezogen auf das Landes-Koordinatensystem, Anfangspunkt „Krimberg"		Um die approximativen Koordinaten des Mittelpunktes der Kurve 49.102 m, 117.080 m reduzierte		Reduzierte		
	Y	X	y	x	y^2	xy	x^2
1	49.111·55	117.020·00	+ 9·55	— 60·00	91·2025	— 573·00	3600·0000
2	49.137·50	117.040·00	+ 35·50	— 40·00	1260·2500	— 1420·00	1600·0000
3	49.152·00	117.070·00	+ 50·00	— 10·00	2500·0000	— 500·00	100·0000
4	49.155·05	117.090·00	+ 53·05	+ 10·00	2814·3025	+ 530·50	100·0000
5	49.147·75	117.120·00	+ 45·75	+ 40·00	2093·0625	+ 1830·00	1600·0000
6	49.110·00	117.144·00	+ 8·00	+ 64·00	64·0000	+ 512·00	4096·0000
7	49.090·00	117.140·00	— 12·00	+ 60·00	144·0000	— 720·00	3600·0000
8	49.080·00	117.134·35	— 22·00	+ 54·35	484·0000	— 1195·70	2953·9225
9	49.060·00	117.111·70	— 42·00	+ 31·70	1764·0000	— 1331·40	1004·8900
10	49.050·00	117.081·80	— 52·00	+ 1·80	2704·0000	— 93·60	3·2400
11	49.056·85	117.040·00	— 45·15	— 40·00	2038·5225	+ 1806·00	1600·0000
12	49.079·10	117.020·00	— 22·90	— 60·00	524·4100	+ 1374·00	3600·0000

Die Normalgleichungen lauten allgemein:

$$
\begin{aligned}
[y^2 y^2]\,A + [y^2\,xy]\,B + [y^2 x^2]\,C + [y^2 y]\,D + [y^2 x]\,E + [y^2] &= 0\\
[xy\;xy]\,B + [xy\,x^2]\,C + [xy\,y]\,D + [xy\,x]\,E + [xy] &= 0\\
[x^2 x^2]\,C + [x^2 y]\,D + [x^2 x]\,E + [x^2] &= 0\\
[y^2]\,D + [y\,x]\,E + [y] &= 0\\
[x^2]\,E + [x] &= 0
\end{aligned}
$$

und numerisch

Normal-Gleichung	Koeffizienten von A	B	C	D	E	Absolute Glieder	
Nr. 1	35,260·737	+ 3,382 274	+ 15,366·201	+ 85.058	+ 17.805	+ 16.481.7500	= 0
„ 2		+ 15,366·201	+ 1,067·183	+ 17.805	— 97.787·2	+ 218.8000	= 0
„ 3			+ 73,092·689	— 97.787	+ 174.550·5	+ 23.858·0525	= 0
„ 4				+ 16.482	+ 218·8	+ 5·8000	= 0
„ 5					23.858·1	+ 51·8500	= 0

Die Auflösung der Normalgleichungen ergibt:

$$
\begin{aligned}
A &= -\,0{\cdot}000\,366\,087\\
B &= +\,0{\cdot}000\,085\,719\\
C &= -\,0{\cdot}000\,251\,462\\
D &= -\,0{\cdot}000\,051\,029\\
E &= +\,0{\cdot}000\,291\,489.
\end{aligned}
$$

Es lautet sohin die Gleichung der Kurve, welche sich der inneren Abgrenzungslinie des Amphitheaters am meisten anschließt:

$$-0·000366087\,y^2 - 0·0000857\text{[illegible]}\,xy - 0·000261\text{[illegible]}\,x^2 - 0·00006\text{[illegible]}\,y - 0·000\text{[illegible]}\,x - 1 = 0$$

Da $B^2 - 4\,A\,C < 0$, so entspricht die Gleichung dieser Kurve einer Ellipse.

Zur Beurteilung, in welchem Grade diese Ellipse den gewählten 12 Punkten und sohin auch der inneren Randlinie des Amphitheaters sich anschließt, substituiere man die gefundenen Werte für A, B, C, D und E in die Gleichungen (1), wodurch sich nach der allgemeinen Fehlergleichung

$$A\,y^2 + B\,x\,y + C\,x^2 + D\,y + E\,x + 1 = v \qquad (2)$$

folgende Widersprüche v ergeben:

Nummer d. Gleichung	Numerische Werte für					Absolutes Glied	Widersprüche v
	$A\,y^2$	$B\,x\,y$	$C\,x^2$	$D\,y$	$E\,x$		
1	— 0·0334	— 0·0491	— 0·9053	— 0·0005	— 0·0175	+ 1	= — 0·0058
2	— 0·4614	— 0·1217	— 0·4023	— 0·0018	— 0·0117	+ 1	= + 0·0011
3	— 0·9152	— 0·0429	— 0·0251	— 0·0026	— 0·0029	+ 1	= + 0·0113
4	— 1·0305	+ 0·0455	— 0·0251	— 0·0027	— 0·0029	+ 1	= — 0·0087
5	— 0·7662	+ 0·1569	— 0·4023	— 0·0023	— 0·0117	+ 1	= — 0·0022
6	— 0·0234	+ 0·0439	— 1·0300	— 0·0004	+ 0·0187	+ 1	= + 0·0088
7	— 0·0527	— 0·0617	— 0·9053	+ 0·0006	+ 0·0175	+ 1	= — 0·0016
8	— 0·1772	— 0·1025	— 0·7428	+ 0·0015	+ 0·0158	+ 1	= — 0·0052
9	— 0·6458	— 0·1141	— 0·2527	+ 0·0021	+ 0·0092	+ 1	= — 0·0013
10	— 0·9899	— 0·0080	— 0·0008	+ 0·0027	+ 0·0005	+ 1	= + 0·0045
11	— 0·7463	+ 0·1548	— 0·4023	+ 0·0023	— 0·0117	+ 1	= — 0·0032
12	— 0·1920	+ 0·1178	— 0·9053	+ 0·0012	— 0·0175	+ 1	= + 0·0042

$[v\,v] =$ [illegible]

Schon die Geringfügigkeit der Widersprüche v läßt erkennen, daß die gefundene Ellipse von der inneren Randlinie des Amphitheaters nur sehr wenig abweicht. Besser wird aber der Grad der Übereinstimmung dieser beiden Kurven veranschaulicht, wenn die wahrscheinlichsten Verbesserungen ermittelt werden, die an den Koordinaten x, y der 12 Punkte angebracht werden müßten, damit ein vollkommener, widerspruchsloser Anschluß erzielt werde, so daß auch die Widersprüche v verschwinden. Für jeden Punkt besteht dann die Bedingungsgleichung

$$A(y + v_y)^2 + B(x + v_x)(y + v_y) + C(x + v_x)^2 + D(y + v_y) + E(x + v_x) + 1 = 0.$$

Entwickelt man die angezeigten Quadrate und Produkte, so erhält man mit Rücksicht auf (2) diese Bedingungsgleichung in der Form:

$$2\,A\,y\,v_y + B\,x\,v_y + B\,y\,v_x + 2\,C\,x\,v_x + D\,v_y + E\,v_x + v = 0$$

oder

$$(2\,A\,y + B\,x + D)\,v_y + (B\,y + 2\,C\,x + E)\,v_x + v = 0.$$

Bezeichnet man zur Abkürzung die im voraus berechenbaren Koeffizienten von v_y und v_x mit p, beziehungsweise q, so kann man auch schreiben:

$$p\,v_y + q\,v_x + v = 0. \qquad (3)$$

Sollen die Koordinaten-Verbesserungen v_y, v_x gleichzeitig die kleinsten Werte annehmen, so muß für jeden Punkt

$$v_y^2 + v_x^2 = min \qquad (4)$$

sein und damit den beiden Forderungen (3) und (4) Genüge geleistet werde, muß der Ausdruck

$$(v_y^2 + v_x^2) - 2\,k\,(p\,v_y + q\,v_x + v)$$

ein absolutes Minimum werden, d. h. es müssen die partiellen Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach v_y und v_x einzeln gleich Null sein, nämlich

$$v_y - k\,p = 0 \quad \text{und} \quad v_x - k\,q = 0.$$

Folglich ist

$$p\,v_y + q\,v_x + v = k\,(p^2 + q^2) + v = 0,$$

$$k = \frac{-v}{p^2 + q^2} \quad \text{und} \quad v_y = \frac{-p\,v}{p^2 + q^2}, \quad v_x = \frac{-q\,v}{p^2 + q^2}.$$

Die Durchführung der Rechnung ergibt sodann:

Nr.	v_y	v_x	v_y^2	v_x^2
1	— 0·06	+ 0·16	0·0036	0·0256
2	+ 0·02	— 0·02	0·0004	0·0004
3	+ 0·28	— 0·07	0·0784	0·0049
4	— 0·25	0·00	0·0625	0·0000
5	— 0·06	— 0·03	0·0036	0·0009
6	0·00	+ 0·27	0·0000	0·0729
7	+ 0·02	— 0·04	0·0004	0·0016
8	+ 0·09	— 0·12	0·0081	0·0144
9	+ 0·02	— 0·02	0·0004	0·0004
10	— 0·11	+ 0·01	0·0121	0·0001
11	+ 0·08	+ 0·05	0·0064	0·0025
12	— 0·05	— 0·13	0·0025	0·0169
			0·1784	0·1406

Die mittleren Koordinatenfehler sind

$$\mu_y = \sqrt{\frac{[vv]}{12}} = 0{\cdot}12, \quad \mu_x = \sqrt{\frac{[v'v']}{12}} = 0{\cdot}11$$

und der mittlere Punktfehler ist $M = \sqrt{\mu_y^2 + \mu_x^2} = 0{\cdot}16$.

Setzt man die um die Korrektionen v_y, v_x verbesserten Koordinaten $y + v_y$ und $x + v_x$ in die Fehlergleichungen (2) ein, so gehen diese widerspruchslos auf Null aus.

Zieht man in Erwägung, daß es bei dem verwitterten Zustande der die Umfassungsmauern des Amphitheaters bildenden Steine nicht möglich war, die Umfangsgrenzen auf 2 bis 3 Dezimeter genau zu bestimmen, so ist man mit Hofrat Broch zu dem Schlusse berechtigt, daß die römischen Architekten eine genau konstruierte Ellipse als Grundriß für den Bau der Arena in Pola angenommen haben.

Man kann die gefundene Ellipsengleichung auch dazu benutzen, um die Dimensionen der inneren Arenaellipse zu berechnen. Broch findet in der S. 199 zitierten Abhandlung

als große Achse : $129{\cdot}866\,m$,
als kleine Achse : $102{\cdot}560\,m$.

Der Richtungswinkel der großen Achse ergibt sich aus der Formel $tg\,2\,\alpha = -\frac{B}{A-C}$ zu $\alpha = 18^\circ 25' 42''$.

§ 48. Näherungsweise Berechnung von $\sqrt{x^2+y^2}$.

Professor Jordan hat in der Zeitschrift für Vermessungswesen. 1899, S. 357 die für die Berechnung der Schlußfehler von Polygonzügen dienliche Näherungsformel

$$s = \sqrt{x^2+y^2} = x + 0{\cdot}3\,y \text{ für } x > y$$

ohne Ableitung angegeben, hieran jedoch die Bemerkung geknüpft, daß eine Integration, ähnlich wie bei Dienger: „Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen", auf diese Formel führt. Nachstehend sei diese Integration durchgeführt.

Setzt man in $\sqrt{x^2+y^2} = x + c\,y$ *)

$$x = s\cos\varphi \qquad y = s\sin\varphi,$$

so ist $$s = \sqrt{x^2+y^2} = s(\cos\varphi + c\sin\varphi)$$
oder $$\cos\varphi + c\sin\varphi = 1.$$

---

*) Poncelet setzt bekanntlich $\sqrt{x^2+y^2} = a\,x + b\,y$

Somit lauten die Fehlergleichungen:

$$c \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 - 1 = v_1$$
$$c \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 - 1 = v_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$c \sin \varphi_n + \cos \varphi_n - 1 = v_n.$$

Die Bedingungsgleichung für das Minimum der Fehlerquadrate ist:

$$[\sin^2 \varphi]\, c + [\sin \varphi \,(\cos \varphi - 1)] = 0.$$

Geht man von den Summen auf die Integrale über, so erhält man die Normalgleichung:

$$c \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin \varphi \,(1 - \cos \varphi)\, d\varphi$$

und es ist:

$$c = \frac{\displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin \varphi \, d\varphi - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi}{\displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin^2 \varphi \, d\varphi}.$$

Da $\displaystyle\int \sin \varphi \, d\varphi = -\cos \varphi, \quad \int \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi,$

$$\int \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi,$$

so folgt

$$c = \frac{4 \sin \dfrac{\varphi_1 + \varphi_0}{2} \sin \dfrac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} - \sin(\varphi_1 + \varphi_0) \sin(\varphi_1 - \varphi_0)}{(\varphi_1 - \varphi_0) - \cos(\varphi_1 + \varphi_0) \sin(\varphi_1 - \varphi_0)}.$$

Führt man, weil $x > y$, für $tg\, \varphi = \dfrac{y}{x}$ die Grenzen 0 und 1 ein, so wird $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4} = 45^\circ$ und

$$c = \frac{16 \sin^2 22^\circ 30' - 2}{\pi - 2} = 0{\cdot}30059$$

$$s = x + 0{\cdot}30059\, y$$

oder abgerundet: $\sqrt{x^2 + y^2} = x + 0{\cdot}3\, y$.

Der mittlere Fehler dieser Formel beträgt etwa 4% in Teilen von x.

B. Bestimmung der Erdgestalt.

§ 49. Die Ausgleichungsprinzipien von Walbeck und Bessel.

In den „Astronomischen Nachrichten" [illegible] Bd., [illegible] und [illegible] Bd. 1842 hat Bessel „die Bestimmung der Achsen des elliptischen Rotationssphäroids, welches den vorhandenen Messungen von Meridianbögen der Erde am meisten entspricht", mit Hilfe der Formel für die Entfernung zweier Parallelkreise durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate vorgenommen*).

Werden die beiden Halbachsen der Meridianellipse durch a und b bezeichnet, wird

$$\frac{a-b}{a+b}=n=\frac{2}{3}\alpha-\frac{1}{9}\alpha^2-\ldots$$

gesetzt; sind φ und φ' die Polhöhen der Endpunkte eines Meridianbogenstückes von der Länge s; x und x' die an die beobachteten Polhöhen infolge der Ausgleichung anzubringenden Änderungen; schreibt man zur Abkürzung für die Länge des Bogens im Gradmaß oder die Amplitude $l=\varphi'-\varphi$ und für die mittlere Breite der Messung $L=\frac{\varphi'+\varphi}{2}$; bedeutet ferner g die mittlere Länge eines Meridiangrades und $\varrho=1:\sin 1''$, und nimmt man für g und α die Näherungswerte g_0 und α_0, so daß in den Ausdrücken

$$g=\frac{g_0}{1-i}\quad\text{und}\quad\alpha=\alpha_0(1-k)$$

i, k die Verbesserungen an g_0, α_0 darstellen, so lautet die Besselsche Formel zur Berechnung der Erdgestalt:

$$x'-x=\frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{3600}{g_0}s-l-\varrho\left[2\alpha_0\sin l\cdot\cos 2L-\frac{5}{6}\alpha_0^2\sin 2l\cdot\cos 4L-\ldots\right]\right\}+$$
$$+\left\{\frac{3600}{g_0\,\varepsilon}s\,i-\frac{\varrho}{\varepsilon}\left[2\alpha_0\sin l\cdot\cos 2L-\frac{5}{3}\alpha_0^2\sin 2l\cdot\cos 4L-\ldots\right]\right\}k,$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\varepsilon=1-2\alpha_0\cos l\cdot\cos 2L+\frac{5}{3}\alpha_0^2\cos 2l\cdot\cos 4L-\ldots$$

Bezeichnet man das absolute Glied mit m, den Koeffizienten von i mit a und jenen von k mit b, so erhält man obige Gleichung in der übersichtlichen Form:

$$x'-x=m+a\,i+b\,k.$$

*) Über die Ableitung dieser Formel vergleiche auch des Verfassers Abhandlung in der „Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen" 1910, S. 139.

Jede Gradmessung mit zwei astronomischen Polhöhenbestimmungen liefert eine derartige Gleichung für die Änderung der Polhöhenamplitude. Bei einer Gradmessung mit mehreren Polhöhenbestimmungen hat man für die Verbindung des südlichsten Punktes der Messung mit jedem nördlicheren Punkte eine ähnliche Fehlerdifferenzgleichung. Es besteht daher für eine Gradmessung mit $1+r$ astronomischen Stationen folgendes System von Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
x' - x &= a'\, i + b'\, k + m' = v' \\
x'' - x &= a''\, i + b''\, k + m'' = v'' \\
x''' - x &= a'''\, i + b'''\, k + m''' = v''' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^{(r)} - x &= a^{(r)}\, i + b^{(r)}\, k + m^{(r)} = v^{(r)}.
\end{aligned}
$$

Aus diesen r Fehlerdifferenzgleichungen bildet man für die erste Gradmessung die $1+r$ **Fehlergleichungen**:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1 \\
x_1' &= x_1 - a_1'\, i + b_1'\, k + m_1' \\
x_1'' &= x_1 + a_1''\, i + b_1''\, k + m_1'' \\
x_1''' &= x_1 + a_1'''\, i + b_1'''\, k + m_1''' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_1^{(r)} &= x_1 + a_1^{(r)}\, i + b_1^{(r)}\, k + m_1^{(r)}.
\end{aligned}
$$

Für eine zweite Gradmessung tritt an die Stelle des Zeigers 1 der Zeiger 2 und die Anzahl der Fehlergleichungen wird gleich jener der Polhöhenbestimmungen. Für die n-te Gradmessung mit $1+\omega$ astronomischen Stationen hat man ω Fehlerdifferenzgleichungen oder $1+\omega$ **Fehlergleichungen mit dem Index** n.

Jede Breitengradmessung liefert sohin ein Gleichungssystem mit denselben Unbekannten i, k, aber immer anderen Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Behufs Ermittlung der unbekannten Größen sind seit der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf das vorliegende Ausgleichungsproblem zwei verschiedene Wege betreten worden. Walbeck, der schon im Jahre 1819 die Bestimmung der Erddimensionen durch systematische Ausgleichung bewirkt hat, gründete die Berechnung darauf, daß er die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen den gemessenen und berechneten Polhöhenamplituden $[vv]$ zu einem Minimum machte. Der zweite Berechner Schmidt hat auf Veranlassung von Gauß im Jahre 1828 die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten Polhöhen selbst, $[xx]$, zu einem Minimum gemacht, ist aber im

Jahre 1830 zu dem Walbeckschen Prinzip wieder zurückgekehrt. Bessel hielt sich strenge an den Gaußschen Vorschlag und hat hiedurch den wissenschaftlichen Grund zu den meisten späteren Berechnungen der Erddimensionen gelegt.

Im Sinne der Walbeckschen Berechnungsweise ist bei Anwendung einer Gradmessung mit $1 + \omega$ astronomisch bestimmten Polhöhen folgende Summe auf ein kleinstes Maß zu bringen:

$$
\begin{aligned}
[r\,r] &= (a_1 i + b_1 k - m_1)^2 + (a_2 i + b_2 k - m_2)^2 + \cdots + (a_\omega i + b_\omega k - m_\omega)^2 \\
&= [a\,a]\, i^2 + 2\,[a\,b]\, i\,k + [b\,b]\, k^2 - 2\,[a\,m]\, i - 2\,[b\,m]\, k + [m\,m].
\end{aligned}
$$

Setzt man die partiellen Differentialquotienten dieser Summe nach den Unbekannten i und k gleich Null, so erhält man die beiden Normalgleichungen:

$$
\begin{aligned}
[a\,a]\, i + [a\,b]\, k - [a\,m] &= 0 \\
[a\,b]\, i + [b\,b]\, k - [b\,m] &= 0.
\end{aligned}
$$

Geht man mit den gefundenen i und k in die Fehlergleichungen für die Polhöhenänderungen, die wir jetzt mit $x_0, x_1, x_2, \ldots x_\omega$ bezeichnen wollen, ein, so ergeben sich die letzteren in folgender Weise. Aus dem Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
x_0 &= x_0 \\
x_1 &= x_0 - r_1 \\
x_2 &= x_0 - r_2 \\
&\cdots\cdots \\
x_\omega &= x_0 - r_\omega,
\end{aligned}
$$

worin die Widersprüche r in den Polhöhenamplituden in ihrer Gesamtheit bereits ein Minimum darstellen, bildet man für die Unbekannte x_0 die Normalgleichung:

$$
(1 + \omega)\, x_0 - [r] = 0
$$

und erhält hieraus

$$
x_0 = \frac{[r]}{1 + \omega}
$$

als die Polhöhenverbesserung des Ausgangspunktes der Amplitudenzählung, womit aus den einzelnen Fehlergleichungen auch die Verbesserungen aller übrigen Polhöhen erhalten werden.

Nach dem Gauß-Besselschen Rechnungsmodus ist folgende Summe zu einem Minimum zu machen:

$$
\begin{aligned}
[x\,x] &= x_0^2 + (x_0 + a_1 i + b_1 k - m_1)^2 + (x_0 + a_2 i + b_2 k - m_2)^2 + \cdots \\
&\quad + (x_0 + a_\omega i + b_\omega k - m_\omega)^2 = (1 + \omega)\, x_0^2 + 2\,[a]\, x_0\, i + [a\,a]\, i^2 + \\
&\quad + 2\,[b]\, x_0\, k + 2\,[a\,b]\, i\,k + [b\,b]\, k^2 - 2\,[m]\, x_0 - 2\,[a\,m]\, i - 2\,[b\,m]\, k + [m\,m]
\end{aligned}
$$

Setzt man die partiellen Differentialquotienten dieser Summe nach den Unbekannten x_0, i und k gleich Null, so erhält man die drei Normalgleichungen:

$$(1+\omega)x_0 + [a]\,i + [b]\,k + [m] = (1+\omega)\,x_0 + [v] = 0$$
$$[a]\,x_0 + [a\,a]\,i + [a\,b]\,k + [a\,m] = 0$$
$$[b]\,x_0 + [a\,b]\,i + [b\,b]\,k + [b\,m] = 0.$$

Durch Elimination der Unbekannten x_0 ergeben sich die beiden zur Bestimmung von i und k dienenden Normalgleichungen:

$$\left\{[a\,a] - \frac{[a]\,[a]}{1+\omega}\right\} i + \left\{[a\,b] - \frac{[a]\,[b]}{1+\omega}\right\} k + \left\{[a\,m] - \frac{[a]\,[m]}{1+\omega}\right\} = 0$$
$$\left\{[a\,b] - \frac{[a]\,[b]}{1+\omega}\right\} i + \left\{[b\,b] - \frac{[b]\,[b]}{1+\omega}\right\} k + \left\{[b\,m] - \frac{[b]\,[m]}{1+\omega}\right\} = 0.$$

Mit den daraus berechneten i, k und mit Hilfe der Normalgleichung für x_0 erhält man sämtliche Polhöhenänderungen in der gleichen, oben entwickelten Weise.

Läßt man jede einzelne Station die Rolle der südlichsten einnehmen, so ergeben sich nach dem Gauß-Besselschen Verfahren stets dieselben, sohin eindeutig bestimmten Resultate; der Walbeckschen Berechnungsart haftet jedoch insofern eine Unbestimmtheit an, als sie eine durch die willkürliche Wahl des Ausgangspunktes auftretende Verschiedenheit in den hiedurch erhaltenen, gleichberechtigten Schlußresultaten erzeugt, weshalb die Walbeckschen Formeln im Sinne der angestellten Betrachtung wegen der ungleichförmigen Behandlung der Verbesserungen zur Anwendung überhaupt nicht geeignet erscheinen.

Die von Ph. Fischer in seinen beachtenswerten „Untersuchungen über die Gestalt der Erde", 1868 (S. 116, 132—147, 158), gemachten Bemühungen, die Walbecksche Methode gegenüber dem Gauss-Besselschen Prinzipe zur Geltung zu bringen, sind von Bruns („Die Figur der Erde", 1878, S. 31) und Helmert („Höhere Geodäsie", I. 1880, S. 609) als vergeblich erkannt worden, wogegen Wolf („Handbuch der Math., Phys., Geod. u. Astr.", II, 1872) und Mayer („Über die Gestalt und Größe der Erde", 1876, S. 63) dessen Ansicht noch zu teilen schienen.

§ 50. Die Verbesserung des Walbeckschen Ausgleichungsprinzips.

Zwischen den Berechnungsweisen von Walbeck und Bessel besteht ein mathematischer Zusammenhang, welcher erkennen läßt, daß auch der Walbeckschen Methode die volle Eignung zugesprochen

werden kann, wenn an ihr eine wesentliche Verbesserung vorgenommen wird. Es sei hier auf die innige Verwandtschaft beider Berechnungsarten näher eingegangen.

Man kann für eine Gradmessung mit $1+\omega$ astronomisch bestimmten Polhöhen im ganzen $\frac{(1+\omega)\,\omega}{2}$ Fehlerdifferenzgleichungen aufstellen, wovon jedoch nur ω Gleichungen voneinander unabhängig sind. Je nach der Wahl der aus dieser Anzahl von Gleichungen herausgegriffenen Gruppe von ω Gleichungen ergeben sich, wenn nach dem Walbeckschen Modus gerechnet wird, verschiedene Resultate, während das Besselsche Verfahren von der Wahl der die notwendige Anzahl von Gleichungen enthaltenden Gruppe ganz unabhängig ist.

Je nach der Wahl der Stationen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_\omega$ als Ausgangspunkte für die Zählung der Amplituden hat man bei Benützung einer Gradmessung folgende Gruppen von Fehlerdifferenzgleichungen:

1. Gruppe.

$$\begin{aligned}
x_1 - x_0 &= a_1\, i + b_1\, k + m_1 \\
x_2 - x_0 &= a_2\, i + b_2\, k + m_2 \\
x_3 - x_0 &= a_3\, i + b_3\, k + m_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_\omega - x_0 &= a_\omega\, i + b_\omega\, k + m_\omega
\end{aligned}$$

2. Gruppe.

$$\begin{aligned}
x_0 - x_1 &= \quad - a_1\, i \qquad\quad - b_1\, k \qquad\quad - m_1 \\
x_2 - x_1 &= (a_2 - a_1)\, i + (b_2 - b_1)\, k + (m_2 - m_1) \\
x_3 - x_1 &= (a_3 - a_1)\, i + (b_3 - b_1)\, k + (m_3 - m_1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_\omega - x_1 &= (a_\omega - a_1)\, i + (b_\omega - b_1)\, k + (m_\omega - m_1)
\end{aligned}$$

3. Gruppe.

$$\begin{aligned}
x_0 - x_2 &= \quad - a_2\, i \qquad\quad - b_2\, k \qquad\quad - m_2 \\
x_1 - x_2 &= (a_1 - a_2)\, i + (b_1 - b_2)\, k + (m_1 - m_2) \\
x_3 - x_2 &= (a_3 - a_2)\, i + (b_3 - b_2)\, k + (m_3 - m_2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_\omega - x_2 &= (a_\omega - a_2)\, i + (b_\omega - b_2)\, k + (m_\omega - m_2)
\end{aligned}$$

usw.

Im Sinne des Walbeckschen Rechnungsvorganges besteht für jede Gruppe ein anderes Normalgleichungenpaar. Bezeichnet man der

Kürze wegen allgemein mit α, β und μ die mit der Wahl des Ausgangspunktes der Amplitudenzählung veränderlichen Koeffizienten der einzelnen Gruppen von Fehlergleichungen, so hat das Normalgleichungenpaar der ersten Gruppe, da hierin $\alpha = a$, $\beta = b$ und $\mu = m$ ist, die allgemeine Form, wie oben S. 207:

$$[a\,a]\,i + [a\,b]\,k + [a\,m] = 0$$
$$[a\,b]\,i + [b\,b]\,k + [b\,m] = 0.$$

In der zweiten Gruppe aber ist:

$$\begin{array}{l|l|l}
\alpha_1 = \quad\; - a_1 & \beta_1 = \quad\; - b_1 & \mu_1 = \quad\; - m_1 \\
\alpha_2 = a_2 - a_1 & \beta_2 = b_2 - b_1 & \mu_2 = m_2 - m_1 \\
\alpha_3 = a_3 - a_1 & \beta_3 = b_3 - b_1 & \mu_3 = m_3 - m_1 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\alpha_\omega = a_\omega - a_1 & \beta_\omega = b_\omega - b_1 & \mu_\omega = m_\omega - m_1.
\end{array}$$

Es ergeben sich daher die Koeffizienten und absoluten Glieder der Normalgleichungen dieser Gruppe in folgender Weise. Der Koeffizient des ersten Gliedes der ersten Normalgleichung wird gebildet aus der Summe:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^2 &= a_1^2 \\
\alpha_2^2 &= a_2^2 - 2\,a_1\,a_2 + a_1^2 \\
\alpha_3^2 &= a_3^2 - 2\,a_1\,a_3 + a_1^2 \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\alpha_\omega^2 &= a_\omega^2 - 2\,a_1\,a_\omega + a_1^2 \\
\hline
[\alpha\,\alpha] &= [a\,a] - 2\,a_1\,([a] - a_1) + (\omega - 1)\,a_1^2 \\
&= [a\,a] - 2\,a_1\,[a] + (1 + \omega)\,a_1^2.
\end{aligned}$$

Der Koeffizient des zweiten Gliedes entsteht aus den Produkten:

$$\begin{aligned}
\alpha_1\,\beta_1 &= a_1\,b_1 \\
\alpha_2\,\beta_2 &= a_2\,b_2 - a_1\,b_2 - a_2\,b_1 + a_1\,b_1 \\
\alpha_3\,\beta_3 &= a_3\,b_3 - a_1\,b_3 - a_3\,b_1 + a_1\,b_1 \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\alpha_\omega\,\beta_\omega &= a_\omega\,b_\omega - a_1\,b_\omega - a_\omega\,b_1 + a_1\,b_1 \\
\hline
[\alpha\,\beta] &= [a\,b] - a_1\,([b] - b_1) - b_1\,([a] - a_1) + (\omega - 1)\,a_1\,b_1 \\
&= [a\,b] - a_1\,[b] - b_1\,[a] + (1 + \omega)\,a_1\,b_1.
\end{aligned}$$

Bildet man in analoger Weise die übrigen Koeffizienten und absoluten Glieder so erhält man die Normalgleichungen der zweiten Gruppe:

$$\begin{aligned}
&\left\{[a\,a] - 2\,a_1\,[a] + (1 + \omega)\,a_1^2\right\} i + \left\{[a\,b] - a_1\,[b] - b_1\,[a] + (1 + \omega)\,a_1\,b_1\right\} k + \\
&\qquad + \left\{[a\,m] - a_1\,[m] - m_1\,[a] + (1 + \omega)\,a_1\,m_1\right\} = 0
\end{aligned}$$

$$\{[a\,b] - a_1\,[b] - b_1\,[a] + (1+\omega)\,a_1\,b_1\}\,i + \{[b\,b] - 2\,b_1\,[b] + (1+\omega)\,b_1^2\}\,k +$$
$$+ \{[b\,m] - b_1\,[m] - m_1\,[b] + (1+\omega)\,b_1\,m_1\} = 0,$$

ferner die Normalgleichungen der dritten Gruppe:

$$\{[a\,a] - 2\,a_2[a] + (1+\omega)\,a_2^2\}\,i + \{[a\,b] - a_2\,[b] - b_2\,[a] + (1+\omega)\,a_2\,b_2\}\,k +$$
$$+ \{[a\,m] - a_2\,[m] - m_2\,[a] + (1+\omega)\,a_2\,m_2\} = 0$$

$$\{[a\,b] - a_2[b] - b_2[a] + (1+\omega)\,a_2\,b_2\}\,i + \{[b\,b] - 2\,b_2[b] + (1+\omega)\,b_2^2\}\,k +$$
$$+ \{[b\,m] - b_2\,[m] - m_2\,[b] + (1+\omega)\,b_2\,m_2\} = 0.$$

usw.

Durch Addition der gleichartigen Koeffizienten der einzelnen Gruppen-Normalgleichungen erhält man die summarischen Koeffizienten:

$$2\,(1+\omega)\,[a\,a] - 2\,[a]\,[a] = [\underline{\alpha\,\alpha}]$$
$$2\,(1+\omega)\,[a\,b] - 2\,[a]\,[b] = [\underline{\alpha\,\beta}]$$
$$2\,(1+\omega)\,[a\,m] - 2\,[a]\,[m] = [\underline{\alpha\,u}]$$
$$2\,(1+\omega)\,[b\,b] - 2\,[b]\,[b] = [\underline{\beta\,\beta}]$$
$$2\,(1+\omega)\,[b\,m] - 2\,[b]\,[m] = [\underline{\beta\,u}].$$

Dividiert man sämtliche Koeffizienten durch $2\,(1+\omega)$, so erhält man die summarischen Normalgleichungen

$$\left\{[a\,a] - \frac{[a]\,[a]}{1+\omega}\right\} i + \left\{[a\,b] - \frac{[a]\,[b]}{1+\omega}\right\} k + \left\{[a\,m] - \frac{[a]\,[m]}{1+\omega}\right\} = 0$$
$$\left\{[a\,b] - \frac{[a]\,[b]}{1+\omega}\right\} i + \left\{[b\,b] - \frac{[b]\,[b]}{1+\omega}\right\} k + \left\{[b\,m] - \frac{[b]\,[m]}{1+\omega}\right\} = 0,$$

welche einerseits mit den Besselschen Normalgleichungen (S. 208) identisch sind, anderseits aber mit Hinweis auf die rechts stehenden Ansätze der summarischen Koeffizienten auch in der Walbeckschen Form (S. 207)

$$[\underline{\alpha\,\alpha}]\,i + [\underline{\alpha\,\beta}]\,k + [\underline{\alpha\,u}] = 0$$
$$[\underline{\alpha\,\beta}]\,i + [\underline{\beta\,\beta}]\,k + [\underline{\beta\,u}] = 0$$

geschrieben werden können, worin aber die Summen der Quadrate und Produkte auf das ganze System von $(1+\omega)\,\omega$ Gleichungen ausgedehnt erscheinen, was durch Unterstreichen der Koeffizienten und absoluten Glieder angedeutet ist.

Da zur Bildung der Koeffizienten dieser Normalgleichungen jede Bedingungsgleichung doppelt zur Anwendung gekommen ist, und es zur Erzielung des gleichen Resultates offenbar genügt, die Bedingungsgleichungen zwar in allen möglichen Kombinationen, aber nur einmal anzusetzen, so erscheinen dann sämtliche Koeffizienten

und absoluten Glieder der auf das System von $\frac{1}{2}(1+\omega)\,\omega$ Gleichungen ausgedehnten Normalgleichungen der Walbeekschen Form, den vorgenommenen Kürzungen durch 2. beziehungsweise durch $2(1+\omega)$ zufolge, zwar $(1+\omega)$-mal größer, als jene der Besselschen Normalgleichungen; sie liefern aber genau dieselben Ergebnisse wie diese.

§ 51. Beispiel aus der französischen Gradmessung.

Ein Zahlenbeispiel, an fünf Stationen der französischen Breitengradmessung durchgeführt, möge die Identität beider Berechnungsarten erhärten.

Station	Polhöhe	Amplitude	Parallelabstand in Toisen.
Formentera:	$\varphi_0 = 38^0\,39'\,56''$		
Barcelona:	$\varphi_1 = 41\;\;22\;\;48$	$\Delta\varphi_1 = \;\;2^0 42' 52''$	$s_1 = 154\,617$
Carcassonne:	$\varphi_2 = 43\;\;12\;\;54$	$\Delta\varphi_2 = \;\;4\;\;32\;\;58$	$s_2 = 259\,173$
Panthéon:	$\varphi_3 = 48\;\;50\;\;49$	$\Delta\varphi_3 = 10\;\;10\;\;53$	$s_3 = 580\,312$
Dünkirchen:	$\varphi_4 = 51\;\;02\;\;09$	$\Delta\varphi_4 = 12\;\;22\;\;13$	$s_4 = 705\,257$

$$g_0 = 57008 \text{ Toisen}, \qquad c_0 = 400.$$

a) Benützung der Besselschen Formeln.

Fehlerdifferenzgleichungen:

$$
\begin{aligned}
1.\;\ldots\; x_1 - x_0 &= 0{\cdot}98\,.\,p - 0{\cdot}86\,.\,q + 0{\cdot}65\\
2.\;\ldots\; x_2 - x_0 &= 1{\cdot}64\,.\,p - 1{\cdot}19\,.\,q + 0{\cdot}03\\
3.\;\ldots\; x_3 - x_0 &= 3{\cdot}67\,.\,p - 0{\cdot}87\,.\,q + 1{\cdot}19\\
4.\;\ldots\; x_4 - x_0 &= 4{\cdot}45\,.\,p - 0{\cdot}21\,.\,q - 5{\cdot}17\\
&\;\; 10{\cdot}74 \qquad - 3{\cdot}13 \qquad - 7{\cdot}04.
\end{aligned}
$$

Hierin ist, um bequeme Zahlen zur Rechnung zu haben,

$$p = 10\,000\,i \text{ und } q = 10\,k \text{ gesetzt.}$$

Bildung der Koeffizienten:

	$a\,a$	$a\,b$	$a\,m$	$b\,b$	$b\,m$
1. . . .	+ 0·9604	− 0·8428	+ 0·6370	+ 0·7396	− 0·5590
2. . . .	2·6896	1·9516	0·0492	1·4161	0·0357
3. . . .	13·4689	3·1929	4·3673	0·7569	1·0353
4. . . .	19·8025	0·9345	23·0065	0·0441	1·0857
Σ_1 . . .	+ 36·9214	− 6·9218	− 28·0600	− 2·9567	+ 2·7157
	− 23·0695	− 6·7232	− 15·1219	− 1·9594	− 4·4070
$\Sigma_2 =$	+ 13·8519	− 0·1986	− 12·9381	− 0·9973	− 1·6913.

Normalgleichungen für p und q:

$$13{\cdot}8519\,.\,p + 0{\cdot}1986\,q + 12{\cdot}9381 = 0$$
$$0{\cdot}1986\,.\,p + 0{\cdot}9973\,.\,q - 1{\cdot}6913 = 0$$

Auflösung: $p = -0{\cdot}96109$, $q = +1{\cdot}88727$.

Normalgleichung für x_0:

$$10{\cdot}74\,p - 3{\cdot}13\,q + 7{\cdot}04 = 5\,x_0.$$

Auflösung: $x_0 = -0{\cdot}525$

$x_1 = +0{\cdot}806''$, $x_2 = -0{\cdot}175''$, $x_3 = -1{\cdot}220''$, $x_4 = +0{\cdot}764$.

Probe: $[x] = 0$.

b) Benützung der verbesserten Walbeckschen Formeln.

Zu den bereits angesetzten 4 Fehlerdifferenzgleichungen treten noch folgende 6 Fehlerdifferenzgleichungen hinzu:

5. . . . $x_2 - x_1 = -0{\cdot}66\,.\,p + 0{\cdot}33\,.\,q - 0{\cdot}62$
6. . . . $x_3 - x_1 = -2{\cdot}69\,.\,p + 0{\cdot}01\,.\,q - 0{\cdot}54$
7. . . . $x_4 - x_1 = -3{\cdot}47\,.\,p - 0{\cdot}65\,.\,q + 4{\cdot}52$
8. . . . $x_3 - x_2 = -2{\cdot}03\,.\,p - 0{\cdot}32\,.\,q - 1{\cdot}16$
9. . . . $x_4 - x_2 = -2{\cdot}81\,.\,p + 0{\cdot}98\,.\,q - 5{\cdot}14$
10. . . . $x_4 - x_3 = -0{\cdot}78\,.\,p + 0{\cdot}66\,.\,q - 3{\cdot}98$

Bildung der Koeffizienten:

	$a\,a$	$a\,b$	$a\,m$	$b\,b$	$b\,m$
$\Sigma_1 =$	+ 36·9214	+ 6·9218	+ 28·0600	+ 2·9567	+ 2·7657
5. . . .	0·4356	+ 0·2178	− 0·4092	0·1089	− 0·2046
6. . . .	7·2361	+ 0·0269	+ 1·4526	0·0001	+ 0·0054
7. . . .	12·0409	− 2·2555	+ 16·6844	0·4225	− 2·9880
8. . . .	4·1209	− 0·6496	+ 2·3548	0·1024	− 0·3712
9. . . .	7·8961	− 2·7538	+ 14·4434	0·9604	− 5·0372
10. . . .	0·6084	− 0·5148	− 3·1014	0·4356	− 2·6268
$\Sigma_3 =$	+ 69·2594	+ 0·9928	+ 64·6904	+ 4·9866	− 8·4567.

Dividiert man die Summen Σ_3 durch $1 + \omega = 5$, so ergeben sich genau dieselben Koeffizienten Σ_2, wie bei Anwendung der Besselschen Formeln, und sohin auch dieselben Resultate:

$$p = -0{\cdot}96109, \qquad q = +1{\cdot}88727$$

oder $\qquad i = -0{\cdot}000096109, \qquad k = +0{\cdot}188727.$

Mit Bezug auf die S. 205 zitierte Abhandlung erhält man weiterhin in roher Abrundung:

$$g = \frac{57008}{1 - i} = 57013{\cdot}48 \qquad e = \frac{1 + k}{400} = 0{\cdot}0029718.$$

$$n = \frac{2}{3}\,\alpha = 0{\cdot}00198121, \qquad N = 1 + \alpha^2 = 1{\cdot}0000088317,$$

$$a = \frac{180\,q}{N\,\pi\,(1-n)^2\,(1+n)} = 3\,273\,101 \text{ Toisen,}$$

$$b = a\,\frac{1-n}{1+n} = 3\,260\,157 \text{ Toisen,}$$

$$\text{Abplattung } \frac{a-b}{a} = \frac{1}{253}.$$

Das mit den Halbachsen a und b beschriebene Rotationsellipsoid schmiegt sich den fünf französischen Meridianbögen-Messungen im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate am besten an.

Namenregister.

Berichtigungen.

Im ersten Bande:

Seite 38, 6. Zeile von unten ist „für $h = 1$“ zu streichen.
„ 39, 1. „ „ unten lese man „Grenzwerten in“ statt „Funktionswerten aus“.
„ 40, 2. „ „ unten lese man „nehmen“ statt „entnehmen“.
„ 184, 4. „ „ unten setze man $|\alpha a . 1|$ statt $|\alpha \alpha . 1|$.
„ 222, 4. „ „ unten setze man „66“ statt „60“.
„ 254, 1. „ „ oben lese man „Fehler gleich genauer Beobachtungen“ statt „Gewichtseinheitsfehler“.
„ 275, 11. „ „ unten setze man „9·0057003“ statt „9·0057006“.

Im zweiten Bande:

Seite 35, 11. Zeile von unten setze man „S. 26“ statt „S. 25“.
„ 42, 2. „ „ oben setze man „§ 25“ statt „§ 24“.
„ 108, 1. „ „ unten ist „und § 62 dieses Bandes“ zu streichen.









